ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна — 2006

Воронеж 2006

УДК 517.5 517.9

Печатается по решению Ученого совета математического факультета

Издано при поддержке гранта РФФИ № 06-01-10015-г.

Воронежская зимняя математическая школа - 2006.
Воронеж: ВорГУ, 2006 - 125 с.

В сборнике представлены тезисы докладов и лекций в Воронежской зимней математической школе, в которых описаны последние полученные результаты.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

Решение абстрактной стохастической задачи Коши

О.Ю. Азанова[1] (Екатеринбург, УрГУ; OlgaAz@mail.ru)

Подход Ито для задачи Коши в гильбертовом пространстве H

$$du(t) = Au(t)dt + BdW(t), \quad t \in [0,T),\ T \leqslant \infty, \quad u(0) = \xi \qquad (1)$$

с оператором A, являющимся генератором полугруппы класса C_0 [1], положен в основу исследования задачи (1) с генератором R-полугруппы и Q-винеровским процессом $\{W(t)\}_{t\geq 0}$.

Теорема 1 *Пусть A — генератор R-полугруппы $\{S(t)\}_{t\in[0,T),\,T\leqslant\infty}$ в H, $R^{-1}B$ — линейный ограниченный оператор в H, а процесс $S(t)R^{-1}B$ при любом $t \geqslant 0$ является оператором Гильберта-Шмидта, причем $\int_0^T \|S(t)R^{-1}B\|^2_{GS}\, dt < \infty$. Тогда для $\xi \in ran\, R$ п.н. процесс*

$$u(t) = S(t)R^{-1}\xi + \int_0^t S(t-s)R^{-1}B\, dW(s)$$

является слабым решением задачи (1) в пространстве H.

Для задачи Коши с генератором R-полугруппы и процессом белого шума $\{\mathcal{W}(t)\}_{t\geq 0}$

$$u'(t) = Au(t) + B\,\mathcal{W}(t), \quad t \in [0,T),\ T \leqslant \infty, \quad u(0) = \xi \qquad (2)$$

в пространствах абстрактных стохастических распределений [2] получено обобщенное решение.

Теорема 2 *Пусть A — генератор R-полугруппы $\{S(t)\}_{t\in[0,T),\,T\leqslant\infty}$ в H, а $R^{-1}B$ — линейный ограниченный оператор в H. Тогда для такого $\xi \in \mathcal{D}(A)$, что $R^{-1}\xi \in S(H)_{-1}$, процесс*

$$u(t) = S(t)R^{-1}\xi + \int_0^t S(t-s)R^{-1}B\delta W(s)$$

является непрерывно дифференцируемым решением задачи (2) в абстрактном пространстве стохастических распределений $S(H)_{-1}$.

Литература. 1. Da Prato D., Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge University Press, Cambridge. 1992. 2. Melnikova I.V, Filinkov A.I, Alshansky M.A. Abstract stochastic equations II. Solution in spaces of abstract stochastic distributions//Journal of mathematical sciences. 2003. V.116. N.5. – p.3620–3656.

[1] Работа поддержана РФФИ (грант 03-01-00310)

О дифференциальных включениях в производных в среднем.

С.В. Азарина
(Воронеж, ВГУ; azarinas@mail.ru)

Обозначим через $D\xi(t)$ производную в среднем справа по Нельсону (см., например, [1]) случайного процесса $\xi(t)$ в R^n, $t \in [0;T]$. Рассмотрим дифференциальное включение вида:

$$D\xi(t) \in \alpha(t, \xi(t)), \tag{1}$$

где $\alpha(t,x)$ – многозначное векторное поле на R^n, для которого выполняется оценка $\|\alpha(t,x)\| < k(1+\|x\|)$ при некотором $k > 0$. Пусть также на R^n задано однозначное непрерывное поле линейных операторов $A(t,x)$, $\|A(t,x)\| < k(1+\|x\|)$ (нормы линейного оператора и многозначного вектора определяются обычными формулами).

Определение. *Будем говорить, что (1) имеет слабое решение на $[0,T]$ с диффузионным членом $A(t,x)$ и с начальным условием $\xi(0) = x_0$, если существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, п.н. непрерывный случайный процесс $\xi(t)$ на нем, винеровский процесс $w(t)$ в R^n, подчиненный $\xi(t)$; интегрируемый по времени процесс $a(t)$ в R^n, не упреждающий относительно $\xi(t)$, такие, что $\xi(t) = x_0 + \int_0^t a(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau, \xi(\tau))dw(\tau)$ и при всех $t \in [0;T]$ выполняется (1).*

Теорема 1. *Пусть $\alpha(t,x)$ полунепрерывно снизу и имеет выпуклые замкнутые образы. Тогда при любом начальном условии $\xi(0) = x_0 \in R^n$ (1) имеет слабое решение $\xi(t)$ с диффузионным членом $A(t,x)$, определенное при $t \in [0;T]$.*

Теорема 2. *Пусть $\alpha(t,x)$ полунепрерывно сверху и имеет выпуклые замкнутые образы, оператор $A(t,x)$ невырожден при всех $t \in [0;T]$, $x \in R^n$. Тогда при любом начальном условии $\xi(0) = x_0 \in R^n$ (1) имеет слабое решение $\xi(t)$ с диффузионным членом $A(t,x)$, определенное при $t \in [0;T]$.*

Работа выполнена совместно с Ю.Е.Гликлихом.

Исследование частично поддержано грантом РФФИ №03-01-00112.

Литература.

1. Гликлих Ю.Е. Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики.-М.:Комкнига, 2005 - 416 с.

О приближенном решении дифференциальных уравнений нейтрального типа

А.Г. Азатьян
(Липецк, ЛГТУ; pm02aag@mail.ru)

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + b\dot{x}(t-\tau) + cx(t) + dx(t-\tau) = f(t), \qquad & t \geqslant t_0 \\ x(t) = \phi(t), \qquad & t \in [t_0 - \tau, t_0]. \end{aligned}$$

При решении подобных задач численными методами типа Рунге–Кутты возникает необходимость численно аппроксимировать производную, что приводит к большим погрешностям. В докладе предлагается прежде, чем применять численные методы, умножить уравнение на обратный к разностному оператору, действующему на производную. В результате уравнение нейтрального типа преобразуется в уравнение запаздывающего типа, и описанная проблема исчезает. Численные эксперименты показывают, что этот прием действительно позволяет повысить точность.

Техническая сторона дела сводится к следующему. Продолжим функцию ϕ на все $\mathbb{R}$ до функции $\tilde{\phi}$ класса C^1. Затем определим функцию $\tilde{f}$ как $f(t) - \big(L\tilde{\phi}\big)(t)$ при $t \geqslant t_0$ и как 0 при $t \leqslant 0$, где $Lx = D\dot{x} + Bx$, а

$$\big(Dx\big)(t) = x(t) + bx(t-\tau) \qquad \big(Bx\big)(t) = cx(t) + dx(t-\tau).$$

Теперь решение x исходной задачи можно представить в виде $x = z + \tilde{\phi}$, где z — решение задачи

$$\begin{aligned} \big(D\dot{z}\big)(t) + \big(Bz\big)(t) = \tilde{f}(t), \qquad & t \geqslant t_0 \\ z(t) = 0, \qquad & t \leqslant t_0. \end{aligned}$$

Умножим уравнение на обратный к оператору D (предполагается, что оператор D причинно обратим). В результате придем к задаче

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) + \big(D^{-1}Bz\big)(t) = \big(D^{-1}\tilde{f}\big)(t), \qquad & t \geqslant t_0 \\ z(t) = 0, \qquad & t \leqslant t_0 \end{aligned}$$

для уравнения запаздывающего типа. Отметим, что оператор $D^{-1}B$ имеет неограниченную память. Но для применения численных методов это не страшно.

Об одной интегро-дифференциальной системе

Х.Р. Ал-Хашеми (Воронеж, ВорГПУ; hishamrehman@yahoo.com)

Пусть $[0,T] \subset R^1$, $f : [0,T] \times R^n \times R^s \to R^n$ - непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему условию: существуют такие положительные числа c_1, c_2 и d, что для любых $(t,u,v) \in [0,T] \times R^n \times R^s$ справедливо неравенство $||f(t,u,v) \leq c_1||u|| + c_2||v|| + d$.

Пусть $k : [0,T] \times [0,T] \to L(R^s, R^s)$ - непрерывное отображение. Обозначим $K_0 = \max\limits_{s,t\in[0,T]} ||k(t,s)||$.

Пусть многозначное отображение $F : [0,T] \times R^n \to Kv(R^s)$ удовлетворяет условиям: $F1$) для каждого $x \in R^n$ многозначное отображение $F(\cdot, x) : [0,T] \to Kv(R^s)$ имеет измеримое сечение; $F2$) для п.в. $t \in [0,T]$ многозначное отображение $F(t,\cdot) : R^n \to Kv(R^s)$ полунепрерывно сверху; $F3$) существуют такие суммируемые функции $\alpha, \beta : [0,T] \to R^1$, что $\max\limits_{y\in F(t,x)} ||y|| \leq \alpha(t)||x|| + \beta(t)$ для всех $x \in R^n$ и п.в. $t \in [0,T]$

Нас будет интересовать следующая задача: $x' = f(t,x,y)$, $y \in \int\limits_0^h (k \circ \mathcal{P}_F)(x)$ где $h \in (0,T]$. Здесь $\int\limits_0^h (k\circ\mathcal{P}_F)(x) : C([a,b]; R^n) \to Cv(C([a,b]; R^n))$ – многозначный оператор Фредгольма, порожденным многозначным отображением F и отображением k.

Теорема. *Если* $0 < h(c_1 + c_2K_0 \int\limits_0^h \alpha(s)ds) < 2$, *то:*

(a) множество решений задачи (1),(2) определенных на отрезке $[0,h]$ *является непустым множеством;*

(b) множество траекторий $x(t)$ *этой системы является неограниченным в пространстве* $C([0,h], R^n)$.

Литература. 1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Москва: КомКнига. 2005. – 216с.

О свойстве слабой диагональности последовательности мер

В.А. Алякин, Д.Э. Клепнёв
(Самара, СамГУ; aval@ssu.samara.ru, dekl@ssu.samara.ru)

Понятия сильной диагональности и диагональности последовательности мер были введены в работах [1], [4] при изучении условий равностепенной абсолютной непрерывности (РАН) двух последовательностей мер (свойство РАН применяется при изучении вопроса об условиях предельного перехода под знаком интеграла, см. [3]). В настоящей работе вводится новое определение (определение 2) слабой диагональности последовательности мер. Полученные результаты усиливают результаты работ [1], [2], [4],[5] в двух направлениях: во-первых, в настоящей работе рассмотрен немонотонный случай, и, во-вторых, получены условия РАН для более слабого понятия диагональности.

Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{R} \subset 2^X$ — кольцо его подмножеств. Рассматриваются конечно-аддитивные меры $\varphi\colon \mathfrak{R} \to (-\infty, +\infty]$, удовлетворяющие условию $\varphi(\varnothing) = 0$, и их полные вариации $\mathrm{v}(\varphi)\colon \mathfrak{R} \to [0, +\infty]$.

Определение 1. Последовательность мер $(\varphi_k)_k$ называется диагональной, если для любой последовательности множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$

$$\text{из} \quad \lim_{k\to\infty} \mathrm{v}(\varphi_k)(E_k) = 0 \quad \text{следует} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_m(E_k) = 0$$

для всех достаточно больших $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Последовательность мер $(\varphi_k)_k$ диагональна тогда и только тогда, когда диагональна последовательность их полных вариаций $(\mathrm{v}(\varphi_k))_k$.

Определение 2. Последовательность мер $(\varphi_k)_k$ называется преддиагональной, если для любой последовательности множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$

$$\text{из} \quad \lim_{k\to\infty} \mathrm{v}(\varphi_k)(E_k) = 0 \quad \text{следует} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_m(E_k) = 0$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Последовательность мер $(\varphi_k)_k$ называется слабо диагональной, если всякая её подпоследовательность преддиагональна.

Теорема 2. Последовательность мер $(\varphi_k)_k$ слабо диагональна тогда и только тогда, когда слабо диагональна последовательность их полных вариаций $(\mathrm{v}(\varphi_k))_k$.

Определение 3. Мера μ называется абсолютно непрерывной относительно меры φ (обозначение: $\mu \ll \varphi$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \in \mathfrak{R}\ (\mathrm{v}(\varphi)(E) < \delta \Rightarrow |\mu(E)| < \varepsilon);$$

Меры $(\mu_k)_k$ называются равностепенно абсолютно непрерывными относительно мер $(\varphi_k)_k$ (обозначение: $(\mu_k)_k \lll (\varphi_k)_k$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \in \mathfrak{R}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (\mathrm{v}(\varphi_k)(E) < \delta \Rightarrow |\mu_k(E)| < \varepsilon).$$

Определение 4. Последовательность мер $(\mu_k)_k$ называется равномерно исчерпывающей, если для всякой последовательности попарно дизъюнктных множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(E_k) = 0$$

равномерно по m.

Теорема 3. Пусть последовательность мер $(\mu_k)_k$ — равномерно исчерпывающая, последовательность мер $(\varphi_k)_k$ — слабо диагональная, причём $\forall k \in \mathbb{N}\ \mu_k \ll \varphi_k$. Тогда $(\mu_k)_k \lll (\varphi_k)_k$.

Литература

1. Алякин В. А. Диагональные семейства функций множества и обобщённая теорема Витали–Хана–Сакса–Никодима. — Деп. в ВИНИТИ, № 1215-79 Деп.

2. Алякин В. А. Теорема Витали–Хана–Сакса для двух последовательностей мер. — В сб.: Вопросы функционального анализа. Мера и интеграл. Куйбышев, 1984.

3. Арешкин Г. Я. О переходе к пределу под знаком интеграла Радона. — Сообщ. АН Груз. ССР, 1949, т. 10, № 2, с. 69–76.

4. Климкин В. М. О равностепенной абсолютной непрерывности. — Матем. заметки, 1979, т. 25, № 2, с. 199–209.

5. Климкин В. М. Введение в теорию функции множества: Учебное пособие. — Изд-во Саратовского университета, Куйбышевский филиал, 1989.

Об аппроксимации обобщённой функции Шура.

Е.Н.Андреищева
(Воронеж, ВГУ; *anda_el@mail.ru*)

В работе Крейна М.Г., Лангера Г. [1] приведена и доказана теорема об аппроксимации функции Неванлинны в окрестности бесконечно удалённой точки.
Наша задача найти представление функции Шура в окрестности $\lambda = 1$.

Определение 1 *Функция $s(\lambda)$ называется обобщённой функцией Шура, если она мероморфна в открытом единичном круге и ядро вида $\frac{1-s(\lambda)\overline{s(\mu)}}{1-\lambda\overline{\mu}}$ имеет ровно $\varkappa$ отрицательных квадратов.*

Теорема 1 *Для функции $s(\lambda)$ следующие свойства*

1. $s(\lambda) \in S_\varkappa$;

2. *для некоторого целого числа $n \geqslant 0$, существуют $2n$ вещественных числа: $s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ таких, что имеет место разложение:*

$$s(\lambda) = 1 + \sum_0^{2n-1} s_\nu (\lambda-1)^{\nu+1} + O((\lambda-1)^{2n+1}), \quad \lambda \to 1, \ \lambda \in \Lambda$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, T – сжимающий оператор в $\Pi_\varkappa$ и порождающий элемент $u \in D((I-T)^{-(n+1)})$ для оператора T такой, что справедливо представление:

$$s(\lambda) = 1 + (\lambda-1)[(I-\lambda T)^{-1}(I-T)^{-1}u, v], \quad \lambda \in C_i, \ \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T),$$

где элемент v представим в виде $v = -\overline{s(0)}T^{(-1)}u$.
В этом случае:

$$s_\nu = \begin{cases} [(I-T)^{-(\nu+1)}T^\nu u, (I-T^c)^{-1}v], & 0 \leqslant \nu \leqslant n; \\ [(I-T)^{-(n+1)}T^\nu u, (I-T^c)^{-(\nu-n+1)}v], & n+1 \leqslant \nu \leqslant 2n-1; \end{cases}$$

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00203-а.

Литература.

1. M.G.Krein, H.Langer, Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit

der Theorie hermitescher Operatoren in Raume $\Pi_\varkappa$ zusammenhängen, Teil I:Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen, Math. Nachr. 77 (1977), 187-236.

О коэрцитивной разрешимости краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в банаховом пространстве.

В. П. Аносов

В ограниченной открытой области $\Omega(\Omega \in R^n)$ с границей S рассматривается следующая краевая задача

$$L(x, D)u - A(x)u = f(x)(x \in \Omega) \tag{1}$$

$$u(x) = \varphi(x)(x \in S) \tag{2}$$

Здесь u - искомая , а f и φ -заданные функции со значениями в некотором банаховом пространстве , $L(x, D)$-равномерно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, $A(X)$ - при каждом $x \in \tilde{\Omega}$, слабо позитивный оператор, имеющий не зависящую от x область определения. Задача (1)-(2) рассматривалась в работах [1] - [3] . Здесь уточняются полученные в [1] - [3] результаты.

Литература

1. Аносов В.П., Соболевский П.Е.,Коэрцитивная разрешимостькраевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в банаховом про- странстве I // Дифференц. Уравнения.-1971.- Т. VII, № 11.-С.2030-2044.

2. Аносов В.П., Соболевский П.Е.,Коэрцитивная разрешимость краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в банаховом про- странстве II // Дифференц. Уравнения.- 1971.-Т. VII, № 12.-С.2132-2138.

3. Аносов В.П.,Соболевский П.Е.,О первой краевой задаче для эллиптических уравнений в банаховом пространстве //Тр. Мат. ф-та ВГУ.-1971.- С. 13-21.

Принцип Ванга подсчета премии

Н.А.Аржанова (Москва, МГУ, natalia.irkhina@ingos.ru)

В последнее время принцип Ванга (Wp) подсчета премии, сформулированный им в работах в 1995, 1996 годы, обсуждался многими авторами, в том числе Вангом, Йонг (Young), Панжером и другими, и было установлено, что принцип Ванга подсчета премий является надежной мерой риска. Но формула подсчета достаточно громоздкая. Поэтому важной задачей является определить, при каких условиях принцип подсчета премии по среднеквадратическому отклонению (SDp), который применять гораздо удобнее, является частным случаем (Wp), т.е. также является надежной мерой риска.

В [2] показано, что для фиксированной функции-искажения натуральное множество, на котором Wp сводится к SDp, полностью совпадает с объединением location-scale families, удовлетворяющих некоторым условиям (location-scale family - двухпараметрическое семейство с параметром сдвига и масштабным параметром). Более того, было доказано, что натуральное множество полностью совпадает с location-scale family, если Wp сводится к SDp для любой функции-искажения.

В [1] были приведены 2 результата. Одним из них является тот факт, что натуральное множество является location-scale family, если Wp сводится к SDp для любой сюрьективной функции-искажения. Другим, что натуральное множество является location-scale family для любой степенной функции искажения, но только при некоторых условиях на изучаемую случайную величину, а именно, непрерывность функции дожития и выпуклость носителя.

Автор данных тезисов сделал шаг вперед, отказавшись от ограничений на рассматриваемую случайную величину, а именно, доказал теорему о том, что натуральное множество является location-scale family для "склейки" двух степенных функций для произвольной случайной величины. В основу доказательства легла Лемма 1 из [1].

Литература.

1. Xian-Yi Wu, The natural sets of Wang's premium principle, East China Norman University, Shanghai, China, Astin Bulletin, Vol.31, №1, 2001, pp.139-145.

2. Wang Jing-Long, A note on Christofides' conjecture regarding Wang's premium principle, East China Norman University, Shanghai, China, Astin Bulletin, Vol.30, №1, 2000, pp.13-17.

О некоторых новых соотношениях между нормами в классе симметричных пространств

С.В. Асташкин, К.В. Лыков
(Самара, СамГУ; astashkn@ssu.samara.ru, alkv@list.ru)

Ниже речь идет о симметричных пространствах функций на отрезке $[0,1]$. Самыми известными примерами таких пространств служат пространства L_p. Возникает вопрос, для каких пространств можно получить эквивалентное выражение для нормы с помощью L_p-норм? В ряде случаев норму $\|x\|_E$ можно описать с помощью некоторой нормы от функции $\xi(p)=\|x\|_p$:

$$c\cdot\|\xi\|_F\le\|x\|_E\le C\cdot\|\xi\|_F, \qquad (1)$$

где F — идеальное пространство функций на $[p_0,\infty)$.

В работе исследуется вопрос, когда некоторые известные пространства (пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича) допускают описание вида (1). Приведем здесь некоторые результаты.

Пусть $E=M(\varphi)$ — пространство Марцинкевича с фундаментальной функцией $\varphi(t)$. Показано, что в случае нетривиального верхнего показателя растяжения δ_φ функции $\varphi(t)$ соотношение (1) невозможно. Если же $\delta_\varphi=0$, то найдены различные достаточные условия для выполнения (1). При этом оказывается, что в качестве F всегда можно брать L_∞ с весом специального вида. А именно, при выполнении (1),

$$c\cdot\sup_{p\ge1}\frac{\|x\|_p}{\|1/\varphi\|_p}\le\|x\|_{M(\varphi)}\le C\cdot\sup_{p\ge1}\frac{\|x\|_p}{\|1/\varphi\|_p}.$$

В качестве иллюстрации приложений неравенств вида (1) приведем следующий результат ($M^0(\varphi)$ — сепарабельная часть $M(\varphi)$).

Теорема 1. Пусть $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^\infty$ - ортонормированная система, $\psi_n\in L_\infty$, и для любых $f\in L_1$ и $\tau>0$ $\tau\cdot\mu\{t:\ |S_n(f,t)|>\tau\}\le C\cdot\|f\|_1$, где C не зависит от f, n и τ, а через $S_n(f,t)$ обозначена частная сумма Фурье функции f. Тогда, если $\{\psi_n(t)\}$ полна в $M^0(\varphi)$ и $\varphi(t)\le C_1\varphi(t^2)$, то для всех $f\in M^0(\varphi)$

$$S_n(f,t)\to f \text{ в } M^0(\varphi_1),\ \varphi_1(t)=\frac{\varphi(t)}{\ln 2/t}.$$

Условию теоремы удовлетворяет, например, система Уолша.

Параллелоэдры, связанные с пространством функций Морса на компактном многообразии

Д.М.Афанасьев (Москва, МГУ; denisafanasev@yandex.ru)

Рассмотрим множество функций Морса на многообразии, наделенное C^∞-топологией. Функции назовем простыми или сложными в зависимости от числа критических точек на каждом критическом уровне. Между классами естественной эквивалентности простых функций на компактном многообразии и (ручными)узлами в 3-мерном евклидовом пространстве имеется некоторая аналогия, при этом виртуальным узлам (узлы с самопересечениями) соответствуют сложные функции Морса. Распады классов эквивалентных функций Морса, которые можно строго определить для 2-мерных многообразий, порождают комплекс инцидентностей особого свойства: он правильно составлен из элементарных комлексов подобно ориентированному кубическому комплексу узлов. Поскольку распаду класса функций соответствует непрерывный путь в пространстве функций Морса, наш комлекс содержит информацию о гомотопическом типе этого пространства.

Теорема. Каждый такой элементарный комплекс есть комлекс инцидентностей граней некоторого многомерного выпуклого многогранника, являющегося параллелоэдром с транзитивной на его вершинах группой симметрий.

Доказательство существенно опирается на знание о системе корней A_n алгебры Ли $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Построим элементарный комплекс инцидентностей, обозначенный через $\overline{P}_{k_1,\dots,k_s}$. На множестве упорядоченных наборов $(E_1, E_2, ..., E_s)$ конечных множеств E_i, $E_i \subset N$, $E_i \bigcap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $E_i \neq \varnothing$, введем отношение инцидентности по правилу:

$$c \succ d \Leftrightarrow c = (E_1, ..., E_q, ..., E_s) \bigwedge d = (E_1, ..., E_{q-1}, E'_q, E''_q, E_{q+1}, ..., E_s),$$

где $E_q = E'_q \bigsqcup E''_q$, $E'_q \neq \varnothing$, $E''_q \neq \varnothing$. Переходу от c к d соответствует распад q-ого критического уровня класса эквивалентных функций Морса. Завершая определение $\overline{P}_{\overline{k}}$, $\overline{k} = (k_1, ..., k_s)$, полагаем

$$(\overline{P}_{\overline{k}})_m = \{(\{1, ..., k_1\}, \{k_1{+}1, ..., k_1{+}k_2\}, ..., \{k_1{+}...{+}k_{s-1}{+}1, ..., k_1{+}...{+}k_s\})\},$$

где $k_i \in N$, $k_i \geqslant 2$, $\overline{P}_{\overline{k}} = (\overline{P}_{\overline{k}})_m \succ ... \succ (\overline{P}_{\overline{k}})_0$, $m = k_1 + ... + k_s - s$.

Литература. 1. S.Matveev, M.Polyak "Cubic complexes and finite type invariants"//Geometry and Topology Monographs //Volume 4 //Pages 215-233. 2. А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко "Интегрируемые гамильтоновы системы".

Предельная теорема для системы с пуассоновским потоком переменной интенсивности.

Афанасьева Л.Г.[2], *Баштова Е.Е.*[3]

(Москва, МГУ; gregoria@mail.ru, bashtovaelena@rambler.ru)

Системы с зависящими от времени параметрами давно привлекают внимание исследователей как в силу их прикладной значимости, так и нетривиальности математических проблем, которые приходится решать при их анализе. В частности, в работах ([1] - [4]) были получены различные результаты для периодических систем, а в работе ([5]) рассматривалась почти периодическая интенсивность входящего потока. При этом отказ от периодичности вносит существенное изменение в поведение характеристик системы.

В данной работе интенсивность $\{\lambda(t),\, t \geqslant 0\}$ входящего пуассоновского потока $N(t)$ - неотрицательная ограниченная функция,

$\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(u)du$.

В системе один прибор,времена обслуживания $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ суть независимые экспоненциально распределенные случайные величины со средним b.

Предположим, что функция $\Lambda(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

Условие $(*)$. *Пусть существуют числа* $\delta > 0,\ \ 0 < c < C < \infty$ *и последовательность чисел* $T_1 < T_2 < \dots$, *такая что* $c < T_n - T_{n-1} < C$ *и для всех достаточно больших* n *выполняется:*

$$\frac{\Lambda(T_n) - \Lambda(T_{n-1})}{T_n - T_{n-1}}\, b < 1 - \delta$$

Условие $(**)$.

$$\frac{\Lambda(t)}{t} \to \lambda\,, \quad t \to \infty$$

[2]При поддержке гранта РФФИ 05-01-00256

[3]При поддержке гранта РФФИ 05-01-00256

Обозначим

$$H(t,x) \ = P(W(t) \leqslant x\,),$$

где $W(t)$ - процесс виртуального времени ожидания. Известно (см. напр. [6]), что $W(t)$ задается следующей формулой:

$$W(t) = W(0) + Y(t) - inf\{Y(s) : 0 \leqslant s \leqslant t\} \text{ где}$$

$$Y(t) = X(t) - t, \text{ а } X(t) \ = \ \xi_1 + \xi_2 + \ ... \ + \xi_{N(t)}.$$

Теорема 1 *Пусть выполнены условия* $(*)$, $(**)$. *Тогда для каждого* $x \geqslant 0$ *существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T H(t,x)dt \ = \ H(x).$$

Приведем схему доказательства теоремы 1.

Лемма 1 *Пусть выполнено условие* $(*)$. *Тогда процесс* $W(t)$ *стохастически*
ограничен.

Лемма 2 *Пусть выполнены условия* $(*)$ *и* $(**)$. *Тогда существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T H(t,0)dt = H(0).$$

Выпишем уравнение Бенеша ([7]) для процесса $W(t)$:

$$H(t,x) = P(Y(t) \leqslant x) - \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^z P(Y(t) - Y(u) \leqslant x | W(u) = 0) H(u,0)du. \tag{1}$$

Обозначим $p(t,u,x) = \frac{\partial}{\partial x} P(Y(t) - Y(u) \leqslant x)$. В силу независимости приращений процесса $Y(t)$

$$H(t,x) = P(Y(t) \leqslant x) - \int\limits_0^t p(t,u,x)H(u,0)du.$$

Интегрируя последнее уравнение от 0 до T и меняя пределы интегрирования, имеем:

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T H(t,x)dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T P(Y(t)\leqslant x)dt - \frac{1}{T}\int\limits_0^T H(u,0)\int\limits_0^{T-u} p(u+t,u,x)dtdu. \tag{2}$$

В силу отрицательного сноса процесса $Y(t)$ первое слагаемое в формуле (2) стремится к 1.Для доказательства существования предела у второго слагаемого сформулируем следующую лемму.

Лемма 3 *В условиях теоремы 1 интеграл*

$$I(u) = \int\limits_0^\infty p(u+t,u,x)dt$$

сходится равномерно по $u \geqslant 0$, *функция* $I(u)$ *является ограниченной и существует предел*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T I(u)du.$$

В силу леммы 3 $\forall\varepsilon > 0$ существует T_0 такое что $\forall T > T_0$

$$\left|\frac{1}{T-lnT}\int\limits_0^{T-lnT} H(u,0)I(u)du - \frac{1}{T}\int\limits_0^T H(u,0)\int\limits_0^{T-u} p(u+t,u,x)dtdu\right| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Применяя лемму 2 и лемму 3, получаем, что существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T H(u,0)I(u)du$$

и, в силу (3) доказательство теоремы 1 закончено.

Литература. 1.Harrison J.M.,Lemoin A.J. Limit theorems for periodic queues. J.Appl.Prob. v.14(1977), p.566-576. 2.Lemoin A.J.(1977) On queues with periodic Poisson input.J.Appl.Prob. v.18(1981), p.889-900. 3.T.Rolsky Queues with nonstationary input. Queueing systems 1989 v.5 113-130. 4.Afanas'eva

L.G,. On periodic distribution of waiting-time process. In:Lect.Notes Math. Stab. probl.stoch.models.(1984) 5. T.Rolsky Ergodic properties of Poisson processes with almost periodic intensity. Prob.Th.Rel.Fields 84,(1990) 27-37 6. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. Наука - 1972. 7.Benes V.E. General stochastic processes in theory of queues Addison-Wesley Publishing, Massachusetts - 1963.

Оценки решения одной начально-краевой задачи гидродинамики с разрывными граничными условиями

Баева С. А. (Воронеж, ВГУ)

Рассмотрим теперь начально-краевую задачу для линеаризованной системы уравнений плоского движения вязкой стратифицированной жидкости. В полупространстве R^3_{++} рассмотрим систему уравнений

$$A(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial t})U = 0 \quad , \tag{4}$$

где $U(x_1, x_2, t) = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), u_3(x_1, x_2, t), u_4(x_1, x_2, t))^T$, $A = \{a_{kl}\}, 1 \leqslant k, l \leqslant 4; a_{11} = a_{22} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta; a_{m4} = a_{4m} = \frac{\partial}{\partial x_m}, m = 1, 2; a_{33} = \frac{\partial}{\partial t}; a_{23} = g;\ a_{32} = \frac{-\omega_0^2}{g}; a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = a_{34} = a_{43} = a_{44} = 0; \nu > 0; \omega_0 \neq 0; g > 0$. T — знак транспонирования.

Рассмотрим далее начально-краевую задачу для системы уравнений (1) при начальных условиях:

$$u_1(x, +0) = 0,\ u_2(x, +0) = 0,\ u_3(x, +0) = 0 \tag{5}$$

и граничных условиях

$$u_4(x_1, +0, t) = r(t)\mathrm{X}_{[-1,1]}(x_1);\ u_1(x_1, +0, t) = 0. \tag{6}$$

Здесь $\mathrm{X}_{[-1,1]} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x_1 \in [-1, 1]; \\ 0, & \text{если} \quad x_1 \notin [-1, 1] \end{cases}$.

Использование методов работы [1] позволяет свести эту задачу к обобщенной задаче Коши

$$Av = F, \quad F = (0; -2r(t)\mathrm{X}_{[-1,1]}(x_1)\delta(x_2); 0; 0)^T \tag{7}$$

Решение задачи (4) может быть построено в явном виде с помощью преобразования Фурье. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $r(t)$, $\frac{dr}{dt} \in L_2(0,\infty)$, тогда решение задачи (4) существует и справедливы следующие оценки:

$$\|v_1(.,t)\|_{L_2(R^1\times R^1_+)} + \|v_2(.,t)\|_{L_2(R^1\times R^1_+)} \leqslant$$
$$\leqslant c\sqrt{t}(\|g(.,t)\|_{L_2(R^1\times R^1_+)} + \left\|\frac{dg}{dt}(.,t)\right\|_{L_2(R^1\times R^1_+)}),$$

$$\|v_3(.,t)\|_{L_2(R^1\times R^1_+)} + \|v_4(.,t)\|_{L_2(R^1\times R^1_+)} \leqslant c\sqrt{t}\,\|g(.,t)\|_{L_2(R^1\times R^1_+)}.$$

Кроме того, компоненты $v_k,\ k = 1,2,3,4$ решения являются непрерывными и ограниченными функциями своих аргументов.

Литература 1. Глушко А. В. Асимптотические методы в задачах гидродинамики./ А. В. Глушко.-Воронеж: изд.-во Воронеж. ун.-та, 2003.-300 с.

О существовании F-решений задачи Коши для дифференциальных включений

А.В.Балаева, В.В.Васильев

В банаховом пространстве E рассматривается задача Коши для включения (см. [1]):

$$\begin{cases} u'(t) \in Au(t) + f(t), \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1}$$

с линейным многозначным оператором $A : D(A) \subseteq E \to 2^E$, удовлетворяющим условию Соломяка - Иосиды (см. [2]). Заменяя производную по времени аппроксимацией Иосиды, получаем операторное включение

$$-B_n(v_n(t) - x) \in Av(t) + f(t), \tag{2}$$

аппроксимирующее задачу Коши (1).

F - решением (решением в смысле Фридрихса) задачи (1) назовем функцию $u(t)$, если существуют последовательности $f_k(t) \in C([0,T];E)$ и $x_k \in D(A)$, приближающие $f(t)$ и x в смысле $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k(\cdot) - f(\cdot)\|_{C([0,T];E)} = 0$ такие, что последовательность соответствующих классических решений $u_k(t)$ задачи (1) сходится к $u(t)$ в смысле $C([0,T];E)$.

Теорема 1. Для любой непрерывной функции $f(t)$ при достаточно больших n операторное включение (2) имеет решение $v_n(t)$, допускающее оценку

$$\|v_n(t)\|_{C([0,T];E)} \leqslant M\left(\|x\| + \frac{\|f(\cdot)\|}{n} + \int_0^t \|f(s)\|ds\right).$$

Теорема 2. Пусть $u(t)$ - произвольное F - решение задачи Коши (1), $u_n(t)$ - решение приближенной задачи (2). Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k(\cdot) - u(\cdot)\|_{C([0,T];E)} = 0.$$

Теорема 3. Пусть $x \in E$, и функция $f(t) \in C([0,T];E)$. Тогда задача Коши (1) имеет единственное F- решение.

Литература 1. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces Marcel Dekker Inc., New York, 1999. 2. Васильев В.В. Полугруппы операторов и косинус оператор-функции Воронеж.- Из-во Воронеж ун-та.- 2005.- 272 с.

Модель изменения капитала некоторой фирмы

Баркова Л.Н.

Пусть $S(t)$ - капитал, которым располагает некоторая фирма (страховая, торговая и т. д.) в момент времени t.

Предположим, что за время $[t, t+\triangle t)$ капитал фирмы меняется следующим образом:

1. фирма несет расходы $(c_0 + c_1 \cdot S(t) + c_2 \cdot S(t))\triangle t$, где c_0- постоянные расходы (коммунальные услуги, аренда и т.д.), величина c_1 предназначена для описания расходов, связанных непосредственно с капиталом фирмы: налоги, благотворительность; коэффициент c_2 есть доля капитала, который идет на развитие (агитация, реклама и т.д.);

2. будем предполагать, что поток клиентов для данной фирмы (страхователей, покупателей и т. д.) является пуассоновским с переменной интенсивностью $\lambda_1 + \alpha(t)$, где λ_1 - интенсивность потока клиентов, не охваченных агитацией, а $\alpha(t)$ - интенсивность потока клиентов, которые обратились в фирму в результате агитационных мероприятий. Приход клиентов в фирму означает увеличение ее капитала на величину ξ, которую будем считать случайной, не зависящей от указанных выше случайных величин. Тогда

$$S(t+\triangle t) - S(t) = \begin{cases} \xi - (c_2 + c_1)\cdot S(t) \triangle t - c_0 \triangle t, \\ \text{ если за время}[t+\triangle t) \text{ в фирму обратился клиент,} \\ -(c_2 + c_1)\cdot S(t) \triangle t - c_0 \triangle t, \\ \text{ если за время}[t+\triangle t) \text{ в фирму не обратился клиент,} \end{cases}$$

Если предположить, что все случайные величины имеют математические ожидания, то переходя к ним и устремляя $\triangle t$ к 0, получим дифференциальные уравнения для среднего капитала фирмы $M(t) = MS(t), t \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{dM(t)}{dt} = -(c_2 + c_1)M(t) + \alpha(t)M\xi + \lambda_1 M\xi - c_0, t > 0, \\ M(0) = m, \end{cases}$$

Рассмотрим теперь частный случай: $\alpha(t) \equiv 0$, т.е. эффективность агитации нулевая и $c_0 = \lambda_1 M\xi$, что означает равенство постоянных расходов фирмы среднему вкладу клиентов, обратившихся в фирму за интервал единичной длины (например за месяц). Тогда
$M(t) = me^{-(c_1+c_2)t}, t \geq 0$, т.е. в скором времени такая фирма разорится.

Вернемся к полученному дифференциальному уравнению и обратим теперь внимание на функцию $\alpha(t)$, которая выражает эффективность агитации. Помимо явного задания функции $\alpha(t)$, можно считать, что функция $\alpha(t)$ напрямую зависит от $M(t)$. В этом случае расширяется круг возможных в этой ситуации задач.

Литература. 1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения., т.2 Москва "Мир 1984г. 751с.

Краевая задача для функционально-дифференциальных включении с бесконечным запаздыванием.

М.М. Басова (Воронеж, ВГУ; e-mail: basova_marina@mail.ru)

Пусть E – сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{B}$ – полунормированное фазовое пространство функций, заданных на $(-\infty; 0]$ (см. [1]) и $T > 0$. Для каждой функции $x : (-\infty; T] \to E$ и $t \in [-\infty; T]$, x_t представляет функцию из $\mathcal{B}$ определяемую как $x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \theta \in (-\infty; 0]$. Обозначим $\mathcal{C}((-\infty; T]; E)$ линейное топологическое пространство функций $y : (-\infty; T] \to E$ такое, что $y_0 \in \mathcal{B}$ и сужение $y\mid_{[0;T]}$ непрерывно, снабженное полунормой $\|y\|_{\mathcal{C}} = \|y_0\|_{\mathcal{B}} + \|y\mid_{[0;T]}\|_C$.
С использованием теории топологической степени изучается следующая краевая задача для функционально-дифференциального включения:

$$x'(t) \in Ax(t) + F(t, x_t), \qquad t \geq 0, \tag{8}$$

$$Bx \in Cx, \tag{9}$$

при следующих предположениях [см. 2]:
(A) Линейный оператор $A : D(A) \subseteq E \to E$ является производящим оператором C_0-полугруппы $\exp\{tA\}$.
(F) мультиотображение $F : [0,T] \times \mathcal{B} \to Kv(E)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и для любого непустого ограниченного $\Omega \subset \mathcal{B}$ выполнено для п.в. $t \in [0,T]$, $\chi(F(t,\Omega)) \leq k(t)\varphi_{\mathcal{B}}(\Omega)$, где $k \in L^1_+[0,T]$, χ – мера некомпактности Хаусдорфа в E, а $\varphi_{\mathcal{B}}$ - модуль послойной некомпактности в пространстве $\mathcal{B}$.
(B) $B : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to \mathcal{B}$ – линейный ограниченный оператор;
(C) мультиотображение $C : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to Kv(\mathcal{B})$ является полунепрерывным сверху и переводит ограниченные множества в относительно компактные.

Литература

1. C.Gori, V.Obukhovskii, M.Ragni, P.Rubbioni, Existence and continuous dependence results for semilinear functional differential inclusions with infinite delay, Nonlinear Anal.51 (2002) 765-782.
2. M.Kamenskii, V.Obukhovskii, P.Zecca, Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2001.

Изучение бифуркационных раскладов, рождающихся из омбилической точки минимума в вершине угла

А.В. Белоглазов (Воронеж, ВГУ; whiter@ok.ru)

Работа посвящена задаче бифуркационного анализа критических точек функции

$$W(x,y,\lambda) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + d_1x^2 + d_2y^2 + 2d_3xy + q_1x + q_2y \tag{10}$$

в подвижном угле

$$\begin{cases} x + a_1y \geq 0, \\ x + a_2y \geq 0. \end{cases}$$

Бифуркационное исследование функции (10) можно разбить на два этапа: нахождение каустики функции и описание всех bif – раскладов.

Задача о нахождении каустики была решена в предшествующих работах [1], [2].

Bif – расклады функции (10) удобно представлять в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} l_0^0 & l_1^0 & l_2^0 \\ l_0^1 & l_1^1 & l_2^1 \\ l_0^2 & l_1^2 & l_2^2 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Здесь l_i^j - количество критических точек индекса i на j-мерных гранях.

В работе были найдены условия на коэффициенты матрицы (11) и получен список возможных матриц. Установлено существование 64 раскладов из данного списка. Вопрос о существовании еще трех раскладов остается открытым.

Литература. 1. Белоглазов А.В. Конечномерно редуцирующие схемы в лагранжевом и гамильтоновом формализмах// Труды математического факультета, в.9 (новая серия). Воронеж: ВорГУ, 2004. – С. 3-8. 2. Белоглазов А.В. Конечномерно редуцирующие схемы в лагранжевом и гамильтоновом формализмах// Труды математического факультета, в.9 (новая серия). Воронеж: ВорГУ, 2004. – С. 3-8.

О классической разрешимости задачи для системы уравнений параболо-эллиптического типа

Г.И.Бижанова (Алматы, Институт математики МОН РК, *galya@math.kz*, *galina_math@mail.ru*)

Рассматривается краевая задача с неизвестными функциями $u(x,t) = (u_1, \ldots, u_N)$, $N \geqslant 2$, и $\varphi(x,t)$

$$\partial_t u^T - A(x,t,u)\,\Delta u^T - m^T(x,t,u)\Delta\varphi = f^T(x,t,u,\partial_x u) \ \text{ в } \ \Omega_T := \Omega \times (0,T),$$

$$z_1 u_1 + \ldots + z_N u_N = 0 \ \text{ в } \ \bar{\Omega}_T,$$

$$u_r|_{t=0} = u_{0r}(x), \ r = 1, \ldots, N, \ \text{ в } \ \Omega, \qquad (1)$$

$$A(x,t,u)\partial_\nu u^T + m^T(x,t,u)\,\partial_\nu\varphi = g^T(x,t,u,\varphi) \ \text{ на } \ S_T := \partial\Omega \times [0,T],$$

здесь Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. Предполагается, что $A(x,t,u) = \{a_{rs}\}_{1 \leq r,s \leq N}$ является симметрической и положительно определенной матрицей; $m(x,t,u) = (m_1,\ldots,m_N)$, $f(x,t,u,\partial_x u) = (f_1,\ldots,f_N)$, $g(x,t,u,\varphi) = (g_1,\ldots,g_N)$, $u^T = \mathrm{colon}(u_1,\ldots,u_N)$–вектор–столбец, $z = (z_1,\ldots,z_N) \in \mathbb{R}^N$ – фиксированный вектор, причем $z_1^2+\ldots+z_N^2 \neq 0$, ν–внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Задача (1) поставлена Г.Аманном [1], в работе [2] Г.Аманном и М.Ренарди было установлено существование и единственность классического решения задачи.

Мною доказано существование единственного решения задачи (1) в пространствах Гельдера для малых значений времени, установлена гладкость функции φ по t, получены оценки решения [3].

Литература. 1. H. Amann. Nonhomogeneous linear and quasi-linear elliptic and parabolic boundary value problems // Function Spaces, Differential Operator and Nonlinear Analysis. Teubner-Texte zur Math., Stuttgart-Leipzig. 1993. V.133. – P. 9-126. 2. Amann H., Renardy M. Reaction-diffusion problems in electrolysis // NoDEA. 1994. 1. –P. 91-117. 3. Бижанова Г.И. О разрешимости задачи Г.Аманна в пространствах Гельдера // Зап. научн. семин. ПОМИ РАН. 2003. Т.295. С.18-56. (English transl.Journal of Math. Sci.(New York) 2005. V. 127, N 2. – P. 1828-1848).

Симметричные и кососимметричные решения, возникающие в ускорительной секции коллайдера

Я.Л. Богомолов, Е.С. Семенов, А.Д. Юнаковский
(Н. Новгород, Институт прикладной физики РАН,
bogomol@appl.sci-nnov.ru, semes@appl.sci-nnov.ru, yun@appl.sci-nnov.ru)

Рассматривается электродинамическая система накопления энергии (ускорительная секция суперколлайдера). Основные идеи синтезирования оптимальной структуры сформулированы в [1]. Цель оптимизации состоит в том, чтобы максимизировать сопротивление связи при одновременной минимизации максимума электрического поля на поверхности металла.

Данная оптимизационная проблема порождает ряд модельных задач. Среди них можно выделить "нулевую спектральную задачу" (НСЗ) [2]: подобрать профили граничной поверхности ускорительного канала, обеспечивающие нулевое собственное значение для оператора типа Гельмгольца при соответствующих граничных условиях (отсутствие токов на металлической поверхности). Такое нулевое собственное значение кратно априори. Соответствующие собственные функции являются симметричными или кососимметричными.

Конструктивный численный алгоритм для НСЗ, основанный на методе дискретных источников вкупе с процедурой сингулярного разложения матриц представлен в [2]. Отдельные результаты относительно НСЗ опубликованы в [2], [3].

Получены новые результаты, касающиеся НСЗ. В частности, исследована сходимость приближенных численных решений при увеличении числа используемых дискретных источников.

Литература

1. M.I.Petelin, Quasi-optical Electron-positron Colliders? // Strong Microwaves in Plasmas, Proceedings of the Int. Workshop (Ed. by Litvak A.G.), N.Novgorod. 2003. Vol.1, – P.82–89.
2. Ya.L.Bogomolov, E.S.Semenov & A.D.Yunakovsky, Singular Value Decomposition as a Tool for Solving of Spectral Problems Arisen in Supercollider Simulation // Proc. of Int. Sem. "Day on Diffraction — 2003". S-Pb., Universitas Petropolitana. 2003. – P.22–31.
3. Ya.L.Bogomolov, E.S.Semenov & A.D.Yunakovsky, Method of Discrete Sources for Elliptic Problems Arising in Supercollider Simulation // Нелинейные граничные задачи. Донецк. 2005. T.15. – C.31–40.

О Продолжение 2-мерных матричных алгебр

Болдырева О.А.(Воронеж,boa@vgasu.vrn.ru)

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00630).

В сообщении обсуждаются аффинно-однородные вещественные гиперповерхности в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$. Транзитивное действие аффинной подгруппы на такой поверхности можно связать с матричной алгеброй малой размерности, действующей на комплексном касательном пространстве к поверхности. Дискретные и одномерные алгебры возможны в такой ситуации лишь для квадрик.

Начиная с размерности 2 количество различных подалгебр алгебры $M(2,\mathbb{C})$ становится достаточно большим. Мы рассматриваем один тип двумерных алгебр, а именно алгебры вида $C\begin{pmatrix} 0 & \alpha+i\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}C^{-1}$, где C - произвольная невырожденная матрицы, α,β -вещественные числа. Все матрицы в любой такой алгебре имеют нулевой спектр.

Обсуждаемые поверхности задаем каноническими уравнениями. Аффинное каноническое уравнение жесткой строго псевдо-выпуклой поверхности имеет вид ([1]):

$$v = (|z_1|^2+|z_2|^2)+(\varepsilon_1 z_1^2+\varepsilon_2 z_2^2)+\overline{(\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2)}+\sum_{k\geqslant 3} F_k(z,\bar{z}), \quad \varepsilon_1 \geqslant 0, \varepsilon_2 \geqslant 0. \tag{1}$$

Будем считать выполненным условие общности положения

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot (2\varepsilon_1 - 1) \cdot (2\varepsilon_2 - 1) \neq 0. \tag{2}$$

Теорема. Не существует аффинно-однородных гиперповерхностей общего положения вида (1) в $\mathbb{C}^3$, для которых действие в комплексном касательном пространстве описывается двумерной алгеброй с нулевым спектром.

Доказательство получается за счет изучения системы квадратичных уравнений, соответствующей условиям замкнутости семейства линейных векторных полей на однородной поверхности.

Аналогично можно изучать продолжения других алгебр. В [1] приведены примеры однородных поверхностей, не сводимых к квадрикам, для которых соответствующие алгебры имеют размерности 3 и 4. Условие (2) для этих поверхностей не выполнено.

Литература

[1] Лобода А.В., Ходарев А.С. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства. "Известия ВУЗов. Математика" 2003, N 10. С. 38 - 50.

Об обратимых линейных отношениях в пространстве вектор-функций

В.М.Брук (Саратов, СГТУ; bruk@san.ru)

Пусть $A(t)$ - сильно измеримая на отрезке $[0,b]$ функция, значениями которой являются ограниченные неотрицательные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H , $l[y]$ - регулярное на $[0,b]$ формально самосопряженное дифференциальное выражение порядка $2n$ с ограниченными операторными коэффициентами. Выражение l и функция $A(t)$ порождают в пространстве $B = L_2(H, A(t); 0, b)$ минимальное L_0 и максимальное L_0^* отношения. Введем обозначения: $W_j(t,\lambda)$ - операторное решение уравнения $l[y] = \lambda A(t)$ с начальными условиями $W_j^{[k-1]}(0,\lambda) = \delta_{jk} E$ (δ_{jk} - символ Кронекера, $j,k = 1,\dots,2n$); $W(t,\lambda)$ -

операторная однострочная матрица $(W_1(t,\lambda),\ldots,W_{2n}(t,\lambda))$; J - операторная матрица порядка $2n$, на побочной диагонали которой в первых n строках стоят $-E$, в последних n строках стоят E , остальные элементы равны 0; Q_0 - множество элементов $x \in H^{2n}$, для которых функция $W(t,\lambda)x$ отождествлена с нулем в B , Q - ортогональное дополнение в H^{2n} к Q_0. Пусть Q_- - пространство с негативной нормой, полученное пополнением Q по норме $\|x\|_- = (\int_0^b \left\|A^{1/2}(s)W(S,\lambda)x\right\|^2 ds)^{1/2}$; Q_+ - соответствующее пространство с позитивной нормой; $\widetilde{W}(t,\lambda)$ - расширение $W(t,\lambda)$ на Q_-. Тройка $Q_+ \subset Q \subset Q_-$ не зависит от λ .

Теорема. *Пусть $L(\lambda)$ - такое семейство линейных отношений, что $L_0 - \lambda E \subset L(\lambda) \subset L_0^* - \lambda E$. Если отношение $L^{-1}(\lambda)$ является ограниченным оператором в B , то $L^{-1}(\lambda)$ имеет вид:*

$$L^{-1}(\lambda)f = \int_0^b K(t,s,\lambda)A(s)f(s)ds,$$

где $K(t,s,\lambda) = \tilde{W}(t,\lambda)(M(\lambda) + (1/2)sign(s-t)J)W^*(s,\bar{\lambda})$, $M(\lambda) : Q_+ \to Q_-$ - ограниченный оператор. Семейства $L^{-1}(\lambda)$, $M(\lambda)$ голоморфны или нет одновременно.

О выплате дивидендов страховой компанией

Е.В.Булинская (Москва, МГУ; ebulinsk@mech.math.msu.su)

С момента создания теории коллективного риска в начале XX века в качестве основной характеристики функционирования страховой компании рассматривалась вероятность ее разорения. Современные страховые компании призваны не только выполнять обязательства перед своими клиентами (страхователями), своевременно выплачивая им возмещение понесенного ущерба (или страховые суммы), но и приносить прибыль, из которой, в частности, выплачиваются дивиденды акционерам. В настоящее время исследование проблемы выплаты дивидендов ведется достаточно интенсивно (см., например, [1], [2] и приведенные там ссылки).

После обзора полученных ранее результатов, связанных с выбором стратегии выплаты дивидендов, будут приведены новые результаты автора, касающиеся связи между инвестиционной политикой (см. также [3], [4]), перестрахованием и выплатой дивидендов.

Литература 1. Dickson D., Waters H. Some optimal dividends problem// ASTIN Bulletin. 2004. V.34, No 1. – P.49-74. 2. Gerber H.U., Shiu E.S.W. Optimal dividends analysis with Brownian motion// North American Journal. 2004. V.8. – P.1-20. 3. Bulinskaya E.V. Multistep investment policy of imsurance company// Transactions of XXIV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. September 10-17, 2004, Jourmala, Latvia. – P.193-200. 4. Bulinskaya E.V. Investment policy of imsurance company under incomplete information// Transactions of XXV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models. Maiori/Salerno, Italy, September 20-24, 2005. – P.71-78.

Максимальная регулярность решения уравнения с неплотно определенным оператором

В.В.Васильев, Е.В.Фролова, Л.В.Хливненко

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad u(0) = x. \tag{1}$$

Здесь $u(t)$- искомая, а $f(t)$- заданная функции, определенные на отрезке и действующие в E, $x \in E$.

Относительно оператора A предполагается, что резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ действует в множество $D(A)$, которое не является плотным во всем пространстве E, определена в некоторой правой полуплоскости $Re\lambda \geqslant \omega$, где предполагается выполненной оценка

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda| + 1}. \tag{2}$$

Теорема. Пусть непрерывная функция $f(t)$ такова, что $f(t) \in C_0^{\alpha}([0,T]; E)$, т.е.

$$\|f(t)\|_{C_0^{\alpha}} := \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|f(t)\| + \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant T} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{(t-s)^{\alpha}} s^{\alpha} \tag{3}$$

конечна и выполнено условие согласования $Ax + f(0) \in \overline{D(A)}$. Тогда неоднородная задача Коши (1) имеет классическое решение $u(t)$, обладающее свойством максимальной регулярности, т.е.

$$Au(t), u'(t) \in C_0^{\alpha}([0,T]; E). \tag{4}$$

В случае плотной области определения $D(A)$ (когда A является производящим оператором аналитической полугруппы) вопрос о максимальной регулярности решения задачи (1) рассматривался многими авторами. В [1] приведены наиболее общий результат в этом направлении и библиография, см. также [2].

Задачи вида (1) с неплотно определенными операторами и вопросы, связанные с максимальной регулярностью в других пространствах, также изучались ранее - см. [3], [4].

Литература 1. Emel'yanova E., Vasil'ev V. The coercive solvability of abstract parabolic equations in Banach spaces // Clement, Philippe (ed.) et al., Evolution equations, control theory, and biomathematics. 3rd international workshop-conference, held at the Han-sur-Lesse Conference Center of the Belgian Ministry of Education. Proceedings. Basel: Dekker, Lect. Notes Pure Appl. Math. 155, p. 167-171 (1993). 2. Васильев В.В. Полугруппы операторов и косинус оператор-функции // Воронеж.- Из-во Воронеж ун-та.- 2005.- 272 с. 3. Da Prato G., Sinestrari E. Differential operators with nondence domain // Ann. Scuola norm. super. Pisa Sci. fis e mat.- 1987.- 14, 2.- p. 285-344. 4. Sinestrari E. On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions // J. Math. Anal. & Appl.- 1985.- 107.- 1.- p. 16-66.

Максимальная регулярность задачи Коши с неплотно заданным оператором

Васильев В.В., Хливненко Л.В., Шаталина М.А.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad u(0) = x \tag{1}$$

в банаховом пространстве E. Здесь $f(t)$ - заданная , а $u(t)$ - искомая функции, определенные на отрезке $[0, T]$, действующия в E.

Говорят, что решение задачи (1) (или сама задача) обладает свойством максимальной регулярности в паре пространств $F \times E_1$, если для любых $f \in F$ и $x \in E_1$ существует единственное решение задачи (1), для которого и $Au(t)$ и $\frac{du(t)}{dt}$ принадлежат тому же пространству F.

В предположении плотности области определения оператора A максимальная регулярность (1) изучалась многими авторами - см., напр. [1] и имеющуюся там библиографию.

Справедлива

Теорема. Пусть оператор A имеет в некоторой полуплоскости $Re\lambda > \omega$ резольвенту, которая удовлетворяет оценке $\|(\lambda^{\delta}I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{(Re\lambda)^{\delta}}$ с некоторым $\delta \in (1, 2]$. Тогда задача (1) обладает свойством максимальной регулярности в пространстве с нормой

$$\|f(t)\|_{C_0^{\alpha}} := \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|f(t)\| + \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant T} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{(t-s)^{\alpha}} s^{\alpha}. \quad (2)$$

Для случая, когда $D(A)$ плотно в E, в [2] (см. также [3]) было показано, что условие, приведенное в теореме, гарантирует, что A порождает аналитическую полугруппу.

Относительно максимальной регулярности задачи (1) см. [3] и имеющуюся там библиографию.

Задача (1) с операторами, имеющими неплотную область определения, рассматривались ранее в [4].

Литература. 1. Костин В.А. К задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Сб. Дифф. ур-я в частных производных .- Новосибирск.- 1989.- 93.- с. 93-116. 2. Васильев В.В. Полугруппы операторов и косинус оператор-функции // Воронеж.- Из-во Воронеж ун-та.- 2005.- 272 с. 3. Emel'yanova E.V., Vasil'ev V.V. The coercive solvability of abstract parabolic equations in Banach spaces // Clement, Philippe (ed.) et al., Evolution equations, control theory, and biomathematics. 3rd international workshop-conference, held at the Han-sur-Lesse Conference Center of the Belgian Ministry of Education. Proceedings. Basel: Dekker, Lect. Notes Pure Appl. Math. 155, p. 167-171 (1993). 4. Sinestrari E. On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions // J. Math. Anal. & Appl.- 1985.- 107.- 1.- p. 16-66.

Вероятностные решения специального класса эволюционных интегро-дифференциальных уравнений

Вирченко Ю.П., Карабутова Т.В.

(Белгород,БелГУ;virch@bsu.edu.ru,Tkarabutova@bsu.edu.ru)

Изучается задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{f} = \mathsf{K}f - (\mu + (\bar{K}, f))f \quad (1)$$

решения которых $f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$ принадлежат $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ при каждом фиксированном t и непрерывно-дифференцируемы по t. Здесь обозначено

$$(\mathsf{K}f)(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y;t)f(y;t)dy\,,$$

$$(\bar{K},f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(y;t)f(y;t)dy\,,$$

где предполагается, что функции μ, $\bar{K}$, определенные на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ и K, определенная на $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$, непрерывны по $t\in\mathbb{R}_+$ и измеримы на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$, соответственно.

Рассматривается случай, когда функции μ, $\bar{K}$, K неотрицательны и изучается возможность существования неотрицательных решений f уравнения (1).

Теорема 1. Если

$$\sup_x \mu(x;t) \leqslant \mu < \infty\,,$$

$$\sup_x \bar{K}(x;t) \leqslant \bar{K}(t) < \infty\,,$$

$$\sup_y \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y;t)dx \leqslant K < \infty\,,$$

то задача Коши для уравнения (1) разрешима при любом $f(x,0) \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ и, если $f(x,0) \geqslant 0$, то $f(x,t) \geqslant 0$.

Решение уравнения типа (1) назовем вероятностным, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;t)dx = 1\,,$$

т.е. если функция $f(x,t)$ может рассматриваться как плотность распределения некоторой случайной величины. В условиях теоремы 1 справедлива

Теорема 2. Функция $g(x;t) = G(t)f(x;t)$, где $f(x;t)$ удовлетворяет (1), является вероятностным решением уравнения

$$\dot{g} = \mathsf{K}g - g(\mu + (1,\mathsf{K}g) - (\mu,g)) \tag{2}$$

где

$$\dot{G}(t) = (F[(1,\mathsf{K}f) - (\mu,f)])(t)\,,\quad G(0) = 1$$

и

$$F(t) = \exp\left(\int_0^t (\bar{K}, f)(s)ds\right) .$$

Уравнение (2) определяет плотность распределения вероятностей $g = n/N$ по типам частиц для марковских ветвящихся случайных процессов [1], у которых множество типов составляет измеримое подмножество из $\mathbb{R}$. При этом $n(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\dot{n} = \mathsf{K}n - \mu n$$

и

$$\dot{N}(t) = (1, \mathsf{K}n) - (\mu, n) ,$$

$N(t)$ – полное число частиц в момент времени t.

Литература 1. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. Москва, Наука. 1971.– 436с.

Форма Кириллова как дифференцил рациональной 1-формы.

А.С. Воронцов (Москва, МГУ; GrafVk@yandex.ru)

На орбитах коприсоединенного представления можно ввести естественную симплектическую структуру. Эта структура может быть получена как ограничение на орбиты скобки Пуассона, определенной для функций на коалгебре $\mathfrak{G}^*$ формулой

$$f, g(x) =< x, [df_x, dg_x] >$$

Здесь двойственное пространство к $\mathfrak{G}^*$ отождествлено с алгеброй Ли, так что $df, dg \in \mathfrak{G}$, квадратные скобки обозначают коммутатор в алгебре Ли, а треугольные — спаривание элементов алгебры и коалгебры. Форму ω называют формой Кириллова.

Определенная таким образом 2-форма, вообще говоря, не является точной. С. Т. Садэтов доказал, что эта форма всегда является дифференциалом некоторой рациональной 1-формы.

Для доказательства используется следующая конструкция. Рассматривается действие группы G на кокасательном расслоении T^*G левыми и правыми сдвигами. Эти действия являются Пуассоновым, а значит можно определить отображения момента:

$$\mu_l, \mu_r : T^*G \to \mathfrak{G}^*.$$

На T^*G есть естественная симплектическая структура ω_0, которая получается как дифференциал некоторой 1-формы α_0. Можно показать, что образ формы Кириллова $(\mu_l)^*\omega$ совпадает с ω_0.

Идея доказательства в том, чтобы построить обратное отображение $f = (\mu_l)^{-1}$, возможно имеющее особенности, и затем рассмотреть на орбите коприсоединенного представления форму $f^*\alpha_0$. Тогда

$$d(f^*\alpha_0) = f^*(d\alpha_0) = f^*(\omega_0) = \omega.$$

Садэтов доказывает существование рационального обратного отображения, используя достаточно сложные конструкции алгебраической геометрии. Затем прообраз 1-формы α_0 усредняется по ветвям этого отображения над орбитой точки x.

Для многих групп Ли можно выбрать на орбите коприсоединенного представления такую систему координат (возможно, с особенностями), в которой удается записать отображение, обратное отображению момента левого сдвига. В этом случае форма α может быть построенна явно.

О существовании решения одного дифференциального уравнения второго порядка на группе диффеоморфизмов.

А.Ю. Гликлих
(Воронеж, ВГУ; AGliklikh@gmail.com)

Пусть M компактное конечномерное риманово многообразие без края размерности n, которое изометрично вложено в R^k, $D^s_\mu(M)$ – группа H^s диффеоморфизмов M, сохраняющих риманов объем, $s > \frac{n}{2} + 1$, μ – риманова форма объема. На $D^s_\mu(M)$ мы будем использовать две римановы метрики: слабую (т. е. L_2) и сильную (т. е. H^s, см., например [1], [2]). Обозначим через ρ_0 риманово расстояние относительно слабой метрики, а через ρ риманово расстояние относительно сильной метрики.

Обозначим $\frac{D}{dt}$ ковариантную производную связности Леви-Чивита слабой римановой метрики. Пусть F непрерывное векторное поле на $D^s_\mu(M)$. Тогда уравнение

$$\frac{D}{dt}\dot{\eta}(t) = F(\eta) \tag{1}$$

описывает движение идеальной несжимаемой жидкости по M под действием внешней силы F. Так как F непрерывно, то на бесконечномерном многообразии $D^s_\mu(M)$ задача Коши для (1) может не иметь решения.

Введем векторные поля $A(\eta) = X_\eta f(\eta)$, где X – непрерывное правоинвариантное векторное поле, а f – липшицевая относительно расстояния ρ числовая функция на $D^s_\mu(M)$ с константой $q < 1$, и $B(\eta)$, которое при каждом η принадлежит классу H^{s+1}, непрерывно на $D^s_\mu(M)$ в топологии H^s и равномерно ограничено в сильной метрике H^{s+1}. Например в качестве $f(\eta)$ можно выбрать $q\rho(e,\eta)$ или $q\rho_0(e,\eta)$ для $0 < q < 1$.

Теорема. *Пусть $F = A + B$. Тогда задача Коши для уравнения (1) имеет локальное классическое решение при любом начальном условии.*

Исследование поддержано грантом РФФИ N 05-01-00100.

Литература.

1 Эбин Д.Дж., Марсден Дж. Группы диффеоморфизмов и движение несжимаемой жидкости// Математика (сб. переводов), 1973. Т.17, N 5.- С.142-167; N 6.- С. 111-146.
2 Гликлих А.Ю. Уплотняемость правоинвариантных векторных полей на группах диффеоморфизмов. // Вестник ВГУ, Серия физика, математика.- 2001.- N 2.- С. 67-73.

Алгоритм нормализации и динамика нормальной формы одного класса отображений

С.Д. Глызин
(Ярославль, ЯрГУ; glyzin@uniyar.ac.ru)

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial u_j}{\partial t} + \varepsilon^2 u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad j = 1,2,3\,, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial x}\right|_{x=1} = 0,\ u_j|_{x=0} + \varphi\left(K\left(u_j|_{x=1} + \alpha u_{j-1}|_{x=0}\right)\right) = 0,\ u_0 = u_3\,, \tag{2}$$

описывающую взаимодействие трех связанных $RCLG$-автогенераторов (см. [1]). Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ и $0 < \alpha \ll 1$ – малые параметры, $\varphi(z)$ – характеристика нелинейного элемента, которую ниже будем считать равной $z(1+z^2)^{-1/2}$.

При некоторых дополнительных ограничениях замена

$$u_j = e^{-\varepsilon t}\left(h_j\left(t + (x-1)\right) + h_j\left(t - (x-1)\right)\right) \tag{3}$$

приводит краевую задачу (1)-(2) к отображению

$$\begin{cases} v_j(t+1) = w_j(t) \\ w_j(t+1) = -(1-\mu)v_j(t) - \varphi(Kw_j(t)) + \nu\varphi'(Kw_j(t))\varphi(Kw_{j-1}(t)), \end{cases} \tag{4}$$

где $j = 1,2,3,\ v_0 = v_3,\ w_0 = w_3,\ \mu = 1 - \exp(-2\varepsilon),\ \nu = \alpha K$, величина $2K\exp(-\varepsilon)$ снова обозначена K, а функции $h_j(t)$ связаны с $v_j(t)$ и $w_j(t)$ следующими соотношениями: $w_j(t) = h_j(t)\exp(1-\varepsilon t),\ v_j(t) = w_j(t-1)$. Обозначим $v(t)$ шестимерный вектор вида $(v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3)^T$.

Матрица линейной части системы (4) имеет при $0 < K < 2$ три пары собственных чисел $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\omega_0)$, где $\omega_0 = \arccos\left(-\frac{K}{2}\right)$ кратности три, которые лежат на единичной окружности комплексной плоскости. Учитывая, что этим собственным числам соответствует столько собственных векторов какова их кратность, можно утверждать, что в окрестности нулевой неподвижной точки имеется 6-мерное экспоненциально устойчивое локальное инвариантное многообразие (см. [2]). Для построения многообразия и отображения на нем в (4) выполним замену

$$v(t) = \sqrt{\varepsilon}v_0(t,s) + \varepsilon v_1(t,s) + \varepsilon^{3/2}v_2(t,s) + \varepsilon^2 v_3(t,s) + \varepsilon^{5/2}v_4(t,s) + \ldots, \tag{5}$$

где $\quad v_0(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{3}\left(\xi_k(s)\exp(i\omega_k t)a_k + \bar{\xi}_k(s)\exp(-i\omega_k t)\bar{a}_k\right),\ \ s = \varepsilon t.$

В последнем соотношении a_j $(j = 1,2,3)$ – линейно независимые собственные вектора матрицы линейной части (4), соответствующие собственному числу $\exp(i\omega_0)$. Приравнивая коэффициенты при степенях $\sqrt{\varepsilon}$, из условий разрешимости задачи для $v_2(t,s)$ получим систему

$$\begin{gathered} \dot{\xi}_1 = -\xi_1/2 - i(\gamma\xi_3 + |\,\xi_1\,|^2\,\xi_1),\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2/2 - i(\gamma\xi_1 + |\,\xi_2\,|^2\,\xi_2), \\ \dot{\xi}_3 = -\xi_3/2 - i(\gamma\xi_2 + |\,\xi_3\,|^2\,\xi_3), \end{gathered} \tag{6}$$

где γ — константа, определяемая из системы (4). Перейдем в (6) к полярным координатам $\xi_j = \rho_j\exp(i\varphi_j),\ j = 1,2,3$ и обозначим $\alpha_1 = \varphi_3 - \varphi_1$, а $\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, тогда система (6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\dot{\rho}_1 = -\rho_1/2 + \gamma\rho_3\sin\alpha_1,\ \dot{\rho}_2 = -\rho_2/2 + \gamma\rho_1\sin\alpha_2, \\ &\dot{\rho}_3 = -\rho_3/2 + \gamma\rho_2\sin(\alpha_1+\alpha_2), \\ &\dot{\alpha}_1 = \gamma\big((\rho_3/\rho_1)\cos\alpha_1 - (\rho_2/\rho_3)\cos(\alpha_1+\alpha_2)\big) + \rho_1^2 - \rho_3^2, \\ &\dot{\alpha}_2 = \gamma\big((\rho_1/\rho_2)\cos\alpha_2 - (\rho_3/\rho_1)\cos\alpha_1\big) + \rho_2^2 - \rho_1^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Принимая во внимание развитую в [2] общую теорию, можно показать, что грубым режимам системы (7) соответствуют решения системы (4) с асимптотикой (5) той же устойчивости. Тем самым, возникает задача качественного анализа системы (7). Применение численных методов позволяет показать существование у (7) сложной динамики, вместе с тем нетрудно видеть, что при $\gamma > 1/\sqrt{3}$ она имеет инвариантную прямую $\alpha_1 = \alpha_1 = 2\pi/3,\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, решения вдоль которой стремятся к бесконечности. Наличие направления, по которому решение может уходить из области применимости асимптотических методов, требует вычисления следующего по порядку малости коэффициента в разложении (5) и анализа соответствующей нормальной формы.

Литература.

1. Колесов А. Ю, Розов Н. Х. Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153 – 207.
2. Мищенко Е.Ф., Колесов А.Ю. Асимптотическая теория релаксационных колебаний // Труды математического ин-та АН СССР. 1991. Т. 197. С. 3-89.

Символы общих B-гиперсингулярных интегралов

Е. Г. Гоц, Э. Л. Шишкина
(Воронеж, ВГТА; kate.gots@gmail.com, ShishkinaEl@mail.ru)

Через $\mathbb{R}_N^+$ будем обозначать часть евклидова пространства $\mathbb{R}_N$ точек $\{x{=}(x', x''),\ x'{=}(x_1, ..., x_n)\,, x'' = (x_{n+1}, ..., x_N),\ x_1 > 0, ..., x_n > 0\}$. Обозначим через L_1^γ класс функций, состоящий из всех измеримых на $\mathbb{R}_N^+$ функций f для которых конечна норма $\|f\|_{L_1^\gamma} = \int |f(x)|(x')^\gamma dx,\ \ (x')^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Часть сферы единичного радиуса, с центром в начале координат, принадлежащую $\mathbb{R}_N^+$, обозначим S_N^+.

Общие B-гиперсингулярные интегралы с постоянной характеристикой имеют вид

$$\left(\mathbf{D}_\alpha^\gamma \varphi\right)(x) = \frac{1}{d_{N,\gamma,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \frac{(\boxdot_t^l f)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}}\ (t')^\gamma\, dt \tag{1}$$

Здесь $d_{N,\gamma,l}(\alpha)$ нормирующая константа, $(\boxdot_t^l f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k T_x^{kt} f(x)$, где T_x^{kt} – смешанный обобщенный сдвиг (см. [1]). Регуляризация расходящегося интеграла в правой части (1) достигается применением смешанных о.к. разностей центрированного или нецентрированного видов (см. [1]). Символ оператора $\mathbf{D}_\alpha^\gamma$ равен $\mathfrak{D}_\alpha^\gamma(\xi) = |\xi|^\alpha$.

Рассмотрим *общие B-гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой* вида

$$\left(\mathbf{D}_{\alpha,\Omega}^\gamma f\right)(x) = \frac{1}{d_{N,l,\gamma}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}_N^+} \frac{(\boxdot_t^l f)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} \Omega\left(\frac{t}{|t|}\right) (t')^\gamma \, dt,$$

Пусть $\Omega(t/|t|) \in L_1^\gamma$, тогда для символа оператора $\mathbf{D}_{\alpha,\Omega}^\gamma$ будет справедливо представление

$$\mathfrak{D}_{\alpha,\Omega}^\gamma(\xi) = \mathbf{h}_{N,n,\gamma}(\alpha) \int\limits_{S_N^+} \Omega(\sigma) \mathcal{P}_{\xi'}^\gamma [(i\langle\sigma,\xi\rangle)^\alpha](\sigma')^\gamma \, dS,$$

где $\mathbf{h}_{N,n,\gamma}(\alpha)$ – некоторая константа, $\mathcal{P}_{\xi'}^\gamma$ – оператор Пуассона (см. [1]).

Литература. 1. Гоц Е.Г., Ляхов Л.Н. Обобщенные разности и общие гиперсингулярные интегралы // ДАН, 2005. том 405, №4, с. 1-4.

Математические приложения одного обобщения биноминальной теоремы

Е.В.Дикарева, С.М.Ситник

(Воронеж, ВИ МВД России, mathsms@yandex.ru)

В работе [1] предложен новый подход к решению "плохих" дифференциальных уравнений с негладкими данными следующего вида:

$$dy_t = \sum_k f_k(y_t)\, dx_t^k, \tag{1}$$

где f_k — заданные векторные поля, t_k — управляющие члены, y_t — результирующая траектория. Проблема состоит в том, что если в соответствии со стандартным подходом рассматривать время как параметр и решать данное уравнение как однородное, то, как правило, решение не будет непрерывным, оно может существовать лишь как распределение. В этом случае классическая теория не предлагает методов для определения решения; более того, даже для гладких, но сильно осциллирующих задач не существуют эффективные алгоритмы для численного отыскания решений. Вместе с тем указанная задача возникает во многих разделах математики: теории управления, радиотехнических задачах с шумом, теории алгебр Ли, теории вероятностей (многомерные броуновские траектории, полумартингалы, случайные процессы). Более подробное описание приложений см. в [1].

Развивая существующие ранее методы, нами предложен удачный выбор функциональных пространств для решений, включающих норму с p- вариацией. В таких пространствах удалось в рамках не стохастического, а детерминистского подхода построить решение и эффективные численные методы для его нахождения. При этом были усилены некоторые результаты: рассмотрены броуновские пути с плохими траекториями и расширены области применений формулы многомерной замены переменных и метода последовательных приближений решения итерированными интегралами.

Литература. 1. Lyons T. Differential equations driven by rough signals// Revista Matematica Iberoamericana. 1998. V.14, №2.— P. 215–310.

Генераторы симметрии для стохастических дифференциальных уравнений

В.Н.Думачев (Воронеж, ВИ МВД России)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений как подмногообразие Σ в расслоении джетов $J^n(\pi)$: $E \to M$, определяемое уравнениями

$$F\left(x, w, p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02}\right) = 0,$$

где $x, w \in M \subset R$, $u = p_0 \in U \subset R$, $p_i \in J^i(\pi) \subset R^n$, $E = M \times U$. В работе рассматривается аксиоматический подход к исследованию геометрии стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Как и любое дифференциальное уравнение оно описывает струю в пространстве джетов $J^1(2,1)$, с локальными координатами $(x, w, u, u_t, u_w, u_{ww})$, где расширение расслоения до вторых производных (u_{ww}) является следствием корреляционых соотношений для средних Винеровского процесса $< dw >= 0$, $< dw^2 >=< dx >$. Последние соотношения позволяют ввести распределение Картана для СДУ в виде

$$\theta = du - (u_x + u_{ww}/2)\, dx - u_w dw.$$

Несмотря на особенности, переплетающие независимые переменные, данное распределение $J^k(\pi)$допускает существование полей Ли и их поднятие в $J^{k+1}(\pi)$. Для этого рассмотрим однопараметрическую группу преобразований, действующую в пространстве детерминированной и стохастической независимых переменных и одной зависимой переменной. Инфинитезимальный оператор группы $\mathbf{G}$ есть $X = \xi^x \partial_x + \xi^w \partial_w + \eta \partial_u$, а первое продолжение группы $\mathbf{G}$: $\underset{1}{X} = X + \zeta^x \partial_{u_x} + \zeta^w \partial_{u_w}$, найдем приравнивая нулю производную Ли распределения Картана по векторному полю $\underset{1}{X}$: $L_X \theta = X \rfloor d\theta + dX \rfloor \theta = 0$. Откуда получим

$$
\begin{aligned}
&\zeta^x = (\eta_x + \eta_{ww}/2 + u_x \eta_u) - (u_x + u_{ww}/2)\,(\xi^x_x + \xi^x_{ww}/2 + u_x \xi^x_u)\\
&-u_w\,(\xi^w_x + \xi^w_{ww}/2 + u_x \xi^w_u)\\
&\zeta^w = (\eta_w + u_w \eta_u) - (u_x + u_{ww}/2)\,(\xi^x_x + u_w \xi^x_u) - u_w\,(\xi^w_w + u_w \xi^w_u)
\end{aligned}
$$

Другими словами, инфинитезимальный сдвиг вдоль векторного поля X оставляет инвариантной форму Картана, т.е. производная Ли формы Картана по векторному полю X есть ноль. Последнее обстоятельство позволяет использовать стандартные алгоритмы построения инвариантов СДУ для нахождения частных решений, а также находить классы уравнений инвариантных относительно выделенных групп инфинитезимальных преобразований.

Фракталы в двумерных реккурентных схемах

В.Н.Думачев, В.А.Родин (Воронеж, ВГУ)

На базе простейшего интеррационного уравнения Ферхьюльста-Пирла изучается двупараметрическая модель совместного существования популяций

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = \alpha\, x_n\,(1 - x_n)\\
x_{n+1} = \beta\, y_{n+1}\,(1 - y_{n+1})
\end{cases}
$$

Аналоги фракталов Жулиа на границе зон динамических режимов.

Построение диаграмм Ламерея в виде двух ортогональных парабол позволило привлечь соображения симметрии для получения новых результатов. Определены области изменения управляющих параметров, гарантирующие реализацию определенной эволюционной ситуации: зоны устойчивых решений, зоны появления бифуркации и циклов, зона хаоса и неопределенности. Увеличение определенных частей рисунка позволяет обнаружить известные явления: слоистые аттракторы с дробной величиной Хаусдорфовой размеренности, бесконечное число уменьшающихся в размере окон периодических режимов, образующие в сечениях итерации аналогов ковра Серпинского. Показано, что в данной модели, наряду с классическим переходом к хаосу через субгармонический каскад, существует еще один путь, связанный с процессами переброса итерационной последовательности между аттракторами.

ОБРАТНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ КРИВАЯ В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Н.Думачев, С.А.Телкова (Воронеж, ВИ МВД России)

В работе рассматривается возможность расширения обратной параболической кривой из R^2 в $C \otimes C$ и построения на ней криптосистемы. Пусть K- некоторое поле, а $f_1, ..., f_s$ множество полиномов в $K[x_1, ..., x_n]$. Аффинным многообразием, индуцированным корнями полиномов f_i называется

$$V(f_1, ..., f_s) = \{(a_1, ..., a_n) \in K^n : f_i(a_1, ..., a_n) = 0 \quad \forall \quad 1 \leqslant i \leqslant s\}.$$

Классические методы проективной геометрии реализуют кривую как $V = U \cap W$, однако наличие точек ветвления не позволяет параметризовать полученное отображение, и как следствие представить его в виде пересечения аффинных многообразий.

Комплексное расширение вещественной плоскости $x \in R \to x = x' + ix'' \in C$ индуцирует комплексное расширение афинного многообразия $V \in C \otimes C$. Поскольку 4-мерное пространство невозможно наглядно спроецировать на плоскость $R \otimes R$ в настоящей работе рассматриваются ее проекция: $\pi : C \otimes C \to C \otimes R(x, y' = Re(y), y'' = Im(y))$.

Новые интегрируемые случаи на классических алгебрах Ли

М.М.Жданова (Москва, МГУ; Zhdanova_MM@ru.ru)

Рассматриваются полиномы $f : \mathcal{G}^* \to \mathbb{R}$ на двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathcal{G}$. Множество таких полиномов со стандартной скобкой Пуассона $\{;\}$ образует алгебру Ли называемую алгеброй Ли-Пуассона [1]. Коммутативный набор полиномов $f_1, f_2, \ldots f_k$ называется полным, если $k = \frac{1}{2}(dim\ \mathcal{G} + ind\ \mathcal{G})$. Существование полного коммутативного набора полиномов означает полную интегрируемость.

Согласно доказанной С.Т.Садэтовым [3] гипотезе Мищенко-Фоменко [2], на двойственном пространстве к любой конечномерной вещественной алгебре Ли существует полный коммутативный набор полиномов. Более наглядное и геометрическое доказательство теоремы С.Т.Садэтова получено А.В.Болсиновым в [1]. В докладе будут построены наборы полиномов для классических алгебр Ли вида полупрямой суммы $su(n) + \mathbb{C}^n$, $sp(n) + \mathbb{R}^{2n}$. Также будет произведено сравнение полученных наборов с уже известными.

Литература. 1. Болсинов А.В. Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко. Труды семинара по вект.и тенз.анализу.Вып.26. М.: МГУ. 2005. 87-109. 2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных алгебрах Ли. Известия АН СССР, сер.матем, 1978. **42**. №2. 396-415. 3. Садэтов С.Т. Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко. Доклады РАН. 2004. **397**. №6. 751-754.

О некоторых вопросах спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах

А.С. Загорский (Воронеж, ВГУ; zagorskii@mail.ru)

В большинстве известных монографий, в которых подробно излагается, либо существенно используется спектральная теория линейных операторов в банаховых пространствах, их авторы, как правило, предполагают, что эти пространства являются комплексными, либо указывают на возможность комплексификации вещественного банахова пространства. Тем не менее при построении спектральной теории линейных операторов в вещественных банаховых пространствах иногда необходимо подробно отслеживать переход в комплексификацию пространства и обратный переход.

Пусть $X-$ вещественное банахово пространство, $\mathbb{X}-$ его комплексификация, $A-$ линейное отношение на X, т.е. $A-$ линейное подпространство из $X \times X$. Его комплексификацией называется линейное отношение на $\mathbb{X}$ вида $\mathbb{A} = \{(x_1+ix_2, y_1+iy_2) \in \mathbb{X}^2 : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A\}$. Комплексным спектром $\sigma(\mathbb{A}, \mathbb{C})$ отношения A называется спектр отношения $\mathbb{A}$ (определение см. в [1]). Вводится понятие комплексной резольвенты отношения A как функции $R_{\mathbb{C}}(\cdot, \cdot, A) : \mathbb{C} \times \rho(A, \mathbb{C}) \to L(X)$, комплексификацией которой является резольвента $R(\cdot, A)$ отношения $\mathbb{A}$. С помощью комплексной резольвенты строится функциональное исчисление для A. Получена спектральная теорема. Кроме того, если $A-$ секториальное линейное отношение (определение см. в [1]), то получена формула для полугруппы операторов, действующих в X, генератором которой является A.

Литература. 1. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сб., 2002. Т. 193, № 11.

Групповой анализ: история и современное состояние

В.Ф. Зайцев (Санкт-Петербург, РГПУ им. А.И.Герцена; valentin_zaitsev@mail.ru)

Групповой анализ возник в конце XIX века в трудах С.Ли как геометрический подход к дифференциальным уравнениям, позволяющий описать с единых позиций все известные к тому времени типы уравнений, общие решения которых можно записать в виде явной замкнутой аналитической формулы. Однако фундаментальные результаты Ли были в то время практически не востребованы.

Ситуация начала коренным образом меняться с середины XX века, когда Л.В.Овсянников применил групповой анализ к поиску физически значимых решений нелинейных уравнений математической физики. Оказалось, что инвариантные решения (волновые, автомодельные и др.) удовлетворяют уравнениям ме́ньшей размерности, в частности, обыкновенным дифференциальным. Так получается, например, известное уравнение пограничного слоя степенной жидкости $y''' = y(y'')^{2-n}$. Однако для подобных уравнений потребовалась разработка новых симметрийных методов, так как с помощью обычных (точечных и касательных) преобразований проинтегрировать их не удавалось.

В настоящий момент развитие группового анализа идет одновременно по нескольким направлениям: применение нелокальных операторов, решение обратных задач и разработка алгоритмов, использующих фундаментальные симметрии. При этом различные направления не являются изолированными – так, решение обратной задачи для нелокального оператора привело к прямому обобщению классического уравнения Ермакова – уравнению $y'' = f(x)y + g'(x)y^{-1} - g^2(x)y^{-3}$, не имеющему в общем случае ни одной точечной симметрии. Доказанные теоремы о факторизации позволяют найти аналоги уравнения Ермакова высших порядков и описать все возможные способы понижения порядка уравнений, в том числе и непрогнозируемые классической теорией Ли.

Значение современного группового анализа не ограничивается поиском новых классов интегрируемых уравнений. Решения обратных задач дают описание классов дифференциальных уравнений с заданными априорными свойствами – по существу, потенциальных моделей, востребованных в самых разнообразных приложениях. Наконец, алгоритмы поиска фундаментальных симметрий позволят описать **все** симметрии заданного уравнения, независимо от форм допускаемых им операторов.

Абстрактная стохастическая задача Коши с генератором полугруппы класса (1,A)

С.В. Здобнова (Магнитогорск, МГТУ; SVSdobnova@mail.ru)

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с заданной на нем фильтрацией $\{\mathcal{F}_t |\ t \geq 0\}$, U, H — сепарабельные гильбертовы пространства. Рассматриваем стохастическую неоднородную задачу Коши:

$$\mathbf{dX(t) = AX(t)dt + BdW(t),\ t > 0,\ X(0)} = \xi,$$

где $A : D(A) \subset H \to H$ — замкнутый линейный оператор, $B \in L(U \to H)$, $\{W(t)|\ t \geq 0\}$ — U-значный, Q-винеровский процесс относительно фильтрации, ξ — H-значная, $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина.

Задача понимается как формальная запись интегрального уравнения $X(t) = \xi + \int_0^t AX(s)\ ds + BW(t)$, где $t \geq 0$.

Определение. *Слабым решением задачи* называется H-значный предсказуемый процесс $\{X(t)|\ t \geq 0\}$ с интегрируемыми $P_{\text{п.н.}}$ траекториями: $\int_0^T \|X(s)\|_H ds < \infty$ $P_{\text{п.н.}}$; для любого $y \in D(A^*)$ потраекторно удовлетворяющий уравнению $\langle X(t), y\rangle = \langle \xi, y\rangle + \int_0^t \langle X(s), A^* y\rangle\ ds + \langle BW(t), y\rangle$ $t \geq 0$ $P_{\text{п.н}}$.

Сильно непрерывные при $t > 0$ полугруппы $\{S(t)|\ t \geq 0\}$ класса $(1, A)$ при $t \to 0+$ обладают сходимостью типа (A): $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot S(t)h\ dt = h$ для $h \in H$, при том, что $\int_0^1 \|S(t)\|\ dt < \infty$.

Определение. Пусть $\{S(t)|\ t \geq 0\}$ — полугруппа ограниченных операторов в H класса $(1, A)$ и $\int_0^T \|S(r)B\|^2_{GS^0} dr < \infty$, где $\|S(r)B\|^2_{GS^0} = \sum_{j=1}^\infty \|S(r)BQ^{\frac{1}{2}} e_j\|^2$, $\{e_j\}$— ортонормированный базис в U, $j \in \mathbb{N}$, тогда процесс $W_A = \{W_A(t) = \int_0^t S(t-s)B\ dW(s)|\ t \geq 0\}$ назовем *стохастической сверткой.*

Утверждение. *Пусть оператор A — генератор полугруппы $\{S(t)|\ t \geq 0\}$ класса $(1, A)$ операторов в H и $\int_0^T \|S(r)B\|^2_{GS^0} dr < \infty$. Тогда единственным слабым решением задачи является случайный процесс $\{X(t)|\ t \geq 0\}$, такой что $X(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)B\ dW(s),\ t \geq 0$.*

Литература. 1.Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Pisa-Warsaw, 1992.(Encycl. Math. and Appl. 44)
2. Melnikova I., Filinkov A., Anufrieva U. Abstract Stochastic Equations. I. Classical and Distributional Solutions. //Journal of Mathematical Sciences. 2002. Vol.111. N.2. P.3430–3475.

Управления одной динамической системой

С.П.Зубова, Е.В.Раецкая (Воронеж, ВГУ; Ворнеж, ВГЛТА; raetskaya@inbox.ru)

Рассматривается линейная динамическая система с возможностью управления на входе и выходе.

Требуется найти такое начальное состояние системы и управление, чтобы получить на выходе в любой момент времени заданную величину.

Пусть $x(t)$ - функция состояния системы, $f(t)$ - входная функция (заданная), $F(t)$ - выходная функция (заданная), $u(t)$ - управляющая функция. Динамическая система описывается уравнениями:

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + D_1 u(t) + f(t),$$

$$Ax(t) = D_2 u(t) + F(t),$$

где $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ D_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n,\ A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ D_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m,$
$f(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,\ +\infty].$

Требуется найти $x(0)$ и $u(t)$, при реализации которых $x(t)$ является решением этой системы.

Строится подпространство в $\mathbb{R}^n$, принадлежность $x(0)$ которому является необходимым и достаточным условием разрешимости этой задачи. В зависимости от свойств операторов B, D_1, A, D_2 каждому $x(0)$ соответствует единственное или неединственное $x(t)$, и далее по $x(t)$ строится $u(t)$ (управление с обратной связью).

Литература 1.Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М. : Наука, 1976. – 424 с. 2. Раецкая Е.В. Полная условная управляемость и полная наблюдаемость линейных систем: диссерт. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2004. – 149 с.

Параметрическое управление решениями эволюционной задачи в окрестности неустойчивого стационарного режима

М.Б. Ивирсин (Новосибирск, НГУ; imb@gorodok.net)

В данной работе рассматривается система обыкновенных уравнений

$$u_t = f(u, s), \tag{1}$$

где u – n-мерный вектор, а s – k-мерный параметр. Для некоторого значения параметра $s = s_0$ система имеет неустойчивое стационарное решение v^{s_0}.

Для приложений значительный интерес представляет вопрос об "удержании" решений эволюционных уравнений в малой окрестности неустойчивых стационарных режимов, поскольку эти режимы могут быть привлекательны с точки зрения технологии [1]. В некоторых случаях решение нестационарной задачи можно "удерживать" в указанной окрестности с помощью управления свободными параметрами. Впервые возможность такого управления была обоснована Е.И. Мусиенко [2]–[3] для широкого класса эволюционных процессов, описываемых системами обыкновенных или параболических уравнений. При этом одно из основных предположений состояло в том, что оператор соответствующей системы первого приближения имеет ровно одну точку спектра с положительной вещественной частью.

В настоящей работе обоснована возможность осуществления управления двухмерным параметром для системы (1) в предположении, что матрица линеаризованной задачи $A = \frac{\partial f}{\partial u}(v^{s_0}, s_0)$ имеет два положительных собственных значения.

В дальнейшем будем предполагать, что

1) f – дважды непрерывно дифференцируема в окрестности (v^{s_0}, s_0);

2) в окрестности точки s_0 определена функция $v(s)$, являющаяся для каждого s стационарным решением уравнения (1) и такая, что $v(s_0) = v^{s_0}$;

3) если P – спектральный проектор на собственное подпространство, отвечающее двум положительным собственным значениям оператора A, то вектора

$$P\frac{\partial v(s)}{\partial s^1}\bigg|_{s=s_0}, \quad P\frac{\partial v(s)}{\partial s^2}\bigg|_{s=s_0},$$

где $s = (s^1, s^2)$, линейно независимы.

Теорема. Для любой окрестности U точки v^{s_0} можно указать две области D_0, $D_1 \subset U$, $D_0 \bigcap D_1 = \emptyset$, а также еще одно значение параметра s_1 так, что решение системы (1) с начальными данными в D_0 при параметре, равном s_0, через некоторое время попадет в D_1 и наоборот решение с начальными данными в D_1 при параметре, равном s_1, через некоторое время попадет в D_0.

Используя данную теорему, можно организовать процесс управления. А именно, взяв начальные данные в D_0 и положив $s = s_0$, ждем пока решение не окажется в D_1. В этот момент "переключаем" параметр, т.е. полагаем $s = s_1$ и далее следим за процессом. После того как решение снова окажется в D_0, параметр "переключим" на $s = s_0$. И т.д. продолжаем процесс циклическим образом.

Литература. 1. Зеленяк Т.И., Слинько М.Г. Динамика каталитических систем — Кинетика и катализ, 1977, т. 18, № 5, с. 1235–1248; № 6, с. 1548–1560. 2. Мусиенко Е.И. Управление решением одной параболической задачи в окрестности неустойчивого стационарного решения — Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1981, вып. 51, с. 68–83. 3. Мусиенко Е.И. Управление решением некоторых параболических задач в окрестности неустойчивого стационарного решения — Дифференциальные уравнения, 1984, т. 20, № 12, с. 2120–2130.

Неравенства, которым удовлетворяют строгие минус-операторы.

Иохвидов Е.И.[4]

Воронежский государственный технический университет

Пусть A - строгий минус-оператор, т.е. линейный оператор, действующий в пространистве Крейна, переводящий все неположительные векторы из области определения D_A в неположительные и такой, что число

$$\mu(A) = sup\{[Ax, Ax] \mid x \in D_A, [x, x] = -1\}$$

является отрицательным.

Теорема 1 *Если A - строгий минус-оператор в пространстве Крейна, то возможны следующие три случая:*

1) $\mu(A) \in (-1; 0)$. **2)** $\mu(A) = -1$. **3)** $\mu(A) < -1$.

В первом случае справедливо неравенство:

$$[Ax, Ax] - [x, x] \leqslant \frac{1 + \mu(A)}{1 - \mu(A)} \cdot \{||Ax||^2 + ||x||^2\} \quad \forall x \in D_A. \tag{1}$$

Во втором случае справедливо неравенство:

$$[Ax, Ax] - [x, x] \leqslant 0 \quad \forall x \in D_A, \tag{2}$$

[4]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00203).

т.е. оператор A является J-нерастягивающим. Наконец, в третьем случае имеет место неравенство:

$$[Ax, Ax] - [x, x] \leqslant \frac{\mu(A) + 1}{\mu(A) - 1} \cdot \{||Ax||^2 + ||x||^2\} \quad \forall x \in D_A. \qquad (3)$$

Замечание 1 *Аналогичные результаты получены и для строгих плюс-операторов, т.е. для линейных операторов A, действующих в пространстве Крейна, переводящих неотрицательные векторы из области определения в неотрицательные и таких, что число*

$$\nu(A) = inf\{[Ax, Ax] \mid x \in D_A, [x, x] = 1\}$$

является положительным.

Замечание 2 *Во всех трех случаях преобразование Потапова-Гинзбургр строгого минус-оператора является ограниченным оператором. Как показывают примеры, преобразование Потапова-Гиезбурга полустрогого оператора (т.е. оператора, переводящего отрицательные векторы из области определения в отрицательные) является, вообще говоря, неограниченным оператором.*

К устойчивости плоскопараллельных течений вязкой жидкости

С.И. Кадченко, Н.С. Джиганчина (Магнитогорск, МаГУ; kadchenko@masu.ru)

Устойчивость плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными плоскостями определяется собственными числами спектральной задачи

$$G\varphi = [T^2 + i\alpha R(U - c)T - U'']\varphi = 0, \qquad (1)$$

где $T = -\dfrac{d^2}{dy^2} + \alpha^2$, $\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число, λ - длина волны возмущения, R - число Рейнольса, c - комплексный спектральный параметр, U - скорость основного течения. Оператор G задан в сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$, с областью определения

$D_G = \Big\{\varphi \in C^4(0,1) \bigcap C^1[0,1],$
$\dfrac{d^4\varphi}{dy^4} \in L_2[0,1] : \varphi(y)\Big|_{y=0,1} = \dfrac{d\varphi(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0\}$. Если мнимые части c_i всех собственных чисел c отрицательны, то возмущение согласно линейной теории будет затухать, и такое течение считается устойчивым.

Показано, что множества собственных чисел краевой задачи

$$(T+P)f = i\alpha Rcf, \ f \in D_T \tag{2}$$

и задачи (1) совпадают, а их собственные функции связаны соотношениями $\varphi = T^{-1}f$, и $f = T\varphi$. Здесь $D_T = \Big\{f \mid f \in C^2(0,1) \bigcap C^1[0,1], \dfrac{d^2 f}{dy^2} \in L_2[0,1], \dfrac{dT_0^{-1}f(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0\Big\}$,
$T_0^{-1}f = \dfrac{1}{\alpha}\Big\{\dfrac{\operatorname{sh}(\alpha y)}{\operatorname{sh}\alpha}\int\limits_0^1 \operatorname{sh}[\alpha(1-\xi)]f(\xi)d\xi - \int\limits_0^y \operatorname{sh}[\alpha(y-\xi)]f(\xi)d\xi\Big\}$,
$P = i\alpha R(U - U''T_0^{-1})$.

Теорема 1. *Система собственные функции $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ спектральной задачи*

$$T\omega = \mu\omega, \ \frac{dT_0^{-1}\omega(y)}{dy}\Big|_{y=0,1} = 0$$

является базисом пространства $L_2[0,1]$.

Теорема 2. *Мнимые c_i части собственных чисел плоскопараллельных задач Куэтта ($U = y$) и Пуазейля ($U = y(1-y)$) находятся по формулам*

$$c_i = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n^2|a_n|^2}{\alpha R\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2}.$$

Для любых значений числа Рейнольдса R и волнового числа α справедливы оценки

$$c_i < -\frac{\alpha}{R}.$$

Здесь $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ - корни трансцендентного уравнения

$$4\alpha e^{-\alpha}q - 2\alpha\Big(1+e^{-2\alpha}\Big)q\cos q + \Big(1-e^{-2\alpha}\Big)\Big(\alpha^2 - q^2\Big)\sin q = 0,$$

занумерованные в порядке возрастания их величин, f - собственная функция спектральной задачи (2) *соответствующая собственному числу c.*

Так как мнимые части всех собственных чисел спектральной задачи (1) отрицательны, то плоскопараллельные стационарные течения вязкой жидкости между двумя бесконечными параллельными плоскостями устойчивые при любых значениях α и R.

Методы теории фредгольмовых отображений в нелокальном анализе бифуркаций циклов

Карпова А.П., Сапронов Ю.И.

Задачу о бифуркациях циклов (периодических решений ОДУ) и их нелокальных продолжениях по параметрам можно решать с хорошим вычислительным эффектом на основе методов дискриминантного анализа параметрических семейств гладких фредгольмовых уравнений в банаховых пространствах.

В случае вариационной периодической задачи такое исследование недавно осуществлено в работах А.Ю. Борзакова [1]–[3] — на основе нелокальной редукции Ляпунова–Шмидта к анализу гладкого параметрического семейства гладких функций.

При некоторых дополнительных условиях можно осуществить аналогичное исследование и в непотенциальном случае. Дополнительные условия необходимы как для обеспечения нелокальной редуцируемости к конечномерному (ключевому) уравнению (на основе нелокальной версии теоремы о неявной функции — теоремы Каччиополи–Банаха–Мазура [4]), так и для выполнения условия топологической стабилизируемости геометрической структуры плоских сечений дикриминантного множества (для приближенно вычисленного ключевого уравнения). Условие топологической стабилизируемости в свою очередь достигаются через требование трансверсальности соответствующего фредгольмова отображения своим особенностям, расположенным в рассматриваемой конечной области определения отображения.

Литература: [1] Борзаков А.Ю., Лемешко А.А., Сапронов Ю.И. Нелинейные ритцевские аппроксимации и визуализации бифуркаций экстремалей// Вестник ВГУ. Сер. физ., матем. – 2003, вып. 2. – С. 100–112. [2] Борзаков А.Ю. Применение методов конечномерной редукции к глобальному анализу краевых задач на примере уравнения Дуффинга// Сборник трудов математического факультета ВГУ. – 2004, вып. 8. – С. 1–12. [3] Борзаков А.Ю. К глобальному анализу краевых задач вариационного исчисления на основе конечномерной редукции// Сборник трудов математического факультета ВГУ. – 2004, вып. 9. – С. 9–22. [4] Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера// Успехи матем. наук. 1977. Т.32, вып.4. С.3-54.

Особые точки отображения момента вполне интегрируемых гамильтоновых систем, построенных методом сдвига аргумента на полупростых алгебрах Ли

А.Ю. Коняев (Москва, МГУ; andrei konyaev@mail.ru)

Как известно из общей теории дифференциальных уравнений, линейные системы, вообще говоря, не интегрируются в квадратурах. В классической механике, в частности в механике твёрдого тела, особую роль играют гамильоновы системы, а так же скобки Пуассона, связанные с ними. Какие существуют вполне интегрируемые гамильтоновы системы? Одним из общих методов построения таких систем является метод вложения системы в коалгебру Ли с заданием гамильтонова коприсоединённого действия соответствующей группы. Таким образом имеет смысл изучать полные коммутативные относительно стандартной скобки Пуассона наборы на коалгебрах Ли. Особые точки таких систем интегралов на полупростых алгебрах и будут предметом доклада. В частности будет указана связь между спектральной кривой и особыми точками полных интегральных наборов.

Литература. 1. В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко, Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. Москва, Факториал, 1995. - 448 с. 2. Ю.А. Браилов, Критические точки коммутативных наборов на полупростых алгебрах Ли, кандидатская. Москва, МГУ.

О представлении решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве.

В.А. Костин (Воронеж, ВГУ; vlkostin@mail.ru)

Пусть E – банахово пространство, $u(x)$, $(x > 0)$ вектор функция со значениями в E, и $(I^{\frac{1}{2}}u)(t)$ дробный интеграл Римана – Лиувиля.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$(D^{\frac{1}{2}}u)(t) + Au(t) = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0}(I^{\frac{1}{2}}u)(t) = u_0, \tag{2}$$

где А – замкнутый линейный оператор в E с областью определения $D(A)$, $u_0 \in E$, интеграл понимается в смысле Бохнера.

Под решением задачи (1)-(2)понимается вектор-функция $u(t)$, такая что: $u(t)$ сильно непрерывна при $t > 0$ и $u(t) \in D(A)$; дробный интеграл $(I^{\frac{1}{2}}u)(t)$ представляет сильно непрерывную при $t \geq 0$ и сильно непрерывно-дифференцируемую при $t > 0$ вектор-функцию; $u(t)$ удовлетворяет (1)-(2).

Задача (1)-(2) равномерно-корректна, если она имеет единственное решение $u(t)$ и для него справедлива оценка $\|(I^{\frac{1}{2}}u)(t)\| \leq M\|u_0\|$.

Теорема. Если оператор A такой, что $-A^2$ являються генератором полугруппы $U(t)$ класса C_0 с оценкой $\|U(t)\| \leq M$, то задача (1)-(2) равномерно-корректна и для ее решения справедливо представление:

$$u(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \frac{U(ts)u_0 ds}{(1+s)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

В качестве примера рассмотрим в пространстве равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^1$ функций $C[-\infty;\infty]$ оператор

$$A\varphi = \left[-\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi\right](x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x-\xi)-\varphi(x)}{\xi^2+h^2}d\xi.$$

Тогда $A^2 = -\frac{d^2}{dx^2}$ и соответствующая Задача Коши (1)-(2) равномерно корректна, причем для ее решения имеет место представление
$u(t) = \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S\left(\frac{3}{2}, \frac{\xi^2}{4t}\right)u_0(x-\xi)d\xi$, где $S(\nu, s) = \int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-su}du}{(1+u)^{3/2}}$.

Плоские сечения дискриминантного множества для уравнения прогибов слабо неоднородной упругой балки

Д.В. Костин (Воронеж, ВГУ; dvkostin@rambler.ru)

Бифурцирующие формы равновесия неоднородной упругой балки на упругом основании соответствуют точкам минимума функционала действия

$$V(p,\varrho,\alpha) = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\left(p\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + \varrho\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \alpha w^2\right) + \frac{w^4}{4}\right)dx, \qquad (1)$$

где $p = 1 + \varepsilon\gamma$. В работе [1] изучен случай однородной балки ($\varepsilon = 0$), анализ которого сводится (с помощью редукции Ляпунова–Шмидта) к анализу ключевой функции

$$W = \frac{x^4 + y^4 + 2ax^2y^2}{4} + \frac{\delta_1 x^2 + \delta_2 y^2}{2} + \dots$$

Посредством модификации алгоритма вычисления главной части ключевой функции (на основе теории возмущений самосопряженного оператора [2]) анализ случая неоднородной балки сводится к анализу функции

$$\widetilde{W} = W + \tilde{\varepsilon}xy \qquad (2)$$

Дискриминантное множество уравнения экстремалей функционала (1) совпадает с каустикой функции (2) или, что эквивалентно, с дискриминантным множеством системы уравнений

$$(\widetilde{W}_x =)\, x^3 + axy^2 + \delta_1 x + \varepsilon y = (\widetilde{W}_y =)\, y^3 + ax^2 y + \delta_2 y + \varepsilon x = 0;$$

$$(detH =)\, (3x^2 + ay^2 + \delta_1)(ax^2 + 3y^2 + \delta_2) - (2axy + \varepsilon)^2 = 0.$$

На основе этих соотношений получено (в среде Maple) графическое изображение плоских сечений каустики (при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon \neq 0$) и изучено поведение ячеек регулярности при $\varepsilon \to 0$.

Литература. 1. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений// Современная математика и ее приложения. – Тбилиси. 2003. Т.7. – С.72-86. 2. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. – М.: Наука. 1988. – 312 с.

О структуре алгебры отображений 1-й степени

М.Н.Крейн

(Липецк, ЛГПУ; travkin@lipetsk.ru)

В некоммутативной алгебре $\mathcal{A}$ рассматриваются отображения вида $f(x) = a_1 \cdot x \cdot b_1 + a_2 \cdot x \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot x \cdot b_n$, введенные ранее автором и названные отображениями 1-й степени. Множество таких отображений само образует алгебру $d_1(\mathcal{A})$ с обычными сложением и умножением на число (как функций) и композицией отображений в качестве умножения элементов алгебры. Пусть $\widetilde{\mathcal{A}}$ означает алгебру, полученную из $\mathcal{A}$ изменением порядка сомножителей при умножении, то есть, если ab - умножение в $\mathcal{A}$, то $a \odot b = ba$ - умножение в $\widetilde{\mathcal{A}}$. Нетрудно убедиться, что отображение $h: \mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}} \to d_1(\mathcal{A})$, заданное формулой $h(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2 + \cdots + a_n \otimes b_n) = f \in d_1(\mathcal{A})$, где $f(x) = a_1 \cdot x \cdot b_1 + a_2 \cdot x \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot x \cdot b_n$, является гомоморфизмом алгебр (эпиморфизмом).

Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ *обладает свойством (*)*, если она является, с точностью до изоморфизма, такой алгеброй линейных операторов некоторого линейного пространства E, что для любой конечной линейно независимой системы $e_1,\ e_2, \ldots, e_n \in E$ и любой системы из такого же количества элементов $g_1,\ g_2, \ldots, g_n \in E$ найдется оператор в $\mathcal{A}$, переводящий 1-ю систему во 2-ю. Если E конечномерно, то свойством (*) обладает только алгебра всех линейных операторов, действующих в E. Если же E бесконечномерно, то это свойство имеется не только у алгебры всех линейных операторов, но и у некоторых ее подалгебр, например, в случае нормированного пространства, у алгебры всех ограниченных линейных операторов, у алгебры компактных линейных операторов.

Теорема. *Если алгебра* $\mathcal{A}$ *обладает свойством (*), то гомоморфизм* $h:\ \mathcal{A} \otimes \widetilde{\mathcal{A}} \to d_1(\mathcal{A})$ *является изоморфизмом.*

Имеются примеры алгебр, не обладающих свойством (*), для которых h не является изоморфизмом (имеет ненулевое ядро).

Наилучшая квадратурная формула в классе W^2_∞

И.В.Курбатова
(Воронеж, ВГУ; la_soleil@bk.ru)

Квадратурной формулой называют приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k),$$

предназначенное для вычисления определенных интегралов. Квадратурная формула определяется выбором *узлов* $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$ и *коэффициентов* c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. В докладе описывается квадратурная формула, дающая наилучшую точность в классе $W^2_\infty(M, [a,b])$ всех функций f, имеющих вторую производную и удовлетворяющих условию

$$|f''(x)| \leqslant M$$

для всех $x \in [a,b]$. Аналогичная задача для класса $W^1_\infty(M,[a,b])$ решена в [1].

Функции, имеющие только две производные, естественно возникают в физических задачах. Рассмотрим, например, объект, подчиняющийся второму закону Ньютона $mr'' = F$. Предположим, что сила F меняется скачками, т.е. имеет разрывы 1-го рода (это может быть переключение передач в автомобиле, кратковременное включение двигателей ракеты, прохождение заряженной частицы через пластину плоского конденсатора). Тогда функция r будет иметь только две производные.

Получен следующий результат. В классе $W^2_\infty(M,[-1,1])$ наилучшая квадратурная формула имеет следующие узлы и коэффициенты:

$$x_k = \frac{(-1+2\,k-n)}{2}\frac{4\,(2\,n-2-\sqrt{3})}{4\,n^2-8\,n+1}, \qquad k=1,\ldots,n,$$

$$c_1 = c_n = 1 + \left(1-\frac{n}{2}\right)\frac{4\,(2\,n-2-\sqrt{3})}{4\,n^2-8\,n+1},$$

$$c_k = \frac{4\,(2\,n-2-\sqrt{3})}{4\,n^2-8\,n+1}, \qquad k=2,\ldots,n-1.$$

Литература. 1. Волошина И.А. Об одной оптимальной квадратурной формуле. Математика сегодня '90. Киев: Выща школа, 1990. С. 105–110.

Группы монодромии некоторых гамильтоновых систем, в условии неполноты полей

Т.А. Лепский (Москва, МГУ; timanu@mail.ru)

В случае интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы строение прообраза отображения момента объясняет теорема Лиувилля. Также с ее помощью можно найти группы монодромии. Однако, если отказаться от условия полноты полей $sgrad(f)$, то прообразом регулярного значения отображения момента могут быть подмногообразия, отличные от $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$.

В докладе в качестве многообразия рассмотрено четырехмерное вещественное пространство, а интегралы заданы как, соответственно, вещественная и мнимая часть комплексного полинома. Для некоторых полиномов найдены топологическое строение слоев отображения момента и группы монодромии.

Литература. 1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Москва, Наука. 1979 2. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. Москва, Мир. 1971.

Обобщение инфинитезимального оператора в групповом анализе ОДУ

Л.В. Линчук (Санкт-Петербург, СПбГПУ; lidiya_linchuk@mail.ru)

Прямую задачу группового анализа для обыкновенных дифференциальных уравнений можно сформулировать следующим образом: для данного уравнения $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ найти оператор вида $X = \Phi\partial_y$, который допускается исходным уравнением, а его инварианты сводят уравнение к факторсистеме более простых уравнений. Последнее условие оказывается существенным, так как уравнение может допускать оператор, не приводящий к факторизации, а следовательно, возникает вопрос о дальнейшем использовании такого оператора (этот вопрос на сегодняшний день остается открытым).

Координата оператора – функция Φ – является решением линейного уравнения в полных производных

$$\left.\left(\sum_{i=0}^{n-1} D^i[\Phi]F_{y^{(i)}} - D^n[\Phi]\right)\right|_{y^{(n)}=F} = 0. \tag{1}$$

В общем случае замкнутое решение в аналитической форме для уравнения (1) получить не удается, поэтому приходится рассматривать многочисленные частные случаи оператора X. Доказано, что знание конкретного вида Φ – избыточная информация. Для нахождения инвариантов X достаточно знать правила дифференцирования Φ. Для этого мы задаем Φ как линейную комбинацию нелокальных переменных A_i, которые мы считаем линейно независимыми вместе с $x, y, y', y'', \ldots$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{k} \xi_i(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) A_i,$$

а правила дифференцирования нелокальных переменных имеют вид

$$D(A_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x, y, y', \ldots, y^{(r)}) A_j \quad (i = \overline{1, k}).$$

Предложенный подход обобщает все известные типы инфитизимальных операторов и позволяет найти факторсистемы в случае, когда соответствующий оператор вообще не может быть найден в явном виде. Кроме этого, эта идея оказывается эффективной и при решении обратных задач.

Квадратичные системы уравнений и компазиции полиномиальных отображений

Лобода А.В.(Воронеж)

lob@vgasu.vrn.ru

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00630).

В связи с известной гипотезой о якобиане рассмотрим пару полиномов $P(x, y)$, $Q(x, y)$ от двух комплексных переменных x, y и келлерово отображение $f = (P, Q) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, удовлетворяющее условию "сохранения площади"

$$\left| \frac{\partial(P, Q)}{\partial(x, y)} \right| = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} = 1. \tag{1}$$

Вариантом гипотезы о якобиане является вопрос о представимости любого келлерова отображения композицией треугольных полиномиальных отображений.

Отделяя в равенстве (1) однородные компоненты, можно записать его в виде системы квадратичных уравнений относительно коэффициентов пары (P, Q). Рассмотрение таких систем является достаточно эффективным при изучении келлеровых отображений.

Отметим, что справедливость гипотезы о якобиане (т.е. глобальная обратимость отображения $f = (P, Q)$) является известным фактом [1] в случае достаточной малости наибольшего общего делителя степеней многочленов P и Q. Приводимые ниже уточнения этого факта связаны со случаем $\deg P = 2n$ $(n \in \mathbb{N}), \deg Q = 2$. Ясно, что с точностью до аффинного преобразования координат в прообразе f компонента Q_2 многочлена Q имеет вид либо $Q_2(x, y) = xy$, либо $Q_2(x, y) = x^2$.

Теорема 1. Не существует $(2n, 2)$-отображений $f = (P, Q)$, удовлетворяющих уравнению (1) и условию $Q_2(x, y) = xy$.

Теорема 2. Всякое келлерово $(2n, 2)$-отображение $f = (P, Q)$, с $Q_2(x, y) = x^2$ является композицией треугольных преобразований.

За счет последовательного рассмотрения уравнений упомянутой выше квадратичной системы однородные компоненты P_{2n}, P_{2n-1}, ... , P_1 "старшего" многочлена $P(x, y)$ выражаются через коэффициенты "младшего" многочлена $Q(x, y)$. При этом в случае $Q_2(x, y) = xy$ последнее уравнение системы оказывается противоречащим всем остальным уравнениям. А в случае $Q_2(x, y) = x^2$ в получаемых формулах для $P(x, y), Q(x, y)$ легко узнается композиция требуемого вида.

В более сложных случаях $\deg Q > 2$ соответствующие (1) квадратичные системы также дают полезную информацию о келлеровых отображениях.

Литература. 1. Essen A. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture.Progress in Mathematics, V.190. 2000, 328 P.

О решении уравнения $\varphi(x) = 2^n$

Н.В.Лой (Воронеж, ВГПУ)

Рассматривается уравнение $\varphi(x) = 2^n$, где $n-$заданное натуральное число, $x-$неизвестная, принадлежащая множеству натуральных чисел, $\varphi-$функция Эйлера, и изучается вопрос о количестве решений этого уравнения при различных значениях n.

Во первых заметим, что множество $\varphi^{-1}(2^n)$ можно представить как объединение трёх непересекающихся подмножества:

$$A_n = \{2^{n+1}\}, B_n = \{2^\alpha.\prod_{i\in \mathrm{I}} p_i\}, C_n = \{\prod_{j\in\Gamma} p_j\},$$

где все p_k−есть простые числа вида $2^{2^{m_k}} + 1$, $m_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\forall k \in \mathrm{I} \cup \Gamma$; I, Γ− некоторые подмножества $\mathbb{N}$, причём $\mathrm{I} \neq \varnothing$, $\alpha \in \mathbb{N}$. При этом заметим, что A_n− одноэлементное подмножество, C_n− имеет не более одного элемента, а B_n удовлетворяет соотношению:

$$B_{n+1} = 2.B_n \cup 2.C_{n+1},$$

где $\{2.B_n = \{2y|y \in B_n\}$; $\{2.C_{n+1} = \{2z|z \in C_{n+1}\}$. Была доказана следующая ***Теорема*** $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq 31$, выполняется равенство :

$$||\varphi^{-1}(2^n)|| = n + 2$$

, т.е. при $n \leq 31$ уравнение $\varphi(x) = 2^n$ имеет ровно $(n + 2)$ решений ■

Литература. 1. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел. Москва, Просвещение. 1970.–128 с. 2. Бухштаб А.А. Теория чисел. Москва,Просвещение. 1966.

Об одной модели графов

Н.В.Лой (Воронеж, ВГПУ)

Рассматривается новая модель, из которой получается широкий класс графов, и изучаются некоторые свойсва этой модели. Чтобы сформировать эту модель, сначала введём следующие понятия :

1. Неориентированный граф, неимеющий петлей, будем называть линейным графом.

2. Две вершины x_i и x_j линейного графа $\mathbf{G}$ называются связанными и обозначаются через $x_i \sim x_j$, если в $\mathbf{G}$ содержится ребро (x_i, x_j). В противном случае эти вершины называются несвязанными и обозначаются через $x_i \nsim x_j$.

3. Подмножество $\mathbf{M}$ множества всех вершин $\mathbf{X}$ линейного графа $\mathbf{G}$ называется связанным с некоторой вершиной $x_m \in \mathbf{X}$ и обозначается через $\mathbf{M} \sim x_m$, если $x_m \sim x_k$, $\forall x_k \in \mathbf{M}$.
Итак задаём граф $\mathbf{G}$ следующим образом :
$\mathbf{G}$ состоит из $n-$ вершин $\mathbf{X} = \{1, 2, ..., n\}$, обладающих $\Im-$свойством:
$\forall \mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, $\|\mathbf{M}\| = [n/2]$, то $\exists \alpha \in \mathbf{X} \backslash \mathbf{M}$ такая, что $\alpha \sim \mathbf{M}$.
Граф $\mathbf{G}$, задаваемый множеством $\mathbf{X}$ и $\Im-$свойством , называется компактным . Класс всех таких графов обозначаем через $\mathbf{K}(\mathbf{G}, n)$. Показано, что для любого графа $\mathbf{G}$, множество всех вершин $\mathbf{X}$ можно разбить на непересекающиеся подмножества по базису $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$. Это разбиение называется $\mathbf{L}-$рабиением $\mathbf{X}$ по $\mathbf{Y}$. Были доказаны следующие теоремы.
Теорема1.
$\forall \mathbf{G} \in \mathbf{K}(\mathbf{G}, n)$, для любого $\mathbf{L}-$разбиения $\mathbf{X}$ по $\mathbf{Y}(\mathbf{Y} \subset \mathbf{X})$ справедливо равенство :

$$\| \bigcup_{k \in \mathbf{Y}} \mathbf{L}(\mathbf{X}_k, k) \| \leq [n/2]$$

где $\mathbf{L}(\mathbf{X}_k, k) = \{\alpha \in \mathbf{X}_k \backslash \{k\} \mid \alpha \nsim k\}$, $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1} \backslash (\mathbf{L}(\mathbf{X}_{k-1}, k-1) \cup \{k-1\})$, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}$.
Используя теорему1 , получаем следующую теорему о наименьшем числе доминирующего множества графа $\mathbf{G}$.
Теорема2.
$\forall \mathbf{G} \in \mathbf{K}(\mathbf{G}, n)$ выполняется равенство

$$\beta[\mathbf{G}] = 1$$

Литература 1. Кристофидес Н. Теория графов. Москва, изд."Мир"1978.– 215с.
2. Цой С. и Цхай С.М. Прикладная теория графов, Алма-Ата,"Наука 1971.
3. Берж К. Теория графов и её применения, Москва, ИЛ, 1962.

Об аппроксимации обобщенной функции Каратеодори

Е.В.Лопушанская

(Воронеж, ВГУ; kate_lopushanskaya@yahoo.com)

В работе М.Г.Крейна,И.Г.Лангера [**1**] была решена задача аппроксимации обобщенной функции Неванлинна g в некоторой области $W_v = \{z \in C_0, |argz - \frac{\pi}{2}| \leq v\}$, где $0 \leq v < \frac{\pi}{2}$.

Обобщенная функция Каратеодори связана с обобщенной функцией Неванлинны с помощью преобразования Кэли-Неймана.

Определение 1 *Мероморфная в открытом единичном круге функция f называется обобщенной функцией Каратеодори, если ядро $K_f = \frac{f(\lambda)+\overline{f(\mu)}}{1-\lambda\bar{\mu}}$ имеет ровно $\varkappa$ отрицательных квадратов в этом круге.*

Для обобщенной функции Каратеодори доказана следующая теорема об аппроксимации.

Теорема 1 *Для функции f следующие свойства*

1. *$f(\lambda) \in C_\varkappa$, где $C_\varkappa$- класс обобщенных функций Каратеодори;*
2. *Для целого числа $n \geq 0$ существуют $2n$ вещественных чисел $s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ таких, что*

$$f(\lambda) + 2\sum_{\nu=0}^{2n-1} s_\nu(\lambda-1)^{\nu+1} = O((\lambda-1)^{2n+1}) \qquad (\lambda \to 1, \lambda \in \Omega)$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют $\pi_\varkappa$-пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, V – π-унитарный оператор в $\Pi_\varkappa$ и $v \in D((V-I)^{-(n+1)})$ – о-порождающий элемент для V, такие, что

$$f(\lambda) = -2(\lambda-1)[(V-\lambda)^{-1}v, (V-I)^{-1}v] \qquad (\lambda \in T \setminus \sigma_p(V)).$$

При этом

$$s_\nu = \begin{cases} [(V-I)^{-(\nu+1)}v, (V-I)^{-1}v], & 0 \leq \nu \leq n \\ (-1)^{\nu-n}[(V-I)^{-(n+1)}v, V^{\nu-n}(V-I)^{\nu-n-1}v], & n < \nu \leq 2n-1. \end{cases}$$

Литература. 1. Крейн С.Г., Лангер Г.К. Uber einige Forsetzungsprobleme die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Raume $\Pi_\varkappa$ zusammenhangen, I: Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen.-Math. Nachr., 1977, 77, S. 193-206.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00203-а

О дифференциальном уравнении, связанном с задачей линейного программирования

Д.Л.Макринова (Воронеж, ВГУ; Dashka@comch.ru)

В работе предлагается и исследуется система обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой при любых начальных данных стремятся к множеству точек минимума заданного линейного функционала $F(x) = (p, x)$ на выпуклом многограннике Q в $\mathbb{R}^n$. Предполагается, что многогранник лежит в шаре $B(0, R)$ и описывается неравенствами

$$(n_k, x) \leq c_k, \quad k = 1, ..., m.$$

Предлагаемая система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\dot{x} = -p - M \sum_{k=1}^{m} \xi_k(x) n_k,$$

где

p - градиент минимизируемого линейного функционала,

M - большой параметр,

$\xi_k(x) = \max\{0, (n_k, x) - c_k\}$.

Доказана следующая

Теорема. *Обозначим через F_0 минимум функционала $F(x)$ на многограннике Q. Утверждается, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $M > 0$ и $T > 0$, что если $x(0) = x_0 \in B(0, R)$ и $t \geq T$, то*

$$F(x(t)) < F_0, \quad \rho(x(t), Q) < \varepsilon.$$

Корректность задачи Коши для включения в терминах однозначного сужения

А.В. Мезенцев (г. Екатеринбург, УрГУПС; amezen@yandex.ru)

Рассмотрим абстрактную задачу Коши для включения

$$u'(t) \in \mathcal{A}u(t),\ t \geqslant 0, \quad u(0) = x, \tag{1}$$

с линейным многозначным оператором в банаховом пространстве X. В [1] получен критерий корректности задачи (1) на множестве $D(\mathcal{A}^n)$ в терминах сужения оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $X_n := \overline{D(\mathcal{A}^n)}$

$$Au := \mathcal{A}u \cap X_n,\ D(A) = \{u \in D(\mathcal{A}) \cap X_n |\ Au \cap X_n \neq \emptyset\}.$$

В качестве априорных предположений в критерии рассматриваются условие непустоты множества регулярных точек оператора $\mathcal{A}$ и равенство $D(\mathcal{A}^n) = D(A^n)$, которое обеспечивает плотность множества определения оператора A в пространстве X_n и включение $D(\mathcal{A}^n) \subset D(A)$.

В настоящей работе получены связи между утверждениями критерия корректности задачи (1) при другом по сравнению с [1] априорном предположении на оператор $\mathcal{A}$. В качестве такого предположения рассмотрено условие стабилизации пространств X_i, начиная с номера n:

$$\exists n \in \mathbb{N}:\ X \supset X_1 \supset \ldots \supset X_{n-1} \supset X_n = X_{n+1} = \ldots \tag{2}$$

Теорема. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный многозначный оператор в банаховом пространстве X с непустым резольвентным множеством и выполняется условие (2). Тогда справедливы следующие импликации:

$$(\mathbf{W_n}) \Rightarrow (\mathbf{G_n}) \Rightarrow (\mathbf{R_n}) \Rightarrow (\mathbf{W_{n+1}}),$$

где
$(\mathbf{W_n})$ $\forall x \in D(\mathcal{A}^n)$ $\exists!$ решение (1) $u(\cdot) \in C^1\{[0,\infty), X_n\} \cap C\{[0,\infty), D(\mathcal{A})\}$ такое, что $\forall \tau \in (0,\infty)$ выполняется неравенство $\sup_{t\in[0,\tau]} \|u(t)\| \leqslant C_\tau \|x\|$;
$(\mathbf{G_n})$ оператор A является однозначным и является генератором полугруппы класса C_0 в X_n;

($\mathbf{R_n}$) существует резольвента оператора A в пространстве X_n и для нее выполняются оценки

$$\exists M > 0,\ \omega \in \mathbb{R}:\ \|R^k(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{(\Re\lambda - \omega)^k},\ \Re\lambda > \omega,\ k = 1, 2, \dots$$

Литература. 1. Мельникова И.В. Корректность задачи Коши для включения. // Дифференциальные уравнения. 2004. т. 40, № 7.– с.1-4.

Топология слоений Лиувилля нового случая интегрируемости на кокасательном расслоении к двумерной сфере S^2

А.Ю. Москвин (Москва, МГУ; moskvin-ay@mail.ru)

В докладе будут рассказаны результаты в области исследования топологии слоений Лиувилля нового случая интегрируемости на кокасательном расслоении к двумерной сфере S^2, описанном в [1].

Литература. 1. Dullin H.R., Matveev V.S. — A new integrable system on the sphere.

Обобщенная задача Рауса - Гурвица для полиномов с комплексными коэффициентами

Э.М. Мухамадиев (Вологда, ВоГТУ; muhamerg@mail.vstu.edu.ru)

Обобщенной задачей Рауса - Гурвица называют задачу о вычислении числа корней (с учетом их кратности) полинома с отрицательными вещественными частями. Для полиномов с комплексными коэффициентами эту задачу можно исследовать, переходя к полиномам с вещественными коэффициентами более высокой степени (см. [1-3]). В настоящей работе предлагается способ непосредственного решения обобщенной задачи Рауса - Гурвица для полиномов с комплексными коэффициентами.

По полиному $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n, a_n \neq 0$ построим последовательность квадратных матриц $M_{f2k} = (m_{ij}), \quad i, j = 1, 2, ..., 2k$ порядка $2k \quad k = 1, 2, ..., n$, где $m_{2l-1,j} = a_{j-l}, \quad m_{2l,j} = (-1)^{j-l}\bar{a}_{j-l}, \quad l = 1, ..., k, \quad j = 1, ..., 2k$. Здесь $a_j = 0$ при $j < 0$ и $j > n$.

Теорема 1. *Пусть полином f удовлетворяет условиям $detM_{f2k} \neq 0, \quad k = 1, 2, ...n$. Тогда для числа $\kappa_-(f)$ корней полинома f, с отрицательной действительной частью, справедливо равенство*

$$\kappa_-(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + (-1)^k \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k}{2}$$

где $\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_k = sgndetM_{f2k}, \quad k = 1, 2, ...n.$

Из теоремы 1 следует, что для устойчивости полинома f достаточно, чтобы

$$detM_{f2} < 0, \quad (-1)^k detM_{f2(k-1)} \cdot detM_{f2k} > 0, \quad k = 2, ...n. \qquad (1)$$

Справедливо и обратное утверждение (теорема Рауса-Гурвица).

Теорема 2. *Для того чтобы полином f был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка матрицы $M_f = M_{f2n}$ удовлетворяли условиям (1).*

Литература

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967. - 472 с.

2. Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н. Проблема устойчивости Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 26, 1949.

3. Прасолов В. В. Многочлены. - М.: МЦНМО, 2003. - 235 с.

Об априорной оценке периодических решений системы ОДУ высших порядков*

А.Н. Наимов (Вологда, ВоГТУ; nan67@rambler.ru)

Рассматривается задача

$$\frac{d^k\mathbf{x}}{dt^k} = \mathbf{Q}\left(t, \frac{d^{k-1}\mathbf{x}}{dt^{k-1}} - \mathbf{B}\left(t, \mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-2}\mathbf{x}}{dt^{k-2}}\right)\right) +$$

$$+ \quad \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-1}\mathbf{x}}{dt^{k-1}}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1), \ldots, \frac{d^{k-1}\mathbf{x}}{dt^{k-1}}(t) = \frac{d^{k-1}\mathbf{x}}{dt^{k-1}}(t+1), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

где $k \geq 2$, $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n$, $\mathbf{B} : \mathbb{R}^{1+(k-1)n} \mapsto \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{1+kn} \mapsto \mathbb{R}^n$ - непрерывные отображения, периодические по t периода 1.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) $\exists m > 1, \quad \mathbf{Q}(t, \lambda\mathbf{y}) \equiv \lambda^m \mathbf{Q}(t, \mathbf{y}) \quad \forall \lambda > 0$;

2) $\mathbf{B}(t, \lambda\mathbf{y}_1, \ldots, \lambda\mathbf{y}_{k-1}) \equiv \lambda\mathbf{B}(t, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}) \quad \forall \lambda > 0$;

3) $(|\mathbf{y}_1| + \ldots + |\mathbf{y}_k|)^{-m} \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)| \to 0$ при $|\mathbf{y}_1| + \ldots + |\mathbf{y}_k| \to \infty$;

4) при каждом фиксированном $t_0 \in \mathbb{R}$ система

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{Q}(t_0, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

не имеет ненулевых ограниченных на $(-\infty, +\infty)$ решений.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены условия 1)-4), то существует число $C_1 > 0$ такое, что для любого решения задачи (1)-(2) верна оценка*

$$\left|\frac{d^{k-1}\mathbf{x}}{dt^{k-1}}(t)\right| \leq C_1 \left(1 + |\mathbf{x}(t)| + \ldots + \left|\frac{d^{k-2}\mathbf{x}}{dt^{k-2}}(t)\right|\right), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)-4), и пусть система*

$$\frac{d^{k-1}\mathbf{v}}{dt^{k-1}} = \mathbf{B}\left(t, \mathbf{v}, \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-2}\mathbf{v}}{dt^{k-2}}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

не имеет ненулевых периодических решений периода 1*. Тогда существует число* $C_2 > 0$ *такое, что для любого решения задачи (1)-(2) верна оценка*

$$|\mathbf{x}(t)| + \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)\right| + \ldots + \left|\frac{d^{k-1}\mathbf{x}}{dt^{k-1}}(t)\right| \le C_2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

В случае $k = 2$ оценки (3) и (4) для решений задачи (1)-(2) были доказаны в работе [1]. А в работе [2] при $k \geq 2$ оценка (3) приведена для решений систем вида (1) с третьими краевыми условиями.

Литература. 1. Наимов А.Н., Хакимов Р.И. О разрешимости одной нелинейной периодической задачи // Доклады АН РТ, 2001, № 3, т.44, Душанбе. 2. Наимов А.Н. Об априорной оценке решений одного класса краевых задач // Материалы международной научной конференции ТВМНА-2005, Воронеж, 26 июня - 2 июля 2005 г. - С. 84-85.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МД - 2828.2005.1

Корректность векторного интегрального уравнения Фредгольма первого рода для плотности токов в тонкослойном идеальном проводнике

Я.А. Науменко, В.И. Астахов (Новочеркасск, ЮНЦ РАН; jan@novoch.ru, v.astakhov@mail.ru)

Существует обширный класс задач, в которых необходим расчет стационарных магнитных полей в присутствии идеально проводящих тел. Для численных расчетов магнитных полей в присутствии массивных идеальных проводников применимы известные интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода, которые на настоящий момент хорошо изучены. Возможно и применение метода конечных элементов (МКЭ). Значительные трудности вызывает моделирование магнитного поля в присутствии тонкослойных идеальных проводников с краем. К указанной задаче сводится обширный класс технических проблем.

Основной трудностью численного моделирования магнитного поля в присутствии идеально-проводящих поверхностей произвольной формы с краем является то, что известные интегральные уравнения второго рода либо теряют смысл на разомкнутых поверхностях, либо обладают весьма сложными и неудобными для численной реализации ядрами, что делает проблематичным их практическое применение. При использовании векторного потенциала простого слоя может быть получено векторное интегральное уравнение типа Фредгольма первого рода для поверхностных токов:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{\overline{\sigma}\left(N\right)}{r_{NM}}dS_N=-\frac{\overline{A^0}\left(M\right)}{\mu}+\frac{\overline{C}\left(M\right)}{\mu},$$

где искомым является соленоидальное поле $\overline{\sigma}$. При использовании подходящей пары пространств, в которых действует оператор уравнения можно показать разрешимость единственным образом и устойчивость указанного интегрального уравнения. Критерием корректности уравнения может выступать как конечность энергии магнитного поля внешних источников (заданное своим векторным потенциалом $\overline{A^0}\left(M\right)$) [1],[2], так и принадлежность следов на S компонент потенциала невозмущенного поля пространству Бесова $B_2^{0.5}\left(S\right)$ [3].

Литература. 1. Астахов В. И. Поверхностные потенциалы и операторы теории потенциала в пространствах Дирихле // Известия вузов. Электромеханика. 2000, №2. – С. 3-18. 2. Науменко Я. А., Астахов В.И. Математическое моделирование магнитно-го поля в присутствии идеально-проводящей пластины с краем // Извес-тия вузов. Электромеханика, 2003. №5. – С. 11-16. 3. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996. – 480 с.

Анализ автоколебаний в системе с двумя реле

Нгуен Тхи Хиен (Воронеж)
hienvp@mail.ru

В работе проведен анализ одной системы автоматического регулирования с двумя релейными элементами. Реле описаны с помощью локально явных уравнений (см. [1]), полное описание системы дается следующими уравнениями:

$$\dot{x} = f(x, y), \tag{1}$$

$$y = y_1 + y_2, \tag{2}$$

где

$y_1(t), y_2(t)$ - выходные функции для первого и второго реле, соответственно, и они могут принимать только значения -1 и 1;

$x : [0, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}$ - входная функция для двух реле;

$$x(0) = x_0; \tag{3}$$

$$y(0) = y_0. \tag{4}$$

Вопрос заключается в том, при каких условиях на $f(x, -2)$, $f(x, 0)$, $f(x, 2)$ система (1)-(4) имеет периодическое решение.

Утверждение о существовании периодического решения.

Пусть пороговые значения двух реле вложены, т.е. $\gamma < \alpha, \beta < \delta$. *Пусть функции* $f(x, -2), f(x, 0), f(x, 2)$ *удовлетворяют следующим условиям: на* $[\alpha, \delta]$ $f(x, 2) < 0$ *и непрерывна , на* $[\gamma, \beta]$ $f(x, -2) > 0$ *и непрерывна, на* $[\gamma, \alpha]$ $f(x, 0) < 0$ *и непрерывна, на* $(\alpha, \delta]$ $f(x, 0) \geq r > 0$ *и непрерывна, причём существует конечный предел* $f(x, 0)$ *при* $x \to \alpha + 0$.

Тогда каждое решение системы $(1) - (4)$, *начиная с некоторого момента, является периодическим вправо и любые два решения этой системы, начиная с некоторого момента, совпадают с точностью до сдвига по времени. Это означает, что в фазавом пространстве* (x, y) *данная система имеет замкнутую траекторию , в которую за конечное время вливается любая другая траектория.*

Аналогичное утверждение доказано для случая, когда $(\alpha,\beta)\nsubseteq(\gamma,\delta)$, но $(\alpha,\beta)\cap(\gamma,\delta)\neq\varnothing$

Литература. 1. Прядко И.Н., Садовский Б.Н. О локально явных моделях некоторых негладких систем, Автом. и телемех., 2004, №10, с. 40-50.

Операторные полиномы Чебышева и решения краевых задач для уравнений второго порядка в банаховом пространстве.

Небольсина М.Н., Джалиль М.С. (Воронеж, ВГУ)

Рассматривается краевая задача

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+Au(t)=0\quad(t\in[0,a]), \tag{1}$$

$$u'(0)=\varphi,\ u(a)=\psi,\ \varphi,\psi\in D(A), \tag{2}$$

где A - генератор некоторой полугруппы класса C_0, действующей в банаховом пространстве E.

Решением задачи (1)-(2) будем называть векторнозначную функцию $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую уравнению и краевым условиям.

Определим операторные многочлены Чебышева 1-го и 2-го рода рекуррентными соотношениями

$$T_{k+1}(A)=2AT_k(A)-T_{k-1}(A),T_0(A)=I,T_1(A)=A,$$

$$U_{n+1}(A)=2AU_n(A)-U_{n-1}(A),U_0(A)=I,U_1(A)=2A.$$

Заметим, что в нашем случае определены на всем пространстве операторные рациональные дроби

$$T_k(A)\cdot T_m^{-1}(A),\ U_k(A)\cdot U_m^{-1}(A),\ T_k(A)\cdot U_m^{-1}(A),$$

при $k\leq m$.

Теорема. Если A - производящий оператор полугруппы класса C_0 имеющий тип $\omega < \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$, то задача (1) - (2) равномерно корректно разрешима и для ее решения в точках $t = \frac{m}{r}a,\ \ m, r \in N$ и $m > r$, справедливо представление

$$u(t) = u\left(\frac{ma}{r}\right) = \lim_{k\to\infty}\left[U_{mk-1}\left(I - \frac{h^2A}{2}\right)T^{-1}_{rk-1}\left(I - \frac{h^2A}{2}\right)\varphi + \right.$$

$$\left. +T_{k(r-m)-1}\left(I - \frac{h^2A}{2}\right)T^{-1}_{kr-1}\left(I - \frac{h^2A}{2}\right)\psi\right]$$

где $h = \frac{a}{kr}$.

И имеет место оценка

$$\|u(t)\| \leq K\left[\left|\frac{\sin\sqrt{\omega}(a-t)}{\sqrt{\omega}\cos\sqrt{\omega}a}\right|\|\varphi\| + \left|\frac{\cos\sqrt{\omega}t}{\cos\sqrt{\omega}a}\right|\|\varphi\|\right].$$

Топология новых интегрируемых систем на алгебрах Ли so(4), so(3,1) и e(3)

Д.В. Новиков (Москва, МГУ; novikov_dv@hotbox.ru)

Рассмотрим следующее семейство скобок Пуассона-Ли:

$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk}S_k$, $\{S_i, R_j\} = \epsilon_{ijk}R_k$, $\{R_i, R_j\} = x\epsilon_{ijk}S_k$, где ϵ_{ijk} – полностью кососимметрический тензор, а x – произвольное действительное число.

Новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера с квадратичным гамильтонианом и интегралом четвертой степени на этом семействе алгебр Ли были найдены А. В. Борисовым, И. С. Мамаевым и В. В. Соколовым. Случай Соколова:

$$H_1 = -\frac{x}{\alpha}S_1^2 + \alpha S_2^2 + S_1R_2 - S_2R_1$$
$$K_1 = \alpha Q_3(xS^2 - R^2) + x(Q_3^2 + Q_2^2) - \alpha^2(Q_3^2 + Q_1^2)$$

Случай Борисова-Мамаева:

$$H_2 = (\alpha - \frac{x}{4\alpha})S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2 + S_1R_2 - S_2R_1$$
$$K_2 = 4\alpha^2 S_2^2 S^2 + 4\alpha S_2(S_2Q_3 - S_3Q_2) + Q_2^2 + Q_3^2 - S_1^2R^2 \text{ , где } Q = S \times R.$$

Функции Казимира: $f_1 = xS^2 + R^2$, $f_2 = \langle S, R \rangle$.

Интегрируемая система на алгебре Ли $so(4)$ подробно разобран в работе [4]. Случай Борисова-Мамаева на алгебре Ли $e(3)$ разобран в [3]. Поэтому в настоящей работе мы будем изучать строение интегрирумых систем на алгебрах Ли $so(3,1)$ и $e(3)$. Мы опишем бифуркационные диаграммы отображения $f_2 \times H$ для широкого класса квадратичных гамильтонианов, охватывающего случаи Соколова и Борисова-Мамаева,топологию изоэнергетической поверхности и бифуркационную диаграмму отображения момента для случая Соколова и другие топологические особенности указанных интегрируемых систем.

Литература. 1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Ижевск. 1999. 2. Соколов В.В. Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$. Доклады РАН. 2004. т.69(1). – с.108-111. 3. Рябов П.Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова. Теоретическая и математическая физика. 2003. т.134(2). – с. 207-226. 4. Хагигатдуст Г. Топология слоения Лиувилля для новых интегрируемых случаев на алгебре Ли $so(4)$. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Приложение обыкновенных дифференциальных уравнений к расчету железнодорожных шпал

В.Б. Огарков, И.Н. Медведев, В. А. Шагеда (Воронеж, ВГЛА)

Шпала из древесного материала или бетона является основным элементом в системе железнодорожных конструкций и сооружений. Модельной задачей является расчет на изгиб упругой и вязко-упругой балки, лежащей на упругом основании с использованием дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\alpha^4 y(x) = \frac{q(x)}{EJ}; \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \tag{1}$$

Авторам предложен способ решения неоднородного уравнения с использованием комплексных функций, позволяющих существенно понизить верхний порядок дифференциального уравнения (1):

$$\frac{d^2\alpha_2}{dx^2} - i\sqrt{a_1a_2} = -iF(x) \tag{2}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dx} - i\sqrt{(-i\sqrt{a_1})}\lambda_2 = -F(x) \tag{3}$$

$$\lambda_2 = \frac{d\alpha_2}{dx} + i\sqrt{(-i\sqrt{a_1})}\alpha_2 \tag{4}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{a_1y} - i\frac{d^2y}{dx^2} \tag{5}$$

Уравнение (3) и (2) решаются с помощью простой квадратуры. Отметим, что решения однородного уравнения (1) имеют такой вид:

$$Y_1(x) = cos\alpha(x)ctg\alpha(x); Y_2(x) = \frac{\sin\alpha(x)ctg\alpha(x) + \cos\alpha(x)\sin\alpha(x)}{2\alpha} \tag{6}$$

$$Y_3(x) = \frac{\cos\alpha(x)tg\alpha(x)}{2\alpha^2}; Y_4(x) = \frac{\sin\alpha(x)ctg\alpha(x) + \cos\alpha(x)\sin\alpha(x)}{4\alpha^3} \tag{7}$$

Частное решение уравнения (1) примет такой вид:

$$\frac{1}{4\alpha^3EJ}\int\limits_0^x [\sin\alpha(x-t)\cdot ctg\alpha(x-t) - \cos(x-t)\sin\alpha(x-t)]q(t)d(x) \tag{8}$$

Определение решения уравнения (1) с использованием комплексных прогибов путем понижения порядка существенно упрощает алгоритм решения и по существу ликвидирует трудный вопрос об отыскании частного решения неоднородного уравнения высокого порядка.

Законы анизотропии в теории деформирования изделий из композиционных материалов

В.Б. Огарков, В. Г. Рахманов (Воронеж, ВГЛА)

Рассмотрена основная задача расчета на прочность, деформативность, трещиностойкость, устойчивость и температурное воздействие цилиндрической втулки из композиционного анизотропного материала.

Разрешающее дифференциальное уравнение относительно функции напряжений имеет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\lambda^2}{r^2}\varphi = 0; \lambda = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \tag{1}$$

Рассматривается двухточечная краевая задача:

$$\sigma_r(r = r_1) = -p; \sigma_r(r = r_2) = -q \tag{2}$$

Здесь p и q - заданные внутренние и внешние давления; E_r и E_θ - соответствующие радиальный и тангенциальный модули упругости, характеризующий анизотропию материала.

При воздействии только одного внутреннего давления р напряжения имеют вид:

$$\sigma_r = -\frac{pr_1^{(1+\lambda)}}{[1-(\frac{r_1}{r_2})^{(1+\lambda)}]r^{(1+\lambda)}}[1-(\frac{r}{r_2})^{2\lambda}]; \sigma_\theta = \frac{\lambda pr_1^{(1+\lambda)}}{[1-(\frac{r_1}{r_2})^{2\lambda}]r^{(1+\lambda)}}[1+(\frac{r}{r_2})^{2\lambda}] \tag{3}$$

При действии только одного внешнего давления q:

$$\sigma_r = \frac{q(\frac{r_2}{r})^{(1+\lambda)}[1-(\frac{r}{r_1})^{2\lambda}]}{[(\frac{r_2}{r_1})^{2\lambda}-1]}; \sigma_\theta = \frac{\lambda q(\frac{r_2}{r})^{(1+\lambda)}[1+(\frac{r}{r_1})^{2\lambda}]}{[(\frac{r_2}{r_1})^{2\lambda}-1]} \tag{4}$$

Из расчетов, проведенных по формулам (3) и (4) следует, что радиальное напряжение σ_r монотонно убывает при увеличении параметра анизотропии λ, а напряжение σ_θ - наоборот.

Поскольку всегда $\sigma_\theta > \sigma_r$, то это означает, что анизотропия приводит к некоторому упрочнению втулки (особенно при действии внутреннего давления p - сверление).

Применение некоторых функций от квадратичного матричного пучка к расчету RLC-цепей

М.Н. Орешина (Липецк, ЛГТУ; M_Oreshina@mail.ru)

Рассмотрим матричную функцию

$$F(N, D, B) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda^2 N + \lambda D + B)^{-1}\, d\lambda, \tag{1}$$

где N, D и B — квадратные матрицы (обычно высокого порядка), контур Γ охватывает спектр пучка $\lambda \mapsto \lambda^2 N + \lambda D + B$, а f — функция, аналитическая внутри Γ. Функции такого вида возникают, например, при расчете RLC-цепей (см. рисунок 1), в частности, можно показать, что матричная импульсная характеристика цепи в момент времени t имеет вид (1) с $f(\lambda) = e^{\lambda t}$.

Одна RLC-линия

В докладе предлагается метод приближенного вычисления функций (1). На рисунке 2 приведен пример приближенного расчета цепи, изображенной на рисунке 1.

Рис. 1. Приближенные токи $\widetilde{I}_0$ (слева) и $\widetilde{I}_n$ (справа) для случая $R = 3.125/n$, $G = 0.005/n$, $L = 100/n$, $C = 0.04/n$, $n = 100$

Движение вязкоупругой среды со свободной границей

В.П.Орлов

Пусть $\Omega_t \in R^n,\ n \geqslant 2$, является семейством ограниченных областей с границей $\Gamma_t,\ \mathcal{Q}_{T_0} = \{(t,x) : t \in [0,T_0],\ x \in \Omega_t\}$, $\mathcal{S}_{T_0} = \{(t,x) : t \in [0,T_0],\ x \in \Gamma_t\}$. Рассматривается начально-граничная задача

$$V_t + \sum_{i=1}^{n} V_i \partial V/\partial x_i - \mu \triangle V - \mathrm{Div}\, G(B_x(V)) - \nabla Q = F(t,x),$$

$$\nabla \cdot V(t,x) = 0, (t,x) \in \mathcal{Q}_{T_0};$$

$$V(0,x) = v^0(x),\ x \in \Omega_0,\ T(V,Q)n(x) = -n(x)P_0(t,x),\ (t,x) \in \mathcal{S}_{T_0},$$

описывающая движение сплошной среды, занимающей в момент времени t положение Ω_0. Здесь вектор-функция $V(t,x) = (V_1(t,x), ..., V_n(t,x))$ — скорость среды в точке x в момент t, скалярная функция $Q(t,x)$ — давление, $T(V,Q)$ — тензор напряжений среды с компонентами

$$T_{ij} = -\delta_{ij} Q + \mu(\partial V_i/\partial x_j + \partial V_j/\partial x_i),$$

μ - положительная константа, $G(Z)$ — $n \times n$ матрица с коэффициентами $g_{ij}(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nn})$ (z_{ij} - коэффициенты матрицы Z), $n(x)$ - вектор внешней нормали к границе Γ_t в точке x, Div - дивергенция матрицы. Далее, $B(V) = z(0;t,x)$, где $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши (в интегральной форме) $z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau V(s, z(s;t,x))\, ds, \quad \tau \in [0,T_0], \quad (t,x) \in \mathcal{Q}_{T_0}$, а $B_x(V) = z_x(0;t,x)$ - матрица Якоби для $z(0;t,x)$. В задаче искомыми являются вектор-функция V, скалярная функция Q и множество $\mathcal{Q}_{T_0}$.

Установлена локальная теорема существования и единственности сильных решений задачи гельдеровских пространствах при необходимых условиях на данные.

Работа частично поддержана грантом 04-01-0081 РФФИ.

Критерий 2-регулярности для управляемых систем

Н.Г. Павлова

(Москва, РУДН; natasharussia@mail.ru)

Рассмотрим управляемую динамическую систему

$$\dot{x} = f(x, u, t),\ t \in [t_1, t_2], \tag{1}$$

$$x(t_1) = \sigma, x(t_2) = x_2, \tag{2}$$

$$K(\sigma, x_2) = 0. \tag{3}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^* \in R^n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in R^m$, f — n-мерная и K — k-мерная вектор-функции. Допустимое управление — всякая функция $u \in L_\infty^m[t_1, t_2]$.

Фиксируем точку $(\hat{\sigma}, \hat{u}(\cdot)) \in R^n \times L_\infty^m[t_1, t_2]$, такую, что $\hat{x}(t_1) = \hat{\sigma}$. Для заданных $\xi(\cdot), \eta(\cdot) \in L_\infty^m[t_1, t_2]$ через $\delta_1 x_\xi(\cdot)$ обозначим решение

$$\frac{d}{dt}\delta_1 x_\xi = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta_1 x_\xi + \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\xi(t),\ \delta_1 x_\xi(t_1) = 0,$$

а через $\delta_2 x_{\xi\eta}(\cdot)$ — решение

$$\frac{d}{dt}\delta_2 x_{\xi\eta} = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\delta_2 x_{\xi\eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)[\delta_1 x_\xi(t), \delta_1 x_\eta(t)] +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)[\delta_1 x_\xi(t), \eta(t)] + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)[\delta_1 x_\eta(t), \xi(t)] +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)[\xi(t), \eta(t)],\ \delta_2 x_{\xi\eta}(t_1) = 0.$$

Определение. Будем говорить, что для задачи (1)–(3) в точке $(\hat{\sigma}, \hat{u}(\cdot))$ выполнено условие 2-регулярности по направлению $h \in L_\infty^m[t_1, t_2]$, если

$$\forall\, y \in R^k\ \ \exists \xi_1, \xi_2 \in L_\infty^m[t_1, t_2] : \frac{\partial K}{\partial x_2}(\hat{\sigma}, \hat{x}_2)\delta_1 x_{\xi_1}(t_2) +$$

$$+\frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2}(\hat{\sigma}, \hat{x}_2)[\delta_1 x_h(t_2), \delta_1 x_{\xi_2}(t_2)] + \frac{\partial K}{\partial x_2}(\hat{\sigma}, \hat{x}_2)\delta_2 x_{h\xi_2}(t_2) = y.$$

Для системы (1)–(3) получены необходимые и достаточные условия, гарантирующие существование h, вдоль которого выполнено условие 2-регулярности.

Классификация потенциальных структур на пространстве Минковского по подгруппам группы Пуанкаре

М.А. Паринов (Иваново, ИвГУ; parinov@ivanovo.ac.ru)

На основе классификации И. В. Белько подгрупп группы Пуанкаре [1] автором получена классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре [2, 3]. Для получения представителей классов пространств Максвелла в работе [3] используются классы потенциальных структур на пространстве Минковского, допускающих те же самые подгруппы группы Пуанкаре. Частично классификация потенциальных структур опубликована в [4, 5], ее полное изложение впервые предпринято в статье, подготовленной для журнала "Фундаментальная и прикладная математика" с публикацией в 2006 году. Помимо того, что эта классификация преставляет самостоятельный интерес, она позволила уточнить описание некоторых классов пространств Максвелла. В частности, некоторые из классов $C_{p,q}$, считавшиеся в [2, 3] пустыми, оказались непустыми. Найдены потенциалы, возможно, представляющие интерес с точки зрения физики.

Литература. 1. Белько И. В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 1. – С. 5–13. 2. Паринов М. А. Пространства Эйнштейна – Максвелла и уравнения Лоренца. Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003. – 180 с. 3. Паринов М. А. Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10. № 1. – С. 183–237. 4. Полежаева Н. С., Паринов М. А. Групповая классификация 4-потенциалов, допускающих параболические вращения. Иваново: ИвГУ, 2003. – 23 с. – Деп.в ВИНИТИ 31.07.2003, № 1489-В2003. 5. Воробьев А. И. Классификация потенциальных структур, инвариантных относительно гиперболических винтов // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. 2004. № 1. – С. 41–50.

Признаки существования и устойчивости

ограниченных решений нелинейных разностных уравнений

А.И. Перов, Р.Б. Фетисов. (Кафедра нелинейных колебаний,Факультет прикладной математики, информатики и механики,ВГУ)

Рассмотрим нелинейную систему с дискретным временем [2],[5]

$$x(n+1) = Ax(n) + f[n, x(n)], \tag{1}$$

Здесь "время" n принимает всевозможные целые значения, $n \in \mathrm{Z}$ (множество целых чисел), а вектор при каждом рассматриваемом n принадлежит N- мерному пространству C^N, нормированному каким-либо образом.

Предположим, что спектр матрицы A в комплексной плоскости C не пересекается с единичной окружностью $\mathrm{T} = \{\lambda \in C \ : \ |\lambda| = 1\}$. В этом случае линейная система с дискретным временем

$$x(n+1) = Ax(n) + f[n, x(n)] \tag{2}$$

при любой ограниченной дискретной функции $f(n)$ имеет единственное ограниченное решение $x(n)$, причем

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n-m) f(m), \tag{3}$$

где $G(n)$ так называемая дискретная ограниченная функция Грина. Она обладает тем свойством, что

$\|G(n)\| \leqslant cq^{|n|}, \quad n \in \mathrm{Z}$,(4)для некоторых постоянных c и q : $c > 0, \ 0 < q < 1$. Введем следующую важную константу

$$æ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|G(n)\|. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что в силу оценки (4) ряд в (4) сходиться и $\text{æ} \leqslant c(1+q)/(1-q)$.

В силу сделанного нами предположения относительно спектра матрицы A резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ определена на всей единичной окружности T. Введем еще одну важную константу

$$\sigma = \max_{\lambda \in \mathrm{T}} \left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\|, \tag{5}$$

где I есть единичная $N \times N$- матрица. Нетрудно показать, что

$$\sigma \leqslant \text{æ}. \tag{6}$$

Предположим, что нелинейная функция $f(n,x): \ \mathrm{Z} \times C^N \to C^N$ равномерно по n удовлетворяет условию

$$\| f(n,x) - f(n,y) \| \leqslant \rho \left(\| x - y \| \right), \tag{7}$$

где $\rho(n), \ n \geqslant 0$, обладает следующими свойствами: она непрерывна и не убывает, $\rho(0) = 0$ и $\rho(u+v) \leqslant \rho(u) + \rho(v)$ при $u, v \geqslant 0$. Примерами таких функций могут служить lu(тогда (7) превращается в условие Липшица), $lu^{\alpha}(0 < \alpha < 1)$ и т.п.

Ограниченное решение системы (1) часто можно получить методом последовательных приближений

$$x^{[k]}(n+1) = Ax^{[k]}(n) + f[n, x^{[k-1]}(n)], \tag{8}$$

причем за нулевое приближение $x^{[0]}(n)$ может быть принята произвольная ограниченная дискретная функция, а в качестве $x^{[k]}(n)$ выбирается единственное ограниченное решение линейной дискретной системы (2) при известной ограниченной дискретной функции $f(n) \equiv f[n, x^{[k-1]}(n)]$.

В первых двух теоремах предполагается, что выполнено следующее основное условие

$$ æ\rho(u) < u, \quad u \geqslant 0. \tag{9} $$

нетрудно показать, что функция $v = \tau(u)$, где $\tau(u) \equiv u - æ\rho(\mathrm{u})$ при $\mathrm{u} \geqslant 0$ имеет обратную $u = \tau^{-1}(v)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше ограничения. Пусть выполнено основное условие(9). Тогда нелинейная дискретная система (1) имеет единственное ограниченное решение $x(n)$.Это решение удовлетворяет оценке*

$\|x(n)\| \leqslant \tau^{-1}(æa)$,(11)

где постоянная a*выбрана так, чтобы* $\|\mathrm{f}(\mathrm{n}, 0)\| \leqslant a$. *Ограниченное решение* $\mathrm{x}(\mathrm{n})$*можно получить методом последовательных приближений (8), причем* $\mathrm{x}^{[\mathrm{k}]}(\mathrm{n}) \to \mathrm{x}(\mathrm{n})$ *равномерно по* n.

Доказательство теоремы 1 проводиться в банаховом пространстве l_∞ двусторонних ограниченных последовательностей $\mathrm{x}(\mathrm{n})$ с нормой $\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup \|x(n)\| \quad (n \in \mathrm{Z})$ с применением принципа обобщенного сжатия М.А. Красносельского.

В приводимой ниже теореме 2, так же как и в теореме 4, $\mathrm{x}(\mathrm{n})-$ это полученное в теореме 1 (теореме 3) ограниченное решение системы (1), $\mathrm{y}(\mathrm{n})-$ произвольное решение этой же системы, рассматриваемое при $\mathrm{n} = 0, 1, 2, ...$; $\mathrm{r}-$ произвольное положительное число; ри q $-$ суммы кратностей собственных значений матрицы A, лежащие внутри и, соответственно, вне единичного круга, $\mathrm{p} + \mathrm{q} = \mathrm{N}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все перечисленные выше ограничения. Пусть выполнено основное условие(9). Тогда: если спектр матрицы* A *лежит внутри единичного круга, то ограниченное решение абсолютно устойчиво, т.е.*

$$ \lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \sup_{\|x(0)-y(0)\| \leqslant r} \|x(n) - y(n)\| = 0; \tag{10} $$

если спектр матрицы A *лежит вне единичного круга, то ограниченное решение абсолютно неустойчиво, т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty}\inf_{\|x(0)-y(0)\|\geqslant r}\|x(n)-y(n)\|=+\infty;\tag{11}$$

если спектр матрицы A *имеет точки как внутри, так и вне единичного круга, то существуют такие многообразия* $\Re_i \Re_e$ *размерностей* pq *соответственно, лежащие в пространстве* C^N, *чтоб при дополнительном предположении* $y(0)\in\Re_i$, *имеет место (10), и при дополнительном предположении* $y(0)\in\Re_e$ *имеет место (11).*

Доказательство абсолютной устойчивости вытекает из теоремы 2 статьи М.А. Красносельского и А.В. Покровского [3]. Доказательство абсолютной неустойчивости сводиться к этому случаю обращением времени. Последнее утверждение теоремы обосновывается рассуждениями из монографии Ю.В. Трубникова и А.И. Перова [4], относящимися к случаю индефинитной монотонности.

Теперь мы несколько ослабим условие (9), заменив его более либеральным новым основным условием

$$\sigma\rho(u) < u, \quad u > 0,\tag{12}$$

но зато предъявим более жесткие требования к метрике - потребуем, чтобы она была евклидова.

Теорема 3. *Пусть выполнены все перечисленные выше ограничения. Пусть выполнено основное условие(12). Тогда нелинейная дискретная система (1) имеет единственное ограниченное решение.*

Мы не располагаем пока в удовлетворительном виде ни оценкой ограниченного решения в этом случае (см. 11), ни доказательством сходимостей последовательных приближений (8).

Теорема 3 доказывается следующим образом. Сначала берется произвольный отрезок $[a,b]$ $(a,b\in Z)$ и с помощью дискретного преобразования Фурье и равенства Парсеваля для периодических функций доказывается существование и единственность такого решения $x(n)$ системы (1) $(a\leqslant n\leqslant b)$, для которого $x(a)=x(b)$. Оно удовлетворяет системе (1) при $a\leqslant n\leqslant b-1$ и обозначается $x[a,b](n)$. Используя один результат А.Г. Баскакова [1], можно утверждать, что существует такая постоянная c, не зависящая от a и b, что $\|x[a,b](n)\| \leqslant c$ при $a \leqslant n \leqslant b$. После этого берется произвольная последовательность отрезков $[a_k, b_k]$, где $a_k \to -\infty$,$b_k \to +\infty$; для построенных решений $x[a_k, b_k](n)$ справедлива равномерная оценка $\|x[a_k, b_k](n)\| \leqslant c$ при $a_k \leqslant n \leqslant b_k,\ n = 1, 2, \ldots$. Без ограничения общности можно считать, что эта последовательность сходиться при каждом n(иначе мы не перешли к подпоследовательности), $x[a_k, b_k](n) \to x(n)$. Ясно, во-первых, что $x(n)$есть решение системы (1), определенное при всех n, а, во-вторых, $\|x(n)\| \leqslant c$ при всех n. Доказательство существования ограниченного решения завершено.

Теорема 4. *Пусть выполнены все перечисленные выше ограничения. Пусть выполнено основное условие(12). Тогда справедливы все утверждения теоремы 2.*

Литература.

1. Баскаков А.Г. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами / А.Г. Баскаков, А.И. Пастухов – Сибирский математический журнал, т.42, №6, 2001. – 1231-1243 с.

2. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд – М: Наука, 1967. – 376 с .

3. Красносельский М.А. Об абсолютной устойчивости систем с дискретным временем / М.А. Красносельский, А.В. Покровский – Автоматика и телемеханика, №2, 1978. – 42-52 с.

4. Трубников Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю.В. Трубников, А.И. Перов – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.

5. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер – М: Мир, 1971. – 312 с.

Об оптимальности пространств $S^{\pm}_{1,k}$ в функциональных решетках (структурах)

С.В. Писарева

(Воронеж, ВГУ; svet@main.vsu.ru)

Пусть E - банахово пространство, $S^{\pm}_{p,l,k}(E)(p \geq 1, l > 0)$ — пространства векторнозначных функций $f(x)(x \in R^1)$ со значениями в E, для которых конечны нормы

$$\|f\|_{S^{\pm}_{p,l,k}} = \sup_{t \in R^1} \left[\frac{1}{l} \int_0^l k(s) \|f(s \pm t)\|^p ds \right]^{\frac{1}{p}},$$

где функция $0 < k(s) \in C^{(1)}(0, \infty)$ суммируема в нуле.

Рассмотрим оператор

$$(K_{\pm} f)(t) = \int_0^{\infty} K(x) f(t \pm x) dx,$$

и функциональное пространство $F^{\pm}_K$, определяемое нормой

$$\|f\|_{F^{\pm}_K} = \|f\|_{S^{\pm}_{1,K}} = \sup_{t \in R^1} \int_0^{\infty} K(x) |f(t \pm x)| dx =$$

$$= \sup_{t \in R^1} (K_{\pm}|f|)(t) = \|K_{\pm}|f|\|_{\infty}.$$

Очевидно неравенство

$$\|K_{\pm} f\|_{\infty} \leq \|f\|_{F^{\pm}_K}. \tag{1}$$

Теорема. Пусть F - функциональная банахова решетка функций $f(t)$ на R^1 с нормой $\| \cdot \|_F$. Для того, чтобы выполнялось неравенство

$$\|K_{\pm} f\|_{\infty} \leq m \|f\|_F,$$

где m от f не зависит, необходимо и достаточно, чтобы F было вложено в $F^{\pm}_K$ и

$$\|f\|_{F^{\pm}_K} \leq m \|f\|_F.$$

Таким образом пространства $F^{\pm}_K$ являются максимально широкими пространствами, при которых выполняется (1).

Следствие. Если ядро оператора $K(x)$ представимо в виде $K(x) = \rho(x)k(x)$, где $\rho(x) \in L_1(0, +\infty)$, $k'(x) \geq 0$, то в этом случае пространства $F_K^{\pm}$ совпадают с классическими пространствами Степанова S_1. Если же $k'(x) < 0$, то $F_K^{\pm}$ являются пространствами $S_{1,k}^{\pm}$.

Литература.

1. Левитан, Б.М. Почти-периодические функции/ Б.М. Левитан. - М.: Гос.изд-во техн.-теор.лит, 1953. - 396с.

2. Писарева, С.В. Некоторые свойства обобщенных пространств Степанова/ С.В. Писарева// Математические модели и операторные уравнения. - Воронеж: ВорГУ - 2005. - Т.3. - С.65-72.

О слабосильном уравнении Эйлера на геометрическом графе

Ю.В.Покорный, Н.Н.Рябцева (Воронеж, ВГУ)

Рассматривается вариационная задача

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx - \int_{\Gamma} fudx + \sum_{u(a)\in\partial\Gamma} (u(a), u'(a+0)) \qquad (1)$$

на множестве достаточно гладких на Γ функций $u : \Gamma \to R$. Функция $F(x, u, u')$ вместе с функциями $\varphi_a(\cdot, \cdot)$ предполагаются достаточно гладкими, граф Γ – ориентированным.

Для задачи $\Phi \to min$ в классе функций $u(x)$ линейно обусловленных на границе $\partial\Gamma$ графа Γ мы называем слабым уравнением Эйлера равенство нулю его первой вариации $\Delta\Phi$, т.е. равенство

$$\int pu'h'dx - \int fhdx + \sum_{u(a)\in\partial\Gamma} F_a \frac{\partial}{\partial u} h(a) + \sum \frac{\partial\varphi_a}{\partial u'} h'(a+0) = 0 \qquad (2)$$

При этом мы $\Delta\Phi h$ рассматриваем как элемент пространства, сопряженного к $C^1[\Gamma]$, где $[\Gamma]$ означает формальное объединение замыканий всех ребер Γ (напомним, что в Γ все ребра являются открытыми интервалами) и $C^1[\Gamma]$ рассматривается как топологическое произведение соответствующих банаховых пространств вида $C^1[\gamma]$ со стандартными сильными топологиями. Здесь $[\gamma]$ формальное замыкание (добавление концов) ребра-интервала γ.

Распространение классической теоремы Рисса на $C^1[\Gamma]$ проводит из слабого уравнения Эйлера (2) к соображениям типа классической леммы, классического результата Дю-Буа-Реймонда, что позволяет реализовать уравнение (2) на каждом ребре Γ в виде

$$[F_{u'}]_{\alpha}{}^{\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} F_u dx = const \tag{3}$$

для любых точек α, β ребра γ и вдобавок к алгебраического типа уравнениям в каждой вершине γ. Эти последнего типа уравнения содержат типичные для теории задач на графах условия трансмиссии

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} F_{u'}^{(\varphi_i)}(a, u_0(a), (u_0)'_i(a+0)) = 0.$$

Пример моделирования существенно разрывного процесса с помощью локально явного уравнения

И.Н.Прядко (Воронеж, ВГУ; pryadko_irina@mail.ru)

Локально явное уравнение [1] – это уравнение с нелинейным дифференциалом [2]

$$u(t+dt)-u(t)=D(t,u(t),dt)+o(dt),$$

у которого при любом допустимом начальном условии имеется сильное (см. [1]) решение.

Такие уравнения могут описывать негладкие процессы, и даже разрывные, причем с разрывами не только первого, но и второго рода. В качестве примера рассмотрим систему, условно называемую системой "контроль-коррекция". Работа системы "контроль-коррекция"может быть описана с помощью системы уравнений с нелинейными дифференциалами. Первое уравнение

$$\Delta\tau+o(dt)=\begin{cases} 0, & \text{если } \ t<\tau(t) \text{ или } dt=0, \\ a(t,x(t)), & \text{если } \ t=\tau(t) \text{ и } dt>0 \end{cases} \tag{1}$$

($\Delta\tau=\tau(t+dt)-\tau(t)$, $a(t,x)>0$) описывает соответствие между "состоянием процесса" x и "моментом контроля" τ.

Второе

$$x(t+dt)-x(t)+o(dt)=$$

$$\begin{cases} f(\tau(t),t+dt)-f(\tau(t),t), & \text{если } \ t<\tau(t), \\ f(t+a(t,x(t)),t+dt)-f(t+a(t,x(t)),t), & \text{если } \ t=\tau(t) \end{cases} \tag{2}$$

определяет состояние процесса. Функция f непрерывна слева по второму аргументу.

Утверждение. *Система* (1), (2) *является локально явной.*

Для ее сильного решения (τ,x) приращение $x(t)$ во времени локально совпадает с приращением $f(\tau,t)$ и, следовательно, имеет разрывы второго рода, если они есть у f.

Литература. 1. Прядко И.Н. Садовский Б.Н. О локально явных моделях некоторых негладких систем// Автоматика и телемеханика. 2004.№10 – с. 40-50. 2. Kloeden P.E., Sadovsky B.N., Vasil'eva I.E. Quasi-flows and equations with nonlinear differentials//Nonlinear analysis. 2002.V.51 – p. 1134-1158.

Обобщение формул Эрланга для систем обслуживания с ограниченным объемом

Рославлев Ю.Р. (Москва, МГУ)

Рассматривается модель Эрланга, в которой требования содержат в себе некоторую информацию (обладают объемом), и для ее хранения в системе требуется память, общий ресурс которой ограничен.

В систему поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью α, каждое требование характеризуется тремя случайными величинами: количеством приборов, необходимых для обслуживания, временем обслуживания и объемом. Независимо от времени поступления в систему, требование с вероятностью q_m должно обслуживаться m приборами, имеет случайный объем ζ_m и время обслуживания ξ_m (всего в системе n приборов). Все эти величины независимы между собой. Функция распределения объема m-требования - $L(x)$, функция распределения времени его обслуживания - $B(t)$. Обозначим через $\nu_j(t)$ число приборов, обслуживающих требование с номером j в момент времени t, а через $\sigma_j(t)$ – объем этого требования, число требований находящихся в системе - $\eta(t)$. При введении дополнительного параметра - остаточного времени обслуживания $\xi_j^*(t)$ – получим марковский процесс, описывающий эволюцию системы:

$$X(t) = (\eta(t),\ \sigma_j(t),\ \nu_j(t),\ \xi_j^*(t),\ j=1,\dots\eta(t)).$$

Для вероятностей состояний марковского процесса составляется система дифференциальных уравнений. Вопрос о существовании и единственности стационарной меры решается здесь достаточно просто, поскольку исходный процесс - регенерирующий. Для этой системы оказывается возможным найти решение в явном виде:

$$P\{\eta = k,\, \sigma_i < x_i,\, \nu_i = r_i,\, \xi_i^* < y_i,$$
$$i\text{=}1,\ldots k\}\text{=}p_0 \tfrac{\alpha^k}{k!} \prod_{j=1}^{k} q_{r_j} L(x_i) \int_0^{y_i} [1 - B(y_i)];\ \mathbf{(1)}$$

$$k\text{=}1,\ldots,n;\ x_{(k)} < V; r_{(k)} \leqslant n;\ n \geqslant 2.$$

Классические формулы Эрланга следуют из полученных соотношений, если предположить, что суммарный объем неограничен ($V = \infty$), и все требования с вероятностью 1 занимают один прибор: $q_1 = 1, q_2 = \ldots = q_n = 0$.

С помощью формулы вероятности (1) состояний марковского процесса в стационарном режиме, найдены вероятность нахождения в системе ровно k требований, вероятность отказа из-за нехватки нужного числа приборов или недостатка памяти в системе, а также осуществлен переход к случаю бесконечного числа приборов.

Автор выражает благодарность проф. Афанасьевой Л.Г. за ценные замечания, сделанные при подготовке данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 05-10-00256.

Литература. 1. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами, М., Изд-во МГУ, 1980; 110 с.

Эргодическая теорема для некоторой системы специального вида

Рославлева Ю.А., Афанасьева Л.Г.

Изучается новый в теории массового обслуживания класс моделей, основное отличие которого от классических систем $M/G/l/r$ заключается в том, что приборы могут начинать обслуживание только в случайные моменты времени, образующие r независимых процессов восстановления.

Итак, рассматривается система, состоящая из r приборов, в которую поступает пуассоновский поток требований. Придя в систему, требование встает в очередь, ожидая обслуживающий прибор. Дождавшись прибор, требование начинает обслуживаться, после чего покидает систему, а освободившийся прибор начинает новое обслуживание, независимо от того есть в системе свободные требования или надо работать "вхолостую". Времена работы приборов независимы друг от друга и от входящего потока требований и одинаково распределены. Модели такого вида возникают, например, в транспортных сетях, когда моменты доступности прибора можно трактовать как моменты его появления в системе, а интервалы между ними как времена его движения. Тогда обслуживание состоит в перемещении требования из системы в какое-то другое место (в другой узел в транспортных сетях).

С помощью введения дополнительных переменных, строится марковский процесс, описывающий функционирование системы:

$$X(t) = \{q(t),\, \xi_1(t),\, \dots,\, \xi_r(t)\}, \text{ где}$$

$q(t)$ – число требований в очереди, $\xi_i(t)$– остаточное время работы i– го прибора.

Поскольку специфика системы не позволяет выделить подходящие точки регенерации, вопрос об эргодичности процесса $X(t)$не удается решить с помощью теоремы Смита.

Для доказательства эргодичности данного процесса рассматривается вложенная в $X(t)$ цепь Маркова $X(n\Delta)$, к которой применяется эргодическая теорема, приведенная в книге А. А. Боровкова. Основные трудности (и интерес!) в доказательстве представляет построение мажорирующей меры и выделение некоторого множества, среднее время возвращения в которое конечно.

Имеет место следующий результат:

Теорема. *Если носителем функции распределения времени обслуживания $B(x)$ является $[0, T]$, $T < \infty$, и $B(x)$ содержит абсолютно непрерывную компоненту, то определенный выше марковский процесс $X(t) = \{q(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_r(t)\}$ имеет эргодическое распределение.*

В случае, когда в очереди для требований всего одно место, найдено стационарное распределение в системе. Оказалось, что в стационарном режиме вероятность застать систему свободной существенно зависит от распределения времени обслуживания.

Данную модель можно обобщить, рассмотрев очередь для приборов. В случае, когда времена работы приборов имеют показательное распределение, число требований в системе $q(t)$- является процессом размножения и гибели с параметрами, зависящими от числа мест в очереди для требований и для приборов. Рассмотрены несколько случаев относительно этих параметров, и найдены необходимые и достаточные условия существования эргодического режима для процесса $q(t)$ и его вид.

Литература 1. Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов

Об одной начально-краевой задаче для вырожденного нестационарного уравнения

М.А. Сагадеева, В.Е. Федоров
(Челябинск, ЧелГУ; sam@csu.ru, kar@csu.ru)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathfrak{J}$ рассмотрим задачу

$$(\lambda - \Delta)u(x,0) = (\lambda - \Delta)u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathfrak{J}, \tag{2}$$

$$(\lambda - \Delta)u_t(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)u(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathfrak{J}, \tag{3}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, вещественные функции $m_{ij}(x,t)$ таковы, что $m_{ij}(x,t) = m_{j\,i}(x,t)$, $i,j = \overline{1,n}$. Подобный вид имеют многие уравнения математической физики [1], [2].

Возьмем пространства $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $\mathfrak{F} = H^{-1}(\Omega)$ и обозначим через Δ_0 оператор Лапласа Δ, действующий из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Обозначим собственные векторы, соответствующие $\lambda \in \sigma(\Delta_0)$, через $\varphi_l(x)$, $l = \overline{1,r}$, где r – кратность λ в спектре $\sigma(\Delta_0)$.

Теорема 1. *Пусть* $m_{ij} \in C^1(\mathfrak{J}; L_\infty(\Omega))$, $i,j = \overline{1,n}$, $g \in C^1(\mathfrak{J};\mathfrak{F})$, *при всех* $t \in \mathfrak{J}$ *матричная функция*

$$\mathbb{M}_t = \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} m_{ij}(x,t)\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\ dx \right\|_{k,l=1}^{r}$$

такова, что $\det \mathbb{M}_t \neq 0$. *Тогда существует единственное решение* $u \in C^1(J;\mathfrak{U})$ *задачи* (1) – (3).

Литература. 1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // ПММ. 1960. Т.24, № 5. – С.58-73. 2. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. Москва, Наука. 1998. – 448 с.

О решении одной граничной задачи для вырождающегося псевдодифференциального уравнения

Савченко Ю.Б., Ткачева С.А. (Воронеж)

В полупространстве $R_n^+ = \{(x,t) | x \in R_{n-1}, 0 < t < \infty\}$ рассматривается уравнение

$$Lu - \lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Bu - \lambda u = f(x,t); \quad f(x,t) \in L_p(R_n^+). \tag{1}$$

Здесь $B \equiv B(D_x, D_{\alpha,t}) = F^{-1}_{\xi \to x} F_{\alpha p} \left[b(\xi,\eta) F_{\alpha p} F_{x \to \xi} \right]$ - весовой псевдодифференциальный оператор (ВПДО) порядка $q > 1$, $F_{\alpha p}$ - весовое преобразование Фурье (см. [1]). Символ $b(\xi,\eta)$ ВПДО $B(D_x, D_{\alpha,t})$ удовлетворяет условию

I. Существует Q_B, $0 \leqslant Q_B < \pi$ такое, что при всех $(\xi,\eta) \in R_n$ и $\lambda \in C$, $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$, $|\theta| < \pi - \theta_B$ выполняются оценки

$$|b(\xi,\eta) - \lambda| \geqslant C(\theta) \left(|\lambda|^{2/q} + |\xi|^2 + \eta^2 \right)^{q/2}; \quad |D_\xi^{k'} D_\eta^{k_n} b(\xi,\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant C_k \left(1 + |\xi|^2 + \eta^2 \right)^{\frac{q-|k|}{2}},$$

здесь $k = \{k', k_\eta\}$, $k' = \{k_1, k_2, ..., k_{n-1}\}$; $|k| = 0, 1, 2, ...$

Для уравнения (1) ставится граничная задача

$$(au'_t + bu)|_{t=0}, \quad b - a\sqrt{\lambda} \neq 0. \tag{2}$$

Исследуется существование решения задачи (1)-(2) в пространствах типа Соболева - Слободецкого $H^s_{\alpha,p}(R_n^+)$, $(s \in R_1, p > 1)$ функций $u(x,t)$, $(x,t) \in R_n^+$ с нормой $\|u\|_{s,p,\alpha} = \|\Lambda_s u\|_p$, где Λ_s -ВПДО с символом $\left(1 + |\xi|^2 + \eta^2\right)^{s/2}$, $\| \cdot \|_p$ - норма в пространстве $L_p(R_n^+)$.

При выполнении указанных условий с помощью метода Гривара-Да Прато (см. [2]) доказывается теорема существования единственного решения задачи (1)-(2).

Теорема. Пусть выполнено условие I, $f(x,t) \in H^s_{\alpha,p}(R^+_n)$. Тогда при $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ существует единственное решение $u(x,t) \in H^2_p(R^+_n) \bigcap H^s_{\alpha,p}(R^+_n)$ задачи (1),(2).

Уравнение (1) и граничные задачи для него в пространствах $L_2(R^+_n)$ изучались в работах В.П.Глушко и А.Д.Баева.

Литература 1. Глушко В.П., Савченко Ю.Б. Вырождающиеся эллиплические операторы высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи // Итоги науки и техники. ВИНИТИ.- М., 1985. - т.23.- с.125-218. 2. Da Prato G., Grisvard P. Sommes d'operateurs lineaires et equation differentielles operationelles // J. de Math. pures et appiqueees .- Vol. 54, № 3, 1975.- p.305-387.

О корректности некоторых классов краевых задач в бесконечном слое

Савченко Г.Б., Ярцева Н.А. (Воронеж)

В работе [1] рассматривается система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, разрешенная относительно первой производной "по времени в бесконечном слое $0 \leqslant t \leqslant a$, $x \in R^m$.

Для таких систем ставятся нелокальные по t граничные условия достаточно общего вида. Получены достаточные условия L_2 - коректности таких задач.

В случае, когда характеристическая матрица системы $A(s)$ $(s \in R^m)$ удовлетворяет условию $\|exp(yA(s))\| \leqslant \varepsilon exp(yp(s))$ при $|y| \leqslant a$, где ε - некотороая положительная постоянная, а $p(s)$ - вещественный полином, эти условия могут быть ослаблены, а именно достаточно требовать ограниченности $\|B(s)\|p^{-1}(s)$ при $p(s) \to +\infty$.

Здесь $B(s)$ - характеристическая матрица граничных условий, а под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма матрицы.

Литература 1. Савченко Г.Б. О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений / Г.Б.Савченко.- Диф.уравнения.- T.XIV, № 11, 1978, - с.2079-2082.

О решении задачи Дирихле для некоторого вырождающегося уравнения в гильбертовом пространстве

Савченко Ю.Б., Ярцева Н.А. (Воронеж)

Рассматривается вырождающееся дифференциальное уравнение

$$(\alpha^2(t)u')' - B(t)u' - Au = f(t), \quad t \in R_1^+ \tag{1}$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Здесь $\alpha(t)$ ($t \in R_1^+$) - весовая функция, удовлетворяющая условиям $\alpha(t) \in C^1[0,\infty)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ при $t \geqslant d > 0$. Оператор A - линейный самосопряженный полуограниченный снизу оператор с плотной в H областью определения $D(A)$, имеющий вполне непрерывный обратный оператор A^{-1}. Оператор $B(t)$ представим в виде $B(t) = B_1 + iB_2(t)$, где B_1 - ограниченный в H оператор; $B_2(t)$ - самосопряженный в H оператор с областью определения, не зависящей от $t \in [0,\infty)$, причем $D(B_2) \supseteq D(A^{1/2})$.

Условие 1. Существует ограниченный в H оператор T такой, что $A^{1/2}B_1A^{-1/2} = T^*T$, и при некотором $\beta > 0$ справедлива оценка $Re(B_1v, v) \geqslant \beta\|v\|^2$, $v \in H$.

Мы будем использовать пространства $L_2(0,\infty;H)$ функций $u(t)$, $0 < t < \infty$, со значениями в гильбертовом пространстве H измеримых по Бохнеру и таких, что конечна норма $|||u|||^2 = \left\{\int\limits_0^\infty \|u(t)\|^2 dt\right\}^{1/2}$.

Для уравнения (1) зададим условие $u(0) = u_0$.

Теорема. Пусть выполнено условие 1 $f(t) \in L_2(0,\infty;H)$, $u_0 \in D(A^{1/2})$, тогда существует единственное решение задачи (1)-(2).

Уравнение (1) и граничные задачи для него при $0 \leqslant t \leqslant d$ изучались в работах В.П.Глушко и О.М.Смелянского.

О задаче Дирихле для кусочно-гармонической функции [5]

Самойлова Л.А. (Белгород)
samoilova@bsu.edu.ru

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается прямоугольник П (см. рис),

в котором выделено n вертикальных интервалов $\gamma_i = \{(\xi_i, y), y \in (0,1)\}$, $(i = 1, ..N)$, причем $\xi_1 = 0$, $\xi_n = l$. Эти интервалы разбиваются на группы $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Ищется непрерывная в замыкании П функция, которая гармонична в каждой полосе прямоугольника П, заключенного между γ_i и γ_{i+1} и удовлетворяющая следующим условиям:

$$u(\xi_i, y) = u(\xi_j, y), \qquad y \in [0; 1] \tag{1}$$

если γ_i и γ_j входят в одну группу Γ_k. Далее, если Γ_k состоит из интервалов $\gamma_{i1}, ..., \gamma_{i\nu}$, то

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi_{i1}, y) + ... + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\xi_{i\nu}, y) = 0, \qquad y \in (0; 1) \tag{2}$$

где $[\frac{\partial u}{\partial x}](\xi_i, y)$ означает "скачок" производной

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i + 0, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_i - 0, y), \xi_i \neq 0, l.$$

Кроме того задаются условия Дирихле на горизонтальных отрезках. Удается доказать классическую разрешимость описанной задачи на основе метода Пуанкаре–Перрона после предварительного её сведения к эллиптической задаче на стратифицированном множестве.

Литература [1] Бицадзе А.В.,Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач.//Докл.АН СССР. 1969. Т185. С.739-740.

[5]Работа поддежана грантом РФФИ № 04-01-00697 и грантом Президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1., программой "Университеты России"проект УР 04.01.486, грантом БелГУ ВКАС-025-05

Глобальная устойчивость одной поллинговой модели с подвижными приборами [6]

А. А. Сергеев

Рассматривается открытая сеть, состоящая из N узлов и M приборов, перемещающихся между ними, при этом $M/N \to r$ при $N \to \infty$ $(0 < r < \infty)$. В каждом узле имеется L мест ожидания для требований $(L < \infty)$, места ожидания для приборов отсутствуют. Если в момент прихода требования в узле есть свободные места для ожидания, то оно присоединяется к очереди, в противном случае теряется. Дождавшись прибора, требование выбирает равновероятно узел назначения, в который и направляется. По прибытии в этот узел требование покидает сеть, а прибор либо забирает другое требование, если очередь из них в узле непуста, либо покидает его без требования и с равной вероятностью направляется в любой узел. Требования в узлы поступают в соответствии с однородными пуассоновскими потоками интенсивности λ, и эти потоки взаимно независимы. Времена перемещений приборов также независимы друг от друга и от входящих потоков и имеют одно и то же распределение, обладающее абсолютной непрерывной компонентой и математическим ожиданием, равным a.

Пусть $p_j^N(t)$, $j = 0, \ldots, L$ — вероятность того, что в фиксированном узле системы в момент времени t находится j требований. При $N \to \infty$ эти величины сходятся к функциям $p_j(t)$, удовлетворяющим следующей системе уравнений (см. [1]):

$$\begin{gathered} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + rv(t)p_1(t) \\ p_j'(t) = \lambda(p_{j-1}(t) - p_j(t)) + rv(t)(p_{j+1}(t) - p_j(t)), \quad j = 1, \ldots, L-1 \\ p_L'(t) = \lambda p_{L-1}(t) - rv(t)p_L(t). \end{gathered} \tag{1}$$

Данная система глобально устойчива.

[6]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00256).

Теорема 1 *Пусть* $\rho = \dfrac{\lambda a}{r}$. *При любых начальных условиях, являющихся распределением вероятностей,*

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j^* = \frac{\rho^j}{1+\rho+\ldots+\rho^L}, \quad j = 0, 1, \ldots, L.$$

Таким образом, устойчивая точка предельной динамической системы не зависит от конкретного вида функции распределения времени движения приборов, а только от его математического ожидания.

Рассмотрим случайный процесс $\vec{q}^N(t) = (q_1^N(t), \ldots, q_N^N(t))$, где $q_i^N(t)$ — число требований в i-ом узле сети в момент t.

Теорема 2 *При любом* $N \in \mathbb{N}$ *случайный процесс* $\vec{q}^N(t)$ *эргодичен, то есть обладает предельным распределением вероятностей состояний, не зависящим от начальных условий* $\vec{q}^N(0)$.

Доказательство этого утверждения проводится с использованием теоремы Боровкова об эргодичности асимптотически стохастически непрерывного марковского процесса (приведена в [2, с. 185]) с предварительным преобразованием процесса $\vec{q}^N(t)$ в марковский путём введения дополнительных переменных, соответствующих остаточным временам движения приборов.

Обратимся к случайному процессу

$$\mathcal{U}_N(t) = \left(\frac{\sum_{i=1}^N I\{q_i^N(t) \geq 0\}}{N}, \ldots, \frac{\sum_{i=1}^N I\{q_i^N(t) \geq L\}}{N} \right).$$

Его значения принадлежат множеству

$$U = \{(u_0, \ldots, u_L) \colon 1 = u_0 \geq u_1 \geq \ldots \geq u_L \geq 0\},$$

точнее, конечному подмножеству

$$U_N = \{\vec{u} \in U \colon u_i = r_i/N,\, r_i \in \{0, \ldots, N\},\, i = \overline{0, L}\}.$$

Данный случайный процесс, являясь функцией процесса $\vec{q}^N(t)$, также обладает предельной вероятностной мерой $\beta_N(\vec{u})$, $\vec{u} \in U_N$.

Процессу $\mathcal{U}_N$ соответствует оператор сдвига $T_N = T_N(t)$ в пространстве функций на U_N. Именно, если $f\colon U_N \to \mathbb{R}$, то

$$T_N(t)f(\vec{u}) = \mathsf{E}(f(\mathcal{U}_N(t)) \mid \mathcal{U}_N(0) = \vec{u}), \quad u \in U_N.$$

Верна следующая

Лемма 1 *Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$ — произвольная непрерывная функция. Тогда при всяком $t \geq 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\vec{g}\in U_N} |T_N(t)f(\vec{g}) - f(u(t,\vec{g}))| = 0,$$

где $u(t,\vec{g}) = (u_0(t,\vec{g}), \ldots, u_L(t,\vec{g}))$, $u_k(t,\vec{g}) = \sum_{i=k}^{L} p_i(t,\vec{q})$, $p(t,\vec{q})$ — решение системы (1) с любым из начальных условий $\vec{q}$, соответствующим значению $\vec{g}$ случайного процесса $\mathcal{U}_N(t)$.

Из теоремы Прохорова (см., например, [3]) следует, что семейство мер $\{\beta_N\}_{N=1}^{\infty}$ на U относительно компактно, а из леммы — то, что единственной мерой, которая может быть предельной точкой для подпоследовательности мер из семейства, является вырожденная мера, сосредоточенная в точке $\vec{g}^*$ с координатами $\vec{g}_k^* = \sum_{i=k}^{L} p_i^*$, $k = 0, \ldots, L$. Таким образом, доказана

Теорема 3 *Последовательность предельных вероятностных мер $\{\beta_N\}_{N=1}^{\infty}$ случайных процессов $\mathcal{U}_N(t)$, описывающих состояния узлов сети, слабо сходится к вероятностной мере, сосредоточенной в точке $\vec{g}^* \in U$, где*

$$g_k^* = \rho^k \frac{1-\rho^{L-k+1}}{1-\rho^{L+1}}, \ \rho = \frac{\lambda a}{r}, \ k = \overline{0, L}.$$

Эта теорема имеет ряд полезных следствий, касающихся предельного поведения характеристик сети при $N \to \infty$. Например, имеет место следующий факт:

Следствие 1 *Пусть* $L^*(\vec{u}) = \sum\limits_{i=1}^{L} u_i$ *— средняя длина очереди в узле системы* ($\vec{u} \in U$). *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{E}_N L^*(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{L} g_i^* = \frac{L\rho^L + (L-1)\rho^{L-1} + \ldots + 2\rho^2 + \rho}{\rho^L + \rho^{L-1} + \ldots + \rho + 1},$$

где E_N *— математическое ожидание по предельной мере случайного процесса* $\mathcal{U}_N$.

Автор хотел бы выразить благодарность Афанасьевой Л.Г. за ценные обсуждения и замечания в процессе работы по теме доклада.

Список литературы

[1] *Сергеев А. А.* Предельные теоремы для случайных процессов, характеризующих работу системы массового обслуживания с подвижными приборами // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2005, т. 12, № 3, с. 680.

[2] *Боровков А. А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 440 с.

[3] *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: МЦНМО, 2004. — Кн. 1. — 520 с.

Метод Адамса, использующий рациональную интерполяцию

С.Ю. Снытникова

(Липецк, ЛГТУ; stells@lipetsk.ru)

Метод Адамса решения дифференциального уравнения

$$y' = f(y, x)$$

основан на построении приближенного продолжения $\tilde{f}$ значений $f_k = f(y_k, x_k)$, посчитанных в нескольких предыдущих точках $x_{n-k}, \ldots, x_n$, на промежуток $[x_n, x_{n+1}]$ и дальнейшей подстановке продолжения $\tilde{f}$ в эквивалентное интегральное уравнение

$$y_{n+1} = y_n + \int_{y_n}^{y_{n+1}} \tilde{f}(x)\, dx. \tag{1}$$

В классическом методе Адамса для построения $\tilde{f}$ применяется полиномиальная интерполяция. Если при этом в процессе интерполяции используется неизвестное значение y_{n+1} в следующей точке, то соотношение (1) превращается в уравнение, и метод в этом случае называют неявным.

В докладе обсуждается возможность использования для построения $\tilde{f}$ рациональной интерполяции.

Для методов Адамса, использующих рациональную интерполяцию порядка [1/1], вычислительные формулы выглядят так. Для явного метода:

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(a_0\, b_1 \ln \frac{3b_1 + 1}{2b_1 + 1} + a_1(b_1 + \ln \frac{2b_1 + 1}{3b_1 + 1})\Big)/b_1^2,$$

где

$$a_0 = f_{n-2},\ a_1 = \frac{(2f_{n-2} - f_{n-1})f_n - f_{n-2}f_{n-1}}{2(f_{n-1} - f_n)},\ b_1 = \frac{f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n}{2(f_{n-1} - f_n)}.$$

Для неявного метода:

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(a_0\, b_1 \ln \frac{2b_1 + 1}{b_1 + 1} + a_1(b_1 + \ln \frac{b_1 + 1}{2b_1 + 1})\Big)/b_1^2,$$

где

$$a_0 = f_{n-1},\, a_1 = \frac{(2f_{n-1} - f_n)f_{n+1} - f_{n-1}f_n}{2(f_n - f_{n+1})},\, b_1 = \frac{f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}}{2(f_n - f_{n+1})}.$$

Эволюционная задача с интегральным условием

Д.Ф. Тарарыков
(Воронеж, ВГУ; tararykov@mail.ru)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x(t) = 0, \qquad t \in [0,1] \tag{1}$$

с интегральным условием

$$\int_0^1 \varphi(t)x(t)dt = x_1, \tag{2}$$

где для любого $t \in [0,1]$ $A(t)$ - линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве E, функция $t \mapsto A(t)$ непрерывна по норме, $\varphi(t)$ - непрерывная вещественная неотрицательная функция, $\int_0^1 \varphi(t)dt = 1$, x_1 - некоторый элемент пространства E.

Интегральные условия типа (2) являются обобщением многоточечного краевого условия $\sum_{i=1}^n \gamma_i x(t_i) = x_1$, возникающего в связи с проблемой долгосрочного прогноза погоды (см. [1]).

Задача (1), (2) с неограниченным оператором $A(t)$, порождающим сильно непрерывную полугруппу, изучена в статье Ю. Т. Сильченко [2].

В настоящей работе для случая ограниченного оператора $A(t)$ получены различные специальные условия существования и единственности решений задачи (1), (2).

Утверждение *Для однозначной разрешимости системы* (1), (2) *достаточно, чтобы при* $t \in [0,1]$ *выполнялось неравенство:*

$$\|A(t)\| < \frac{1}{max\left\{\int\limits_0^1 s\varphi(s)ds, 1 - \int\limits_0^1 s\varphi(s)ds\right\}}.$$

Литература. 1. Шелухин В.В. Вариационный принцип в нелокальных задачах для эволюционных уравнений //Сибирский математический журнал. 1993. - Т.34,2. - с. 191-207.
2. Сильченко Ю.Т. Эволюционное уравнение с нелокальным условием //Труды математического факультета, выпуск 9(новая серия) - Воронеж: ВорГУ, 2005 - с. 101-107

Регуляризованный след оператора Лапласа - Бохнера с потенциалом, удовлетворяющим условию Липшица

О.А. Торшина (Магнитогорск, Магнитогорский государственный университет; OlgaNica@mail.ru)

Пусть T - стандартный оператор Лапласа - Бохнера с потенциалом на проективной плоскости F, действующий в гильбертовом пространстве H функций, интегрируемых с квадратом по мере Хаара:$\sin\theta d\theta d\varphi$ (θ, φ -сферические координаты), $\lambda_n = n(n+1) \quad (n = \overline{0,\infty})$ -собственные числа оператора T, $\upsilon_{ni} \quad (i = \overline{0,2n})$ - собственные функции оператора T, образующие систему ортонормированных сферических функций, $l_n = \{\lambda|\lambda = \lambda_n + n + 1 + ip, \quad -\infty < p < \infty\}$ - вертикальные прямые на комплексной плоскости, P - оператор умножения на измеримую по Лебегу функцию $p : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to C$ (C - множество комплексных чисел). Обозначим через $\mu_{n,i}$ собственные числа оператора $T + P$, взятые с учетом алгебраической кратности, такие, что $|\mu_{n,i} - n(n+1)| \leqslant const$.

Теорема 4 *Регуляризованный след оператора Лапласа - Бохнера с потенциалом, удовлетворяющим условию Липшица имеет вид*

$$\mu_{0,0} + \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\left\{\sum_{i=0}^{2n}\mu_{n,i} - n(n+1)(2n+1)\right\}\right) = 0.$$

Имеет место равенство [1]:

$$\sum_{i=0}^{2n}\mu_{n,i}=n(n+1)(2n+1)+\sum_{i=0}^{2n}(P\upsilon_{ni},\upsilon_{ni})+\alpha_n(p)+\beta_n(p)+\gamma_n(p)+O(\frac{1}{n^2}).$$

Первая поправка теории возмущений $\alpha_n(p)=\frac{2m+1}{4\pi}\iint\limits_F p(\theta,\varphi)\sin\theta d\varphi d\theta=0$. Вторая поправка теории возмущений $\beta_n(p)=O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right)$. Третья поправка теории возмущений $\gamma_n(p)=\frac{1}{6\pi i}Sp\left[\int\limits_{l_n}-\int\limits_{l_{n-1}}\right][P(T-\lambda E)^{-1}]^3 d\lambda=0$. Вычисленные поправки свидетельствуют о верности сформулированной теоремы.

Литература. 1. Садовничий В.А., Дубровский В.В. Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Штурма - Лиувилля с потенциалом на сфере// ДАН СССР. 1991. Т. 319, №1. – Р. 61-62.

К обратимости корректных операторов в гильбертовом пространстве

В.М. Тюрин (Липецк, ЛГТУ)

Пусть X_0 - гильбертово пространство, X_m - линейное многообразие ($X_m\subset X_0$), плотное в X_0. На линейном многообразии X_m определим норму $||u||_m=||u||_0+\langle u\rangle_1+...+\langle u\rangle_m$, где $||\cdot||_0$ - норма в X_0, $\langle\cdot\rangle_1,...,\langle\cdot\rangle_m$ - полунормы X_m, при этом величины $||u||_m$ и $||u||_{m-1}$ связаны некоторой коэрцитивной оценкой. Предполагается, что существует линейное многообразие $M\subset X_m$ плотное одновременно в X_m и X_0, а пространство X_m относительно нормы $||\cdot||_m$ является банаховым пространством.

Рассмотрим линейные операторы $A:X_m\to X_0$ и $B:X_m\to X_0$, сумма которых $A+B:X_m\to X_0$ есть непрерывный линейный оператор. Обозначим $A^*:D(A^*,X_0)\to X_0$ и $B^*:D(B^*,X_0)\to X_0$ - сопряженные операторы к операторам $A:D(A,X_0)\to X_0$, $B:D(B,X_0)\to X_0$, здесь $D(A,X_0)=D(B,X_0)=D(A^*,X_0)=D(B^*,X_0)=X_m$. Операторы A,B,A^*,B^* переводят линейное многообразие M в пространство X_m.

Далее считаем, что существует такое число λ, что операторы $A+B-\lambda$ и $A^*+B^*-\overline{\lambda}$ как операторы в X_0 с областью X_m непрерывно обратимы.

Оператор $A+B : X_m \to X$ назовем коэрцитивно корректным, если выполняются неравенства

$$2Re(Au, Bu)_0 + ||Bu||_0^2 \geq a||u||_0^2, \quad ||Au||_0 \geq b\langle u\rangle_m \quad (u \in M),$$

в которых постоянные $a > 0, b > 0$ не зависят от $u \in M$, $(\varphi, \psi)_0$ - скалярное произведение элементов $\varphi, \psi \in X_0$.

Теорема. Если операторы $A+B : X_m \to X_0$ и $A^*+B^* : X_m \to X_0$ коэрцитивно корректны, то оба одновременно обратимы.

Полученные результаты применяются при изучении фредгольмовых операторов и обратимости линейных дифференциальных операторов.

Односторонняя теорема Бойда

Узбеков Р.Ф. (Самара, СамГУ; uzbekov_roman@mail.ru)

Пусть X — симметричное пространство на $[0,1]$, тогда нижний индекс Бойда пространства X определяется следующим образом $\alpha(X) = \lim\limits_{s\to 0} \frac{\ln \|\sigma_s\|_{X\to X}}{\ln s}$, где $\sigma_s x(t) = x(\frac{t}{s})\chi_I(\frac{t}{s})$, $t \in I \subset [0,1]$.

В известной теореме Бойда 1967 года [1, p.215-219] устанавливается зависимость свойства интерполяции симметричного пространства X относительно пары $(L_p,\ L_q)$, $1 < p < q < \infty$ от выполнения некоторых неравенств для индексов Бойда данного пространства.

Е.М. Семенов поставил вопрос относительно экстремальности пространства L_1 в теореме Бойда: если симметричное пространство X на $[0;1]$ является сепарабельным или обладает свойством Фату и $\alpha(X) > \frac{1}{q}$, будет ли оно интерполяционным относительно пары (L_1, L_q), $1 < q < \infty$?

В более общих условиях на пространство X(предполагалось, что СП X интерполяционно относительно пары $(L_1,\ L_\infty)$) положительный ответ на этот вопрос получили С.В.Асташкин и L.Maligranda.

Теорема 1 [2, с.782-785] Пусть $1 \leqslant r < p < \infty$. Если симметричное пространство X на $[0,1]$ с условием $\alpha(X) > \frac{1}{p}$ является интерполяционным между L_r и L_∞, то X—интерполяционное пространство относительно пары $(L_r,\ L_p)$.

Установлена справедливость аналогичного утверждения в случае, если в теореме 1 пространство L_r заменить:

1) на симметричное пространство Лоренца $\Lambda(\phi)$ со следующими свойством: производная фундаментальной функции этого пространства полумультипликативна на $[0,1]$;

2) на пространство $L_{r,q},\ 1 \leqslant r < p < q \leqslant \infty$.

Теорема 2 Пусть $1 < p < \infty$, X—симметричное пространство на $[0,1]$, $\Lambda(\phi)$—пространство Лоренца с фундаментальной функцией $\phi(t)$, кроме того, $\phi'(t)$ является полумультипликативной на $[0,1]$. Если X—интерполяционное пространство между $\Lambda(\phi)$ и L_∞, для которого выполняется условие $\alpha(X) > \frac{1}{p}$, тогда X является интерполяционным относительно пары $(\Lambda(\phi), L_p)$.

Литература [1] Boyd D.W. Spaces between a pair of reflexive Lebesgue spaces/ Proc. Amer. Math. Soc. 18. - 1967 [2] Асташкин С.В., Малигранда Л., Об интерполяции в L_p–пространствах, Мат. заметки, Т.74, №5, 2003

Ограниченность мультипликаторов в симметричных пространствах

С.Н.Уксусов (Воронеж, ВГУ; root@func.vsu.ru)

Обозначим через Ω множество индексов $\{(0,0),(n,k), 1 \le k \le 2^n, n = 0,1,...\}$, $\Delta_0^0 = [0,1]$, $\Delta_n^k = ((k-1))2^{-n}, k2^{-n})$, $\chi_0^0(t) \equiv 1$, $\chi_n^k(t) = æ_{\Delta_{n+1}^{2k-1}}(t) - æ_{\Delta_{n+1}^{2k}}(t)$, где $æ_e(t)$ – характеристическая функция множества $e \in [0,1]$. Т.е. $\{\chi_n^k, (n,k) \in \Omega\}$ – нормированная в L_∞ система Хаара.

Пусть E, F – симметричные пространства на $[0;1]$, $0 < \nu < \mu < 1$, $\varphi_E(t) = t^\mu$, $\varphi_F(t) = t^\nu$, $\gamma = \mu - \nu$. Обозначим через E_γ пространство с нормой $\|x\|_{E\gamma} = \|x^*(t)t^{-\gamma}\|_E$, а через α_E и β_E индексы Бойда пространства E.

Теорема 1. Пусть E, F – симметричные пространства на $[0;1]$, $\quad 0 < \nu < \mu < 1, \quad \gamma < \alpha_E \leq \beta_E < 1$ и $F \supset E_\gamma$. Для ограниченности мультипликатора $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$ из E в F необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{(n,k)\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n\gamma} < \infty.$$

Более того, норма мультипликатора Λ эквивалентна $\sup\limits_{(n,k)\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n\gamma}$.

Эта теорема обобщает классическую теорему С. Яно об ограниченности мультипликаторов по системе Хаара в паре пространств (L_p, L_q), где $0 < p < q < \infty$.

Норма мультипликаторов в паре пространств $(L_{p,r}, L_{q,s})$ вычислена в [1] для случая $1 < p < q < \infty, \quad 1 \leq r \leq s \leq \infty$.

Приведем еще один пример, когда удается оценить норму мультипликаторов по системе Хаара.

Теорема 2. Пусть $1 < p, q < \infty$. Тогда

$$\|\Lambda\|_{L_{p,\infty}, L_q} \geq C_{p,q} \sup_{1 \leq k_n \leq 2^n} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n,k_n}|^q 2^{n(\frac{q}{p}-1)} \right)^{\frac{1}{q}},$$

где константа $C_{p,q}$ зависит только от p и q.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00629) и программы "Университеты России" (проект УР.04.01.0005).

Литература [1] О.В. Лелонд, Е.М.Семенов, С.Н. Уксусов. Пространство мультипликаторов Фурье-Хаара//Сиб.мат. журн. 2005. Т.46, № 1. С. 130-138.

Алгебраические свойства бифуркационных диаграмм интегрируемых систем

А.В. Федорова (Москва, МГУ; AFyodorova@yandex.ru)

Классический подход к изучению топологии решений интегрируемой гамильтоновой системы на $2n$-мерном симплектическом многообразии использует конструкцию бифуркационной диаграммы. Она строится по набору первых интегралов f_i системы, как множество критических значений отображения момента $\mathcal{F} = f_1 \times \cdots \times f_n$:

$$\Sigma = \{\mathcal{F}(x) \in \mathbf{R}^n \,|\, \mathrm{grad}\, f_i \text{ линейно зависимы в точке } x\}.$$

Однако дополнительные интегралы системы можно выбрать различными способами. В работе предложен метод построения по данному набору нового полиномиального интеграла, поверхность уровня которого содержит все особенности исходного слоения Лиувилля. Такие интегралы найдены для случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской и Сретенского.

Если заменить один из интегралов набора на постороенный, бифуркационная диаграмма примет более простой вид, а именно, все сложные критические точки при отображении момента попадут на гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$, лишь появится некоторое дополнительное множество, соответствующее особым точкам ранга $(n-1)$ — складкам по выделенному направлению.

Существует другой, более алгебраический подход к изучению интегрируемых систем, связанный с существованием представления Лакса [1]. Если удается представить систему в этом специальном виде и ввести спектральный параметр, то можно рассмотреть спектральную кривую, особенности которой будут характеризовать топологию системы. В случаях волчков Лагранжа и Ковалевской построенный полиномиальный интеграл совпадает с дискриминантом спектральной кривой и задает поверхность корней некоторого многочлена.

Литература. 1. Оден М. Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем. Ижевск, Издательский дом "Удмуртский университет". 1999. – 215 с.

Новые серии интегрируемых систем на алгебрах Ли.

А.Т. Фоменко, А.А. Короткевич

(Москва, МГУ; fomenko@mech.math.msu.su, korotkevich_aa@mail.ru)

Длительное время оставалась недоказанной гипотеза Мищенко - Фоменко о существовании на произвольной конечномерной алгебре Ли полного инволютивного набора полиномов. Иными словами, на любой конечномерной алгебре Ли существует гамильтонова система, интегрируемая по Лиувиллю с полиномиальными интегралами.Недавно эта гипотеза была доказана С. Т. Садэтовым.

В докладе будут изложены новые конструктивные методы построения интегрируемых систем на некоторых алгебрах Ли, в частности, на разрешимых алгебрах. Также будут рассмотрены алгоритм Болсинова построения полных инволютивных наборов полиномов и, непосредственно, теорема Садэтова. Доклад содержит рассказ об эквивалентности коммутативной и некоммутативной интегрируемости на компактных многообразиях в полупростом случае. Будет рассмотрен случай алгебр Ли малой размерности.

Литература. 1. Болсинов А.В. Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах:доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко. Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып.26. М.: МГУ. 2005. 87-109. 2. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995 3. Садэтов С.Т. Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко. Доклады РАН. 2004. №6. 751-754.

Классификация движений в интегрируемых системах с тремя степенями свободы

М.П. Харламов (Волгоград, ВАГС; mharlamov@vags.ru)

Большинство изученных на сегодня вполне интегрируемых гамильтоновых систем относится к классу приводимых: наличие в них группы симметрий достаточно высокой размерности позволяет свести такие системы к семейству интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Аппарат исследования последнх хорошо развит. В докладе прводится обзор основных результатов в этой области.

Однако имеются содержательные примеры непрводимых интегрируемых систем с тремя степенями свободы. Один из них — волчок Ковалевской в двойном силовом поле — был открыт А.Г.Рейманом и М.А.Семеновым–Тян–Шанским в 1988 г. Его классический аналог (отсутствие векторного поля) относится к классу приводимых систем. При топологической классификации разделяющими случаями здесь являются четыре класса Аппельрота.

В докладе изложено выполненное на сегодня исследование разделяющих случаев в обобщенном виде. Найдены все классы критических движений. В фазовом пространстве соответствующие траектории заполняют три поверхнсти, каждая из которых является почти всюду гладким четырехмерным подмногообразием. На этих поверхностях индуцируются интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, имеюшие подмножества коразмерности один, на которых вырождается индуцированная симплектическая структура. В пространтве констант первых интегралов таким движениям отвечает бифуркационная диаграмма, которая естественным образом формируется из пяти подмножеств. Первые четыре являются двумерными поверхностями и обобщают классы Аппельрота. Последнее одномерно и для индуцированных систем на пятимерных изоэнергетеских уровнях дает изолированную точку в составе их бифуркационных диаграмм. Такое явление ранее отмечалось лишь в случае Клебша задачи о движении твердого тела в жидкости.

Обсуждаются общие подходы к лиувиллевой классификации интегрируемых неприводимых систем.

О спектральных свойствах некоторых классов линейных отношений.

В.В. Хатько (Воронеж, ВГУ; vhatko@mail.ru)

Ведется построение классов линейных отношений, названных относительно-ограниченными и относительно-компактными, близких по своим спектральным свойствам к ограниченным и компактным линейным операторам. Если $\mathcal{A}$ - относительно-ограниченное линейное отношение, то его расширенный спектр имеет вид $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma_0 \cup \{\infty\}$, где σ_0 - компактное подмножество из $\mathbb{C}$. Если $\mathcal{A}$ - относительно-компактное линейное отношение, то σ_0 является спектром компактного оператора и отношение $\mathcal{A}$ наследует некоторые спектральные свойства этого оператора.

Построение изучаемых классов основывается на теореме о разложении линейного отношения в прямую сумму оператора и линейного отношения, обратный к которому является квазинильпотентным оператором. (см. [1]) Для линейного отношения $\mathcal{A}$ строится подпространство X_∞, отвечающее точки $'\infty'$ в расширенном спектре отношения $\mathcal{A}$, которое имеет следующий вид:

$X_\infty = \{x \in \bigcap_{n\geq 1} Im\mathcal{A}^n$: существует последовательность $x_n \in \mathcal{A}^{-1}x_{n-1}, x_0 = x$, такая что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} = 0\}$.

По своей структуре, подпространство X_∞ является инвариантным относительно отношения $\mathcal{A}$. Вводится понятие фактор-отношения по некоторому инвариантному подпространству.

Линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ будем называть *относительно-ограниченным*, если выполнены следующие условия:

1) Отношение $\mathcal{A}$ не является сильно-сингулярным, т.е. существует такое $M > 0$, что для любого собственного значения λ отношения $\mathcal{A}$

верно неравенство $\lambda < M$.

2) X_∞ - замкнутое подпространство.

3) $\mathcal{A}/X_\infty = \widetilde{\mathcal{A}}_\infty \in EndX/X_\infty$, т.е. фактор-отношение по подпространству X_∞ является ограниченным оператором.

Если $\widetilde{\mathcal{A}}_\infty$ - компактный оператор, то отношение $\mathcal{A}$ будем называть *относительно-компактным*.

Литература. 1. Баскаков А.Г., Чернышов К.И. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов.// Матем. сб. 2002 Т.193, №11, с. 3-35.

О квазирешениях типа бегущей волны в одной транспортной модели

Н.К. Хачатрян (Москва, ЦЭМИ РАН; beklar@cemi.rssi.ru)

Рассматривается модель организации грузоперевозок с фиксированным количеством промежуточных станций $i = 1, 2, ...m$ и выделенными начальной станцией отправления $i = 0$ и конечной станцией распределения грузов $i = m + 1$. Предполагается, что между двумя соседними станциями существует межстанционный перегонный путь, где временно может храниться часть грузов. Обработка грузов происходит в узлах станций. В каждый момент времени число задействованных узлов на i-ой станции обозначим через $z_i(t)$. В каждом узле в течении единицы времени обрабатывается единичный объем грузов. Очевидно, что количество задействованных узлов обработки грузов при бесперебойной работе всей цепи перевозок ограничено. Максимальное количество таких узлов, обозначаемое через Δ, определяет пропускную способность станций. Через $\nu < \Delta$ обозначим количество задействованных узлов, при котором можно организовать гарантированный грузопоток без заторов даже при небольших отклонениях от ν. Поэтому, всякий организованный грузопоток будет состоять из этого гарантированного уровня и некоторого его возмущения. Организация подобных грузопотоков зависит от технологий по приему, обработке и отправлению грузов. Опишем эти технологии.

Для промежуточных станций $i = 1, 2, ...m$ первая технология основана на установленных нормативных правилах взаимодействия соседних станций. Для каждой станции с номером i существуют правила взаимодействия с предыдущей $(i-1)$-ой станцией и последующей $(i+1)$-ой станцией. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией, станция с номером i увеличивает количество задействованных узлов с интенсивностью $\alpha(z_{i-1} - z_i)$ если количество задействованных узлов на ней меньше чем на предыдущей станции. При этом груз принимается с предыдущей станции. В противном случае станция с номером i уменьшает количество задействованных узлов с такой же интенсивностью и груз отправляется на перегонный путь. Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией, станция с номером i уменьшает количество задействованных узлов с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i+1})$ если количество задействованных узлов на ней больше чем на следующей станции. При этом груз отправляется на следующую станцию. В противном случае станция с номером i увеличивает количество задействованных узлов с такой же интенсивностью и груз принимается с перегонного пути. Для начальной станции $i = 0$, согласно первой технологии, существует правило подачи груза на нее, описываемая функцией $\psi_1(t)$ и правило взаимодействия со следующей станцией. Для конечной станции, согласно первой технологии, существует правило взаимодействия с предыдущей станцией и правило распределения грузов, описываемая функцией $\psi_2(t)$. Предполагаем, что функция $\psi_1(.)$ является кусочно бесконечно дифференцируемой, а функция $\psi_2(.)$ – непрерывной.

Первая технология не учитывает условие ограниченности пропускной способности станций, а также фактор недозагруженности станций. В связи с этим, наряду с первой технологией, используется и вторая технология. Она учитывает фактор ограниченности пропускной способности станций и, поэтому, ее применение связано с закрытием задействованных узлов обработки грузов и наличием гарантированного бесперебойного грузопотока с количеством задействованных узлов равном ν. При количестве задействованных узлов меньшем ν, грузопоток обеспечивается первой технологией. Функция $\varphi(.)$, задающая скорость изменения задействованных узлов обработки в рамках второй технологии, обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, \nu]$ тождественно равна 0, на интервале (ν, z_{max}) является возрастающей, в точке z_{max} принимает максимальное значение, на полупрямой $(z_{max}, +\infty)$ является убывающей, в точке Δ принимает нулевое значение, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейной.

Для грузоперевозок необходимо иметь действенную и простую систему контроля. Она заключается в том, что объемы обрабатываемых грузов для любого планового интервала времени на всех станциях должны совпадать с определенным лагом времени, единым для всех станций. Такое условие можно описать в следующем виде: существует число $\tau > 0$, не зависящее от t и i, такое, что при всех $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in [0, +\infty)$ выполняется равенство:

$$z_i(t) = z_{i+1}(t+\tau). \tag{1}$$

Таким образом, наша модель, описывающая процесс грузоперевозок и их систему контроля, задается конечной системой дифференциальных уравнений и условием, задающим бегущую волну:

$$\begin{aligned}
\dot z_0(t) &= \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi(z_0), \quad t \in [0, +\infty), &(2)\\
\dot z_i(t) &= \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, 2..., m, \quad t \in [0, +\infty), &(3)\\
\dot z_{m+1}(t) &= \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), &(4)\\
z_i(t) &= z_{i+1}(t+\tau), \quad i = 0, 1, 2, ..., m, \quad t \in [0, +\infty). &(5)
\end{aligned}$$

Предполагаем, что функция $\varphi(.)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, с равномерно ограниченными первой и второй производными.

Для формулировки результатов определим семейства банаховых пространств функций с весами

$$\mathcal{L}^1_\mu C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(.) : x(.) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in I} \left\| x^{(r)}(t) \mu^{|t|} \right\|_{\mathbb{R}} < +\infty \right\}, \mu \in]0, 1[,$$

а также векторное пространство $K^1 = \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{R}_i, \quad \mathbb{R}_i = \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}$ с элементами $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}$ и со стандартной топологией полного прямого произведения.

В пространстве K^1 определим семейство гильбертовых подпространств

$$K_{2\mu}^1 = \left\{ \varkappa : \varkappa \in K^1; \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_{R^n}^2 \mu^{2|i|} < +\infty \right\}, \quad \mu \in]0, 1[.$$

Определены функции $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$ параметрически зависящие от нормативного коэффициента α и константы Липшица функции φ, графики которых изображенны на рис.1

Рис.1.

Класс решений системы (2)-(5) чрезвычайно узок. Поэтому, для описания реализуемых режимов грузоперевозок используется более широкий класс решений, которые называются квазирешениями типа бегущей волны.

Определение 1. Семейство кусочно абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(.)\}_0^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется квазирешением типа бегущей волны с характеристикой $\tau > 0$ для системы (2)-(5), если разрывы расположены в точках кратных числу τ. ■

Теорема 1. *Для любых начальных данных* $\bar{i} \in \{0, 1, ...m + 1\}$, $a > 0$, $\bar{t} \in [0, +\infty)$, *характеристик* τ, *удовлетворяющих условию* $0 < \tau < \hat{\tau}$ *и произвольных функций* $\psi_1(.) \in C^\infty([0, \tau], \mathbb{R})$, $\psi_2(.) \in C([0, \tau], \mathbb{R})$, *существует единственное квазирешение* $\{z_i(.)\}_0^{m+1}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ, *удовлетворяющее начальному условию* $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$, *при любом параметре* $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ *каждая координата* $z_i(.)$, $i \in \mathbb{Z}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}([0, +\infty))$, *а последовательность* $\{z_i(t)\}_0^{m+1}$ *при каждом* $t \in [0, +\infty)$ *принадлежит пространству* $K^1_{2\mu}$. Такое квазирешение непрерывно зависит от начального условия a и функций $\psi_1(.)$, $\psi_2(.)$ ■

Определение 2. Квазирешение типа бегущей волны с характеристикой τ называется ε-квазирешение типа бегущей волны с характеристикой τ или (ε, τ)-квазирешение, если выполняются неравенства

$$|z_0(k\tau - 0) - z_0(k\tau + 0)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots . \blacksquare$$

Теорема 2. *Для любых начальных данных* $\bar{\bar{i}} \in \{0, 1, ...m+1\}$, $a > 0$, $\bar{t} \in [0, +\infty)$, *характеристик* τ, *удовлетворяющих условию* $0 < \tau < \hat{\tau}$, *произвольных функций* $\psi_1(.) \in C^\infty([0, \tau], \mathbb{R})$, $\psi_2(.) \in C([0, \tau], \mathbb{R})$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\psi_{1\varepsilon}(.) \in C^\infty([0, \tau], \mathbb{R})$, *такая, что* $||\psi_1(.) - \psi_{1\varepsilon}(.)||_{L_1} < \varepsilon$ *и соответствующее ей квазирешение* $\{z_{i\varepsilon}(.)\}_0^{m+1}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ *является* (ε, τ)-*квазирешением.* ■

Литература. 1. Хачатрян Н.К. О решениях типа бегущей волны в одной транспортной модели // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 3. – с. 137-149. 2. L.A. Beklaryan, N.K. Khachatryan. Solutions of traveling wave type in dynamic transport models // Functional differential equations - в печати.

О существовании решений нелинейной задачи движения идеальной жидкости со свободной повехностью и численном моделировании таких задач

Р.В. Шамин (Москва, Институт океанологии РАН; roman@shamin.ru)

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$R_t = i(UR_w - U_w R),$$

$$V_t = i(UV_w - B_wR) + g(R-1),$$

где $U = \mathrm{P}(V\overline{R}+\overline{V}R)$, $B = \mathrm{P}(V\overline{V})$, $\mathrm{P} = \frac{1}{2}(\mathrm{I}+i\mathrm{H})$, H — оператор гильберта. Уравнения рассматриваются относительно функций R и V, аналитичных в нижней полуплоскости и удовлетворяющих следующим условиям:

$$R(w,t) \to 1, \quad |w| \to \infty, \quad \mathrm{Im}w \leqslant 0,$$

$$V(w,t) \to 0, \quad |w| \to \infty, \quad \mathrm{Im}w \leqslant 0.$$

Эти уравнения называются уравнениями Дьяченко. Они эквивалентны уравнению Эйлера со свободной поверхностью в случае потенциального течения.

Доказано существование и единственность гладкого решения на достаточно малом временном интервале. Построены эффективные численные методы для уравнений Дьяченко. Доказана сходимость этих численных методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ N 04-05-64784, N 04-01-00256 и Программой фундаментальных исследований Президиума РАН "Математические методы в нелинейной динамике".

О свойствах решений некоторого стационарного уравнения

Ярцева Н.А. (Воронеж, ВГУ)

Рассмотрим уравнение

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) - \lambda u(x) = f(x) \quad (x \in [0,\infty), a(x) \geqslant 0)$$

или в операторной форме

$$Lu - \lambda u = f. \tag{1}$$

Исследованы свойства гладкости ограниченных решений уравнения (1).

Обозначим через B пространство непрерывных ограниченных функций $u(x)$, имеющих конечный предел при $x \to \infty$, $\|u\| = \sup_{x\in[0,\infty)} |u(x)|$.

Справедлива

Теорема. Если $L \in V_-, T_-(k) \neq 0$, [1], [2], то уравнение (1) при любом $\lambda > 0$ и $f \in B$ имеет однопараметрическое семейство решений $u \in B$, и для того, чтобы какое-либо из них удовлетворяло неравенствам

$$\|u\| \leqslant \frac{\|f\|}{\lambda},$$

$$\|u'\| \leqslant \frac{2\left[\lambda T_-(\lambda)\right]^{-1}}{\lambda}\|f\|,$$

необходимо и достаточно, чтобы для него выполнялось условие

$$|u(0)| \leqslant \frac{\|f\|}{\lambda}.$$

Автор выражает благодарность Костину В.А. за постановку задачи и внимание к работе.

Литература. 1. Костин В.А. Об одном эволюционном уравнении с вырождением В.А.Костин.- Диф.уравнения.- Т.Х, № 9 , 1974, - с.1607-1615. 2. Ярцева Н.А. О гладкости решений обратного уравнения Колмогорова с оператором Феллера Н.А.Ярцева . - Труды Воронежской зимней математической школы.- 2004.- Воронеж: ВГУ, 2004.- с.199-205.

Bifurcation solutions of an infinite nonlinearly supported beam

M.A. Abdul Hussain, (Department of Mathematics, College of Education, University of Basrah, Iraq, mud_ abd@yahoo.com)

Consider the problem of motion of an infinite beam lying on a dense support obeying a nonlinear deformation law which can be described by means of the following PDE,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta w + w^3 = \psi$$

where $\psi = \varepsilon \quad \phi$ (ε - small parameter) is continuous function and (w is the deflectionof beam). It is known that, to study the oscillations of the beams, stationary state should be monitored which is describes by the equation,

$$\frac{d^4 w}{d x^4} + \alpha \frac{d^2 w}{d x^2} + \beta w + w^3 = \psi,$$

The last equation has been studied with the following conditions,

$$\begin{aligned} &w(0) = w(\pi) = w^{//}(0) = w^{//}(\pi) = 0, \\ &\psi(x) = \psi(\pi - x). \end{aligned}$$

Bifurcation solutions of the last equation with a certain boundary conditions has been studied by Yu.I. Sapronov [1]. He used method of finite dimensional reduction to solve this problem.

By using method of finite dimensional reduction (Locally scheme of Liapunov-Schmidt) as in [1] we have that bifurcation diagram of the this problem is equivalent to the bifurcation diagram of the function,

$$U(\xi,\, \delta) = \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 4\,\xi_1^2\,\xi_2^2 + \xi_2^4) + \frac{1}{2}(\lambda_1\,\xi_1^2 + \lambda_2\,\xi_2^2) + q_1\,\xi_1 + q_2\,\xi_2 + ...$$

Caustic (bifurcation diagram) of a certain problem has been found as a union of three surfaces.

References. 1. V.R. Zachepa, Yu.I. Sapronov "Locally analysis of Fredholm equationsVoronezh, 2002.-185p.

On construction of wide classes of weakly coercive systems in the Sobolev spaces $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$

D.V.Limansky (Ukraine, Donetsk, DonNU; lim@univ.donetsk.ua)

It is well known [2] that weak coercivity of a system

$$P_j(D) = \sum\nolimits_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha} D^\alpha, \qquad j \in \{1, \dots, N\}$$

of minimal differential operators in the Sobolev spaces $\overset{o}{W}{}^l_\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p \in [1;\infty]$, i. e., the validity of a priori estimate

$$\sum\nolimits_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C \left[\sum\nolimits_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_p + \|f\|_p\right], \qquad f \in C_0^\infty(\overline{\Omega}),$$

is a necessary condition for the system $\{P_j(D)\}_1^N$ to be l-quasielliptic. Here we use the notation $D = (D_1, \dots, D_n) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $|\alpha : l| = \sum_1^n \alpha_j/l_j$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$.

De Leeuw and Mirkil [3] proved that ellipticity of an operator $P(D)$ in $n \geqslant 3$ variables is equivalent to its weak coercivity in $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$.

To generalize de Leeuw and Mirkil's result, we prove theorems that give weak coercivity criteria for a system of differential operators $\{P_j(D)\}_1^N$ in both isotropic and anisotropic Sobolev spaces $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ (see [1]).

We also investigate the existence of l - quasielliptic and weakly coercive operators in the anisotropic spaces $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ for a given vector $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. In particular, it is shown that l - quasielliptic operators exist if and only if there is at most one odd number among the components $l_1, \dots, l_n$ ($n \geqslant 3$) of the vector l. Using serious analytical and topological results we claim that there are no weakly coercive operators in $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ whenever the set $\{l_1, \dots, l_n\}$ contains three or more odd numbers.

Finally, wide classes of weakly coercive in $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ but nonelliptic (not l - quasielliptic) systems in isotropic (anisotropic) cases are described.

This communication is joint with prof. M.M.Malamud.

References. 1. Лиманский Д.В., Маламуд М.М. О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L^1 и L^∞. // ДАН. 2004. Т.397, No.4. – С.453-458. 2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., Наука. 1996. – 480 с. 3. De Leeuw K., Mirkil H. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm// Illinois J. Math. 1964. V.8. – P.112-124.

On the summability of generalized solutions for a class of nonlinear elliptic fourth-order equations

Michail Voitovich (Donetsk, Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU; voytovich@bk.ru)

This is a joint talk with A.A.Kovalevsky.

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$, $p \in (1, n/2)$, $q \in (2p, n)$, $q^* = nq/(n-q)$, $f \in L^t(\Omega)$, $t > q^*/(q^*-1)$.

We consider the Dirichlet problem

$$\sum_{|\alpha|=1,2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = f \ \text{ in } \Omega, \ D^\alpha u = 0, \ |\alpha| = 0,1 \ \text{ on } \partial\Omega, \quad (1)$$

where $\nabla_2 u = \{D^\alpha u : |\alpha| = 1,2\}$.

The coefficients $A_\alpha(x,\xi)$ satisfy the Carathéodory conditions and the following inequalities:

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x,\xi)|^{\frac{q}{q-1}} + \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x,\xi)|^{\frac{p}{p-1}} \leqslant c_1 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_1(x),$$

$$\sum_{|\alpha|=1,2} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant c_2 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} - g_2(x),$$

with positive constants c_1, c_2 and nonnegative functions g_1, $g_2 \in L^t(\Omega)$.

By $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ we denote the set of all functions in $W^{1,q}(\Omega)$ having generalized second-order derivatives in $L^p(\Omega)$. $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ is a Banach space with the norm $\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum\limits_{|\alpha|=2} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}$. We denote by $\mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$.

Definition. A generalized solution of problem (1) is a function $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1;q}_{2,p}(\Omega)$ such that $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, $\sum\limits_{|\alpha|=1,2} \int\limits_{\Omega} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha v \, dx = \int\limits_{\Omega} f v \, dx$.

Theorem. *Let u be a generalized solution of problem* (1). *Then the next assertions hold:*

1) *if $t \in (\frac{q^*}{q^*-1}, \frac{n}{q})$, then $u \in L^\lambda(\Omega)$ for every $\lambda \in (q^*, \frac{tn(q-1)}{n-qt})$;*

2) *if $t = n/q$, then $u \in L^\lambda(\Omega)$ for every $\lambda \geqslant 1$;*

3) *if $t > n/q$, then $u \in L^\infty(\Omega)$.*

Содержание

Азанова О.Ю. **3**

Азарина С.В. **4**

Азатьян А.Г. **5**

Ал-Хашеми Х.Р. **6**

Алякин В.А., Клепнёв Д.Э. **7**

Андреищева Е.Н. **9**

Аносов В. П. **10**

Аржанова Н.А. **11**

Асташкин С.В., Лыков К.В. **12**

Афанасьев Д.М. **13**

Афанасьева Л.Г., Баштова Е.Е. **14**

Баева С. А. **17**

Балаева А.В., Васильев В.В. **18**

Баркова Л.Н. **19**

Басова М.М. **20**

Белоглазов А.В. **21**

Бижанова Г.И. **22**

Богомолов Я.Л., Семенов Е.С., Юнаковский А.Д. **23**

Болдырева О.А.	**24**
Брук В.М.	**25**
Булинская Е.В.	**26**
Васильев В.В., Фролова Е.В., Хливненко Л.В.	**27**
Васильев В.В., Хливненко Л.В., Шаталина М.А.	**28**
Вирченко Ю.П., Карабутова Т.В.	**29**
Воронцов А.С.	**31**
Гликлих А.Ю.	**32**
Глызин С.Д.	**33**
Гоц Е. Г., Шишкина Э. Л.	**35**
Дикарева Е.В., Ситник С.М.	**36**
Думачев В.Н.	**37**
Думачев В.Н., Родин В.А.	**38**
Думачев В.Н., Телкова С.А.	**39**
Жданова М.М.	**41**
Загорский А.С.	**42**
Зайцев В.Ф.	**43**
Здобнова С.В.	**44**
Зубова С.П., Раецкая Е.В.	**45**

Ивирсин М.Б. **45**

Иохвидов Е.И. **47**

Кадченко С.И., Джиганчина Н.С. **48**

Карпова А.П., Сапронов Ю.И. **50**

Коняев А.Ю. **51**

Костин В.А. **52**

Костин Д.В. **53**

Крейн М.Н. **54**

Курбатова И.В. **55**

Лепский Т.А. **56**

Линчук Л.В. **57**

Лобода А.В. **58**

Лой Н.В. **59**

Лопушанская Е.В. **62**

Макринова Д.Л. **63**

Мезенцев А.В. **64**

Москвин А.Ю. **65**

Мухамадиев Э.М. **65**

Наимов А.Н. **67**

Науменко Я.А., Астахов В.И.	**68**
Нгуен Тхи Хиен	**70**
Небольсина М.Н., Джалиль М.С.	**71**
Новиков Д.В.	**72**
Огарков В.Б., И.Н. Медведев И.Н., Шагеда В. А.	**73**
Огарков В.Б., Рахманов В. Г.	**75**
Орешина М.Н.	**76**
Орлов В.П.	**76**
Павлова Н.Г.	**78**
Паринов М.А.	**79**
Перов А.И., Фетисов Р.Б.	**80**
Писарева С.В.	**85**
Покорный Ю.В., Рябцева Н.Н.	**86**
Прядко И.Н.	**88**
Рославлев Ю.Р.	**89**
Рославлева Ю.А., Афанасьева Л.Г.	**91**
Сагадеева М.А.	**93**
Савченко Г.Б., Ткачева С.А.	**94**
Савченко Г.Б., Ярцева Н.А.	**95**

Самойлова Л.А. **97**

Сергеев А. А. **98**

Снытникова С.Ю. **102**

Тарарыков Д.Ф. **103**

Торшина О.А. **104**

Тюрин В.М. **105**

Узбеков Р.Ф. **106**

Уксусов С.Н. **107**

Федорова А.В. **109**

Фоменко А.Т., Короткевич А.А. **110**

Харламов М.П. **111**

Хатько В.В. **112**

Хачатрян Н.К. **113**

Шамин Р.В. **117**

Ярцева Н.А. **118**

Abdul Hussain M.A. **122**

Limansky D.V. **123**

Voitovich M. **124**