ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ ВОРОНЕЖСКОЙ ЗИМНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ С.Г. КРЕЙНА— 2008

Воронеж 2008

УДК 517.5 517.9

Напечатано по решению Ученого совета математического факультета

Труды воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна - 2008. Воронеж: ВорГУ, 2008 - 358с.

В сборнике представлены тексты пленарных и секционных докладов и лекций в Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна, прошедшей в январе 2008 года, содержащих новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики и другим разделам современной математики.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

Абузярова Н.Ф.[1]

Неравенство типа теоремы площадей

Пусть S – класс функций, однолистных в круге $\Delta = \{z : \quad |z| < 1\}$ и имеющих разложение $\varphi(z) = z + a_2 z^2 + \dots$; Σ - класс функций, однолистных в дополнении $\Delta_e = \{w : \quad |w| < 1\}$ с разложением $\psi(w) = w + b_0 + b_1 w^{-1} + b_2 w^{-2} + \dots$, Σ_0 – подкласс Σ, состоящий из функций ψ таких, что $0 \notin \psi(\Delta_e)$. Преобразование инверсии $\varphi(z) \mapsto \varphi^{-1}(z^{-1})$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями из S и Σ_0. Классический *принцип площадей* утверждает, что *для $\psi \in \Sigma$ площадь дополнения к области $\psi(\Delta_e)$ неотрицательна.* Аналитическое выражение этого факта – лемма Гронуолла (внешняя теорема площадей, 1914-1915 гг.):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_e} |\psi'^2(w) - 1|^2 |\mathrm{d}w| = \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 \le 1, \tag{1}$$

причем равенство имеет место только для "полных"отображений ψ (для которых площадь дополнения к $\psi(\Delta_e)$ равна нулю), см. [1, §1, гл.1]. Много других утверждений было получено на основе принципа площадей для однолистных функций. Например, неравенства Грунского, дающие критерий принадлежности функции классу S (см. [1]), оценка Кебе-Бибербаха для $\varphi \in S$ и $z \in \Delta$ (см., например, [1, §5,гл. 1])

$$\left|\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1-|z|^2}\right| \le \frac{4}{1-|z|^2}.$$

Эта оценка точная: равенство достигается лишь для "полных"отображений φ.

Целью данной работы является развитие и обобщение метода площадей на компактные римановы поверхности.

1. Одно следствие теоремы Стокса. Пусть $\mathbf{S}$ — компактная риманова поверхность. Обозначим через $W^{1,2}(\mathbf{S})$ пространство классов смежности $[f] = \{f + \mathrm{const}\}$ всех локально суммируемых функций $f : \mathbf{S} \to \mathbb{C}$ для которых дифференциал $\omega_f = \mathrm{d}f$ принадлежит гильбертову пространству $L^2(\mathbf{S})$ (см. [2, Гл. 7, С. 181–182]). Напомним, что норма в $L^2(\mathbf{S})$ определяется следующим образом

$$\|\omega\|^2_{L^2} = \int_{\mathbf{S}} \omega \wedge {}^*\bar{\omega},$$

где

$$\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}, \qquad {}^*\omega = -\mathrm{i}u\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}v\,\mathrm{d}\bar{z},$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-01-00516-а.

а z — какой-нибудь локальный параметр на $\mathbf{S}$. На множестве функций f с $\omega_f = \mathrm{d}f \in L^2(\mathbf{S})$ равенство

$$\|f\|^2 = \|\mathrm{d}f\|^2_{L^2}$$

определяет полунорму. Пространство $W^{1,2}(\mathbf{S})$ мы снабдим нормой

$$\|[f]\|^2_{W^{1,2}} = \|f\|^2 = \|\mathrm{d}f\|^2_{L^2}.$$

Ясно, что для двух представителей f_1 и f_2 одного и того же класса смежности $[f]$ будет $\mathrm{d}f_1 = \mathrm{d}f_2$, поэтому в дальнейшем элементы пространства $W^{1,2}(\mathbf{S})$ – классы смежности $[f]$ – будем обозначать просто f и называть функциями.

В терминах локального параметра z дифференциал $\omega_f = \mathrm{d}f$ может быть представлен в виде $\omega_f = \partial_z f\,\mathrm{d}z + \bar{\partial}_z f\,\mathrm{d}\bar{z}$, где $\partial_z = \partial/\partial z$, $\bar{\partial}_z = \partial/\partial\bar{z}$ Это представление есть локальная форма глобального разложения

$$\omega_f = \omega_{f,1} + \omega_{f,2},$$

где $\omega_{f,1} = \partial_z f\,\mathrm{d}z$, $\omega_{f,2} = \bar{\partial}_z f\,\mathrm{d}\bar{z}$ в терминах локальных координат (см. [3, Гл. 1, 2]).

Элемент $f \in W^{1,2}(\mathbf{S})$ порождает дифференциалы второго порядка

$$\Lambda_{f,1} = \omega_{f,1} \wedge \bar{\omega}_{f,1}, \quad \Lambda_{f,2} = -\omega_{f,2} \wedge \bar{\omega}_{f,2},$$

которые в локальных координатах имеют вид

$$\Lambda_{f,1} = |\partial_z f|^2\,\mathrm{d}z \wedge\,\mathrm{d}\bar{z}, \qquad \Lambda_{f,2} = |\overline{\partial}_z f|^2\,\mathrm{d}z \wedge\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{2}$$

Заметим, что

$$\|f\|^2_{W^{1,2}} = \mathrm{i}\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1} + \mathrm{i}\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}.$$

Утверждение 1 *Пусть $f \in W^{1,2}(\mathbf{S})$. Тогда оба интеграла $\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1}$ и $\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}$ конечны и имеет место соотношение*

$$\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1} = \int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}. \tag{3}$$

Доказательство

По существу, сформулированное утверждение является одним из следствий теоремы Стокса (см. [2])

Предположим сначала, что $f \in C^2(\mathbf{S})$, и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\mathbf{S}} \mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}\bar{f}\big). \tag{4}$$

Несложные вычисления приводят к следующему соотношению в терминах локальных координат

$$\mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}\bar{f}\big) = \big(|\partial_z f|^2 - |\overline{\partial}_z f|^2\big)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}.$$

Используя последнее равенство, перепишем интеграл (4) в виде

$$\int\limits_{\mathbf{S}} \mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}\bar{f}\big) = \int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1} - \int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}. \tag{5}$$

Из теоремы 6-4 [2, Гл. 6, с. 167] следует, что

$$\int\limits_{\mathbf{S}} \mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}\bar{f}\big) = 0.$$

Учитывая (5), получаем

$$\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1} = \int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}.$$

Утверждение доказано для $f \in C^2(\mathbf{S})$. В случае произвольной $f \in W^{1,2}(\mathbf{S})$ применяем аппроксимацию в соответствующей норме гладкими функциями.

Отметим, что Предложение 1 утверждает следующее: для *точной* диференциальной формы первого порядка ω имеет место соотношение

$$\int\limits_{\mathbf{S}} \omega \wedge \bar{\omega} = 0.$$

2. Решение уравнения Лапласа в области на поверхности S и неравенство типа теоремы площадей. Рассмотрим конечносвязную область $\mathbf{\Omega}$ на $\mathbf{S}$ ($\mathbf{\Omega} \neq \emptyset,\ \mathbf{S}$) и мероморфную функцию R на $\mathbf{S}$, все полюсы которой принадлежат $\mathbf{\Omega}$. Обозначим $p_1, \ldots, p_N$ полюсы функции R, и пусть m_j — кратность полюса p_j, $j = 1, \ldots, N$. Имеет место

Теорема 1 *Существует функция $Q : \mathbf{S} \to \mathbb{C}^\infty$, обладающая свойствами:*
($Q1$) Q равна нулю на множестве $\mathbf{S} \setminus \mathbf{\Omega}$;
($Q2$) Q — гармоническая на $\mathbf{\Omega} \setminus \{p_1, \ldots, p_N\}$;
($Q3$) разность $P = R - Q$ (более точно, класс смежности $[P] = \{P + const\}$) принадлежит пространству $W^{1,2}(\mathbf{S})$ и выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbf{\Omega}} \frac{\mathrm{i}}{2}\Lambda_{P,1} \le \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \frac{\mathrm{i}}{2}\Lambda_{P,2}. \tag{6}$$

Доказательство.

Предположим сначала, что область $\mathbf{\Omega}$ имеет кусочно аналитическую границу. Эта область сама может быть рассмотрена как риманова поверхность. Введем для нее *сопряженную поверхность* $\mathbf{\Omega}^*$ (см. [2, Гл. 8, с. 217, задача 1]). А именно, пусть $\mathbf{\Omega}^*$ — еще одна копия $\mathbf{\Omega}$ и $* : \ \mathbf{\Omega} \to \mathbf{\Omega}^*$ — тождественное отображение, $p^* = *(p)$, обратное к которому $*^{-1}$ мы тоже будем обозначать $*$, так что $p^{**} = p$. Комплексная структура на $\mathbf{\Omega}^*$ определяется следующим образом. Если отображение $z = \Phi(p)$ задает локальные координаты в окрестности какой-нибудь точки $p_0 \in \mathbf{\Omega}$ с $\Phi(p_0) = 0$, то локальный параметр $\Phi^*(p^*)$ в окрестности точки p_0^* задается так: $\bar{z} = \overline{\Phi}(p) = \Phi^*(p^*)$. Определим "удвоенную"область ('Schottky double') $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega} \cup \mathbf{\Omega}^* \cup \partial\mathbf{\Omega}$, отождествляя сопряженные граничные точки $p \in \partial\mathbf{\Omega}$ и $p^* \in \partial\mathbf{\Omega}^*$. В качестве локального параметра в окрестности таких отождествленных точек p_0 и p_0^* берется

$$z = \begin{cases} \chi(q), \quad p \in \mathbf{\Omega}, \\ \overline{\chi}(h^{-1}(q)), \quad q \in \mathbf{\Omega}^*, \end{cases}$$

где $z = \chi(p)$ — специальный локальный параметр, определенный в некоторой окрестности $V \subset \mathbf{S}$ точки p_0 и отображающий множество $V \cap \mathbf{\Omega}$ на область в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ так, что $\chi(p_0) = 0$ и связная часть $\partial\mathbf{\Omega} \cap V$, содержащая p_0, переходит взаимно однозначно и непрерывно в отрезок вещественной оси (см. [2, Гл. 8, с. 217, задача 2]). Таким образом, область $\widetilde{\mathbf{\Omega}}$ с введенной комплексной структурой становится компактной римановой поверхностью.

Далее, согласно следствию 8-1 в [2, Гл.8, с. 211], для каждой точки p_j, $j = 1, \ldots, N$, существуют функции g_j и g_j^*, обладающие следующими свойствами: g_j — гармоническая в $\widetilde{\mathbf{\Omega}} \setminus \{p_j\}$, g_j^* — гармоническая в $\widetilde{\mathbf{\Omega}} \setminus \{p_j^*\}$;

g_j имеет в точке p_j ту же особенность, что и R, а g_j^* имеет в точке p_j^* особенность такую же, как $(-R \circ \ *)$.

Положим

$$Q_j(p) = \frac{1}{2}\left\{g_j(p) + g_j^*(p) - g_j(p^*) - g_j^*(p^*)\right\}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Функция Q_j удовлетворяет условиям:

(1) она гармонична в $\mathbf{\Omega} \setminus \{p_j\}$;

(2) функция $(R - Q_j)$ регулярна (не имеет особенности) в точке p_j;

(3) Q_j непрерывна в $\bar{\mathbf{\Omega}} \setminus \{p_j\}$, и $Q_j(p) = 0$ на границе $\partial\mathbf{\Omega}$.

Определим теперь функцию Q :

$$Q(p) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} Q_j(p), \qquad p \in \mathbf{\Omega}, \\ 0, \qquad p \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{\Omega}, \end{cases}$$

и положим

$$P(p) = R(p) - Q(p).$$

Из свойств функции Q следует, что P совпадает с R на компактном множестве $\mathbf{S} \setminus \mathbf{\Omega}$, а также, что P гармонична всюду в $\mathbf{\Omega}$. Так как граница области $\mathbf{\Omega}$ предполагается кусочно аналитической, функция Q и ее производные $\partial_z Q$, $\bar{\partial}_z Q$ гармоничны и равны нулю на $\partial\mathbf{\Omega}$. Из всего вышесказанного можем заключить, что справедливо включение $P \in W^{1,2}(\mathbf{S})$.

В общем случае, когда граница $\partial\mathbf{\Omega}$ не является кусочно аналитической, область $\mathbf{\Omega}$ аппроксимируем возрастающей последовательностью областей $\mathbf{\Omega}_n$ с кусочно аналитическими границами. Для каждой области $\mathbf{\Omega}_n$ можно построить функцию Q_n описанным выше способом. Для перехода к пределу воспользуемся результатом А. Берлинга (см. [4, с.53]), из которого следует равномерная по n ограниченность так называемых $\mathrm{Lip}\,\frac{1}{2}$-норм (норм в пространстве Гельдера с показателем $1/2$) функций Q_n, взятых вне объединения малых окрестностей точек $p_1, \ldots, p_N$. Ограниченность таких норм влечет слабую сходимость подпоследовательности $\{Q_n\}$ к некоторой функции Q, определенной в $\mathbf{\Omega}$. Введем, как и выше, $P= R- Q$ с этой предельной функцией Q.

Ясно, что для функций P и Q выполнены все требуемые условия, кроме, быть может, включения $P \in W^{1,2}(\mathbf{S})$. Это включение будет вытекать из следующего факта: функция P решает задачу Дирихле в области $\mathbf{\Omega}$ с граничными значениями, равными R, а решение задачи Дирихле минимизирует интеграл Дирихле, взятый по области $\mathbf{\Omega}$. $W^{1,2}(\mathbf{S})$-(полу-)норма функции P есть сумма ее интеграла Дирихле по $\mathbf{\Omega}$ и интеграла Дирихле функции R по $\mathbf{S} \setminus \mathbf{\Omega}$; оба эти интеграла конечны. Следовательно, получаем, что P принадлежит принадлежит $W^{1,2}(\mathbf{S})$.

Докажем неравенство (6) для функции $P = R - Q$. Согласно (2), имеем

$$\Lambda_{P,1} = |\partial_z R - \partial_z Q|^2 \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}, \quad \Lambda_{P,2} = |\overline{\partial}_z Q|^2 \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z},$$

где z — локальный параметр.

Заметим, что $|\mathrm{d}z| = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$. Верны соотношения

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{P,1} \geq \frac{\mathrm{i}}{2}\int\limits_{\mathbf{\Omega}} \Lambda_{P,1}$$

и

$$\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{P,2} = \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \Lambda_{P,2}.$$

Учитывая эти соотношения и применяя (3) к функции P, получаем

$$\int\limits_{\mathbf{\Omega}} \frac{\mathrm{i}}{2}\Lambda_{P,1} \leq \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \frac{\mathrm{i}}{2}\Lambda_{P,2},$$

где в терминах локальных координат

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\,\Lambda_{P,1} = |\partial_z R - \partial_z Q|^2\,|\mathrm{d}z|, \quad \frac{\mathrm{i}}{2}\,\Lambda_{P,2} = |\overline{\partial}_z Q|^2\,|\mathrm{d}z|.$$

Теорема доказана.

Замечание 1 *Знак равенства в (6) имеет место в точности тогда, когда дополнение* $\mathbf{S} \setminus \mathbf{\Omega}$ *имеет нулевую площадь.*

Замечание 2 *Положим* $\mathbf{S} = \mathbb{C}^\infty$ *и пусть, как и выше,* $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ *– конечносвязная нетривиальная область,* $\Omega \neq \emptyset,\ \mathbb{C}^\infty$*. Рассмотрим мероморфную функцию* $R(w) = (w-\mu)^{-1}$, $w \in \Omega$ *с единственным простым полюсом* $\mu \in \Omega$*. Если* $\Phi(w)$ *– функция, конформно и однолистно отображающая область* Ω *на единичный круг* Δ*, то фунция Грина области* Ω *имеет вид*

$$G_\Omega(w,\mu) = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{\Phi(w-\Phi(\mu))}{1-\Phi(w)\overline{\Phi(\mu)}}\right|^2.$$

Функция

$$Q(w) = 2\partial_\mu G_\Omega = \frac{\Phi'(\mu)}{\Phi(w)-\Phi(\mu)} - \frac{\Phi'(\mu)}{1-\overline{\Phi(w)}\Phi(\mu)}$$

удовлетворяет условиям доказанной теоремы для выбранной R*. Для функции* $P = R - Q$ *имеем*

$$\partial_w P = -\frac{1}{(w-\mu)^2} + \frac{\Phi'(\mu)\Phi'(w)}{(\Phi(w)-\Phi(\mu))^2},$$

$$\overline{\partial}_w P = -\frac{\Phi'(\mu)\overline{\Phi'(w)}}{1-(\overline{\Phi(w)}\Phi(\mu))^2} = -\pi\overline{K_\Omega(w,\mu)},$$

где K_Ω *– воспроизводящее ядро Бергмана (см. [5, стр. 208, формула (2.3)]).*

Неравенство (6) в данном случае будет иметь вид

$$\int\limits_\Omega \left|\frac{1}{(w-\mu)^2} - \frac{\Phi'(\mu)\Phi'(w)}{(\Phi(w)-\Phi(\mu))^2}\right|^2 |dw| \leq \frac{\pi|\Phi'(\mu)|^2}{(1-|\Phi(\mu)|^2)^2},$$

так как в силу свойств функции K_Ω

$$\int\limits_\Omega |\overline{\partial}_w P|^2|dw| = \pi^2\int\limits_\Omega |K_\Omega(w,\mu)|^2|dw| = \pi^2 K_\Omega(\mu,\mu) = \frac{\pi|\Phi'(\mu)|^2}{(1-|\Phi(\mu)|^2)^2}.$$

Переходя к интегрированию по Δ *получим*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_\Delta \left|\frac{\varphi'(z)\varphi'(\lambda)}{(\varphi(z)-\varphi(\lambda))^2} - \frac{1}{(z-\lambda)^2}\right|^2 |dz| \leq \frac{1}{(1-|\lambda|^2)^2},$$

где $\varphi = \Phi^{-1}$, $\lambda = \Phi(\mu)$*. В частности, при* $\lambda = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ *будет*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_\Delta \left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi^2(z)} - \frac{1}{z^2}\right|^2 |dz| \leq 1.$$

Если переписать последнее соотношение в терминах функции $\psi(w) = \varphi^{-1}(w^{-1})$*, которая, в силу условий на* φ*, принадлежит классу* Σ*, мы получим лемму Гронуолла (1).*

Литература

[1] Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука. 1975. – 336 с.

[2] Springer G. Introduction to Riemann surfaces. Addison-Welsey, USA, 1957. – 307 p.

[3] Форстер О. Римановы поверхности. М.: Мир. 1980. – 248 с.

[4] Beurling A. The collected works of Arne Beurling. Vol.1. Complex Analysis (L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger and J. Wermer, eds.). Birkhäuser Boston. Boston. 1989.

[5] Bergman S., Schiffer M. Kernel functions and conformal mapping. Compositio Math. V. 8. 1951. Pp. 205–249.

Алёшина Н.П.

Проблема выявления логических средств развития мышления, обладающих эвристическими возможностями, и их значение в обучении математике

В соответствии со стандартом основного общего образования одной из приоритетных целей обучения математике является интеллектуальное развитие учащихся и в частности, как уточняет Г. И. Саранцев [4], развитие логической и эвристической составляющих мышления. Поэтому на современном этапе развития образования проблема выявления и внедрения в практику преподавания эвристических и логических средств развития мышления очень актуальна. В том числе особенный интерес представляет исследование взаимосвязи логики и эвристики, тем более что в настоящее время существует мнение о том, что они никак не связаны между собой. В действительности логические законы часто используются в качестве эвристик, а многие эвристики в свою очередь основываются на логических правилах вывода. Более того, можно сказать, что эвристика является обратной стороной логики. Обоснуем нашу точку зрения.

Во-первых, что значит – сделать открытие? Это значит не только рассказать о своей новой идее, предложении, но и привести рассуждение, которое убеждает в истинности данного предложения, и, таким образом, доказать правомерность своего открытия, так как ничего не открыто – пока не доказано. Значит, логика принимает самое непосредственное участие в процессе открытия нового.

Во-вторых, знание основных понятий и законов логики уже имеет большое значение при решении задач.

И, в-третьих, на основе логических правил вывода можно дать эффективные, действенные советы по отысканию доказательств.

Отметим, что термин "эвристика"понимают в различных значениях. Мы под эвристикой, в рамках данного изложения, вслед за Е. Е. Семеновым [5], будем подразумевать совет – как искать решение задачи. Что касается логики, то здесь речь пойдет о математической логике, так как в настоящее время она разработала более удобный и совершенный аппарат для анализа рассуждений по сравнению с традиционной логикой.

Наиболее распространенными логическими средствами решения задач являются: *метод доказательства от противного, закон исключенного третьего и закон контрапозиции.* Но это далеко не полный список. Некоторые логические законы так очевидны, что мы используем их в процессе рассуждений автоматически, не задумываясь. Но даже самые примитивные, на первый взгляд, результаты логики имеют большое значение в обучении математике.

Рассмотрим некоторые из перечисленных выше логических средств решения задач и продемонстрируем их эвристические возможности на примере решения школьных задач.

1) *Метод доказательства от противного* является одним из самых распространенных в школьной практике логических средств доказательства теорем. Докажем с его помощью следующее утверждение:

"*У любого треугольника хотя бы два угла острые* "[2, стр. 55].

Доказательство. Допустим, что у треугольника только один острый угол или вообще нет острых углов. Тогда у этого треугольника есть два угла, каждый из которых не меньше 90°. Сумма этих двух углов уже не меньше . А это невозможно, так как сумма всех углов треугольника равна 180°. Значит, наше предположение неверно, значит, у любого треугольника хотя бы два угла острые, что и требовалось доказать.

2) *Закон исключенного третьего* , а именно:

Каково бы ни было предложение A *, имеет место предложение*
$$A \vee (\neg A) ,$$

часто используется для решения логических задач, включаемых в процесс обучения, например, с целью повысить интерес школьников к математике. Рассмотрим, как данный закон помогает решить следующую задачу:

"*Показания трех свидетелей Антона, Бориса и Вадима на допросе у следователя противоречили, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи. Антон утверждал, что Борис лжет, Борис обвинял во лжи Вадима, а Вадим уговаривал следователя не верить ни Антону, ни Борису. Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?* "[1, стр. 37-38].

Решение. В силу закона исключенного третьего Антон и Борис не могут одновременно лгать или говорить правду, так как их высказывания взаимно исключают друг друга - если Антон говорит правду, то из его высказывания следует, что Борис лжет, а если Антон лжет, то верно отрицание его высказывания, значит, Борис говорит правду. Значит, высказывание Вадима "Антон и Борис - оба лгут"заведомо ложное. Следовательно, Борис сказал правду о Вадиме. Тогда Антон солгал.

3) *Закон контрапозиции* является очень эффективным эвристическим средством. Сформулируем данный закон и продемонстрируем его эвристические возможности на конкретном примере.

Закон контрапозиции гласит:

Каковы бы ни были предложения A *и* B *, имеет место импликация*
$$(A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A)).$$

Решим задачу:

"*Докажите, что, каковы бы ни были действительные числа* x_1 *и* x_2, *если* $x_1 \neq x_2$, *то* $x_1^3 \neq x_2^3$"[1, стр. 55-56].

Решение. Пусть $x_1^3 = x_2^3$. Тогда $x_1^3 - x_2^3 = 0$. Значит, $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$, так что $x_1 - x_2 = 0$ или $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$. И то, и другое возможно только в том случае, если $x_1 = x_2$. Итак, если $x_1^3 = x_2^3$, то $x_1 = x_2$. Это и означает, что если $x_1 \neq x_2$, то $x_1^3 \neq x_2^3$.

Обратим внимание на последний шаг в приведенном доказательстве:

если $x_1^3 = x_2^3$, то $x_1 = x_2$;
это и означает, что,
если $x_1 \neq x_2$, то $x_1^3 \neq x_2^3$.

Здесь выражена уверенность в том, что импликации $x_1^3 = x_2^3 \to x_1 = x_2$ и $x_1 \neq x_2 \to x_1^3 \neq x_2^3$ эквивалентны. И это действительно так в силу закона контрапозиции.

Отсюда можно вывести следующий полезный СОВЕТ: *Пытаясь доказать какую-нибудь импликацию, держите в поле зрения и ее контрапозит. Не исключено, что он доказывается легче* [1, стр. 58].

4) Закон коммутативности конъюнкции и закон коммутативности дизъюнкции говорят нам о том, что

Каковы бы ни были предложения A, B, *имеют место предложения:*
$(A \wedge B) \to (B \wedge A)$; $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$;
$(A \vee B) \to (B \vee A)$; $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$.

Несмотря на свою простоту данные законы, также оказывают немалую помощь при решении задач.

Например, если требуется доказать истинность конъюнкции предложений, то закон коммутативности конъюнкции позволяет нам начать доказательство в любом порядке – сначала доказать истинность первого члена конъюнкции, а затем второго или наоборот независимо от количества конъюнктивных членов. При этом необходимость доказывать истинность каждого члена конъюнкции следует из соглашения: "*Конъюнкция двух предложений считается верной, когда верны оба ее члена, и считается неверной, когда хотя бы один из ее членов неверен* ".

Если же условие задачи представляет собой конъюнкцию предложений, то в силу того же закона коммутативности конъюнкции мы можем использовать эти данные в любой последовательности.

То же самое можно сказать и о роли закона коммутативности дизъюнкции при решении задач. Если условие задачи представляет собой дизъюнкцию предложений, то есть задача имеет вид "Из A или B вывести C", то не принципиально, какую из задач "Из A вывести C"или "Из B вывести C"стоит начать решать первой [7]. Если требуется доказать дизъюнкцию предложений, то достаточно доказать какое-нибудь одно из этих предложений. Последнее вытекает из следующего соглашения: "*Дизъюнкция двух предложений считается неверной, когда оба ее члена неверны, и считается верной, когда хотя бы один из них верен* ".

5) *Закон ложной посылки* , а именно:

Каковы бы ни были предложения A, B, имеет место импликация:
$$(\neg A) \to (A \to B) \ ,$$

гласит, что импликация с ложной посылкой всегда истинна, и тем самым напоминает *решающему: 1) проверить корректно ли сформулирована задача; 2) следить за правильностью каждого шага доказательства; 3) сделать проверку правильности решения, после того как задача решена* .

Решим следующую задачу:

"*Найти тангенс угла второй координатной четверти, если синус вдвое меньшего угла равен* $\frac{3}{5}$ "[3, стр. 46].

Решение. Выкладки приводят к ответу $\frac{24}{7}$. Но если синус половинного угла равен $\frac{3}{5}$, то этот угол меньше 45°, а потому угол, тангенс которого мы ищем, не может лежать во второй четверти.

Кроме того, закон ложной посылки помогает искоренить некоторые ошибки в доказательствах, например, когда вместо вывода доказываемого предложения из какого-нибудь верного, выводят верное из того, которое нужно доказать. Что же в этом случае можно сказать об истинности того предложения, которое требовалось доказать изначально? Ничего, так как: 1) оно могло быть ложным, а изо лжи следует все, что угодно, в том числе и истина; 2) импликация с верным заключением верна при любой посылке, в том числе и при неверной.

Таким образом, логические средства, используемые в качестве эвристик, не только пополняют набор эффективных, действенных методов решения задач учащихся, но и способствуют искоренению некоторых распространенных ошибок в доказательствах. А логические упражнения в целом развивают логическое мышление школьников, приучают к строгости и обоснованности каждого шага мышления, к критичной проверке знаний на истинность. Кроме учебных задач здесь немаловажную роль играют также логические задачи, занимательность которых повышает интерес учащихся к изучаемому материалу и к предмету в целом. А, как известно, повышение мотивации обучения – сложная проблема, и любой даже самый малый шаг на пути ее решения приносит ощутимые положительные результаты.

Учитывая все вышесказанное, отметим, что, несмотря на пользу, которую приносят законы логики союзов в плане развития логического и эвристического мышления школьников (что было экспериментально нами подтверждено), в явном виде данные эвристики на уроках математики не применяются. Во многом это обусловлено тем, что в педвузах математическая логика "вошла в число обязательных сравнительно недавно, поэтому не все преподаватели, особенно имеющие большой стаж работы, имели возможность изучить ее в студенческие годы"[6, стр. 78]. Сложившаяся ситуация также усложняется из-за недостаточной методической разработки данной проблемы, и как следствие отсутствием соответствующих методических и дидактических пособий для учителей. При этом даже хорошо подготовленные учителя не в состоянии самостоятельно подобрать, упорядочить и целенаправленно применять на уроках математики такие учебные задачи, на примере решения которых наиболее наглядно демонстрируется эффективное применение эвристических и логических средств решения задач.

Таким образом, противоречие между необходимостью максимального развития логического и эвристического мышления учащихся и реальным положением дел обуславливает актуальность проблемы выявления и внедрения в практику преподавания логических средств развития мышления, обладающих эвристическими возможностями.

Литература

[1] Назиев А. Х. Вводный курс математики (Элементы математической логики): Учебное пособие / РГПУ. – Рязань, 2000. – 125 с.

[2] Погорелов А. В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. сред. шк. – М.:Просвещение, 1993. – 383 с.

[3] Рыжик В. И. Логика в школьном математическом образовании // Математика в школе. – 2007. – №3. – с. 39-47.

[4] Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. - 224 с.

[5] Семенов Е. Е. Размышления об эвристиках // Математика в школе. – 1995. – № 5. – с. 39-43.

[6] Тимофеева И. Л. К вопросу об использовании логической символики при обучении математике // Математика в школе. – 2006. – № 8. – с. 76-78.

[7] Тимофеева И. Л. О логических эвристических средствах построения доказательств // Математика в школе. – 2004. – №10. – с. 42-50.

Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы М.: Наука. 1969. – 526 с.

Антонова Е.С.

Оценка числа траекторий без самопересечений на квадратной решётке

1. Введение. В статистической физике полимеров возникает задача об оценке меры возможных пространственных расположений системы длинных молекул [1]. Частным случаем этой задачи является вычисление меры пространственных расположений одной молекулы при фиксированном положении некоторой её отмеченной точки. Даже в такой упрощённой постановке, задача является очень сложной уже на стадии формулировки точной математической модели, адекватной физической ситуации. Поэтому, задачу формулируют на основе дискретизации возможных пространственных расположений. В этом случае, дискретные положения одной молекулы описываются путями без самопересечений на целочисленных (избегая усложнений несущественными физическими постоянными) решётках $\mathbb{Z}^d$, $d = 2, 3$. В результате, задача сводится к вычислению числа имеющихся на них несамопересекающихся путей. В настоящей работе эта задача изучается в случае $d = 2$. Хотя идея предлагаемого нами метода оценивания числа путей без самопересечений может быть реализована и при $d = 3$. Эта реализация приводит к более громоздким вычислениям, аналогичным проведенным в данной работе.

Дадим точные определения.

Определение 1 *Пара* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *называется парой соседей на* $\mathbb{Z}^2$*, если* $\mathbf{y} = \mathbf{x} \pm \mathbf{e}_i$*,* $i = 1, 2$*, где векторы* $\mathbf{e}_1$*,* $\mathbf{e}_2$ *являются базисными ортами в* $\mathbb{R}^2$*, т.е. считается* $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ *и* $\mathbf{e}_1 = \langle 1, 0 \rangle$*,* $\mathbf{e}_2 = \langle 0, 1 \rangle$*.*

Определение 2 *Путём на* $\mathbb{Z}^2$ *(исходящем из точки 0) называется последовательность* $\gamma = \langle 0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \rangle$*, состоящая из точек* $\mathbf{x}_i = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \in \mathbb{Z}^2$*,* $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$*,* $i = 1, ..., n$ *таких, что каждая пара* $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} \rangle$*,* $i = 0, 1, ..., n-1$ *этой последовательности является парой соседей. Число* n *называется длиной пути* γ*. Класс всех путей обозначим символом* Γ*.*

Определение 3 *Путь* $\gamma = \langle 0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \rangle$ *на множестве* $\mathbb{Z}^2$ *называется несамопересекающимся, если все точки, входящие в его состав, различны, и, для любых номеров* $1 < j \leq n - i$*,* $0 \leq i \leq n-1$*, пары* $\langle x_i, x_{i+j} \rangle$ *не являются соседями на квадратной решётке.*

Класс всех несамопересекающихся путей длины n обозначим Γ_n. Задача состоит в вычислении мощности $|\Gamma_n|$ класса Γ_n как функции от n. Точное решение такой задачи оказывается, по-видимому, очень сложным. С другой стороны, оно и не является интересным с прикладной точки зрения. Важно научиться вычислять эту функцию приближённо с контролируемой точностью. Из элементарных оценок $2^{n+2} < |\Gamma_n| < 4 \cdot 3^{n-1}$ следует, что существует число λ_* такое, что $\ln|\Gamma_n| = n \ln \lambda_* O(1)$, $2 < \lambda_* < 3$, которое определяет главный член асимптотического поведения функции $|\Gamma_n|$. В настоящей работе, предложен метод оценивания сверху этого числа. Получаемые этим методом оценки сходятся к λ_*. Однако, не удаётся найти гарантированные оценки точности каждого из получаемых приближённых значений.

2. Построение верхних оценок числа непересекающихся путей. Введём операцию склеивания путей из Γ. Пусть $\gamma = \langle 0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \rangle$ и $\gamma' = \langle 0, \mathbf{x}'_1, ..., \mathbf{x}'_{k'} \rangle$. Операция $\vee$ склеивания сопоставляет паре таких путей другой путь, обозначаемый $\gamma \vee \gamma'$, который определяется формулой

$$\gamma \vee \gamma' = \langle 0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k, \mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}_k, ..., \mathbf{x}'_{k'} + \mathbf{x}_k \rangle .$$

Определим, теперь, класс $\Gamma_n^{(k)}$ путей из Γ, согласно следующей формуле

$$\Gamma_n^{(k)} = \{ \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee ... \vee \gamma_n \, : \gamma_i \in \Gamma_k, i = 1, ..., n, \gamma_i \vee \gamma_{i+1} \in \Gamma_{2k}, i = 1, ..., n-1 \} .$$

Таким образом, класс $\Gamma_n^{(k)}$ состоит из тех путей длины nk, которые составлены из последовательного прохождения n несамопересекающихся путей γ_i, $i = 1, ..., n$ длины k, причём результатом склеивания каждой пары соседних путей $\{\gamma_i, \gamma_{i+1}\}$ является путь из Γ_{2k}.

Из данного определения класса $\Gamma_n^{(k)}$ следует, что $\Gamma_n^{(k)} \supset \Gamma_{nk}$ и, поэтому,

$$|\Gamma_n^{(k)}| \geq |\Gamma_{nk}| . \tag{1}$$

Наш метод оценивания функции $|\Gamma_n|$ при больших значениях $n \in \mathbb{N}$ основан этом неравенстве. Так как из (1) следует, что для получения асимптотики при $n \to \infty$ функции $|\Gamma_{nk}|$, достаточно вычислить аналогичную асимптотику функции $|\Gamma_n^{(k)}|$. С целью решения последней задачи, наряду с классом путей $\Gamma_n^{(k)}$, введём, для каждого $\gamma \in \Gamma_k$ при фиксированном $k \in \mathbb{N}$, классы путей

$$\Gamma_n^{(k)}[\gamma] = \{ \sigma \in \Gamma_n^{(k)} : \sigma = \gamma' \vee \gamma, \gamma' \in \Gamma_{n-1}^{(k)} \} . \tag{2}$$

Из этого определения непосредственно следует, что

$$\Gamma_n^{(k)} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_k} \Gamma_n^{(k)}[\gamma] ,$$

причём это объединение дизъюнктивно, $\Gamma_n^{(k)}[\gamma] \cap \Gamma_n^{(k)}[\gamma'] = \varnothing$ при $\gamma \neq \gamma'$. Дизъюнктивность объединения приводит к следующему выражению числа элементов $|\Gamma_n^{(k)}|$ в классе $\Gamma_n^{(k)}$,

$$|\Gamma_n^{(k)}| = \sum_{\gamma \in \Gamma_k} |\Gamma_n^{(k)}[\gamma]| , \tag{3}$$

При фиксированном значении $k \in \mathbb{N}$, введём линейное пространство $\mathbb{L}_k$ числовых функций $\mathsf{f}(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_k$, размерность которого равна $|\Gamma_k|$. При этом каждая функция $S(\gamma, \gamma')$ на $\mathbb{L}_k \times \mathbb{L}_k$ определяет линейный оператор S на $\mathbb{L}_k$, согласно формуле

$$(\mathsf{Sf})(\gamma) = \sum_{\gamma' \in \Gamma_k} S(\gamma, \gamma') \mathsf{f}(\gamma') \,. \tag{4}$$

Пусть функция $S(\gamma, \gamma')$ определяется формулой

$$S(\gamma, \gamma') = \begin{cases} 1 & ; \gamma \vee \gamma' \in \Gamma_{2k} \,, \\ 0 & ; \gamma \vee \gamma' \notin \Gamma_{2k} \,. \end{cases} \tag{5}$$

При фиксированном значении k, рассмотрим набор функций

$$\mathsf{f}^{(n)}(\gamma) = |\Gamma_n^{(k)}[\gamma]| \,, \quad \gamma \in \Gamma_k \,, \quad n \in \mathbb{N} \,. \tag{6}$$

Лемма 1 *Оператор* S*, соответствующий функции (5), обладает свойством*

$$\mathsf{f}^{(n+1)} = \mathsf{Sf}^{(n)} \,. \tag{7}$$

$\square$ Формула (7) следует непосредственно из (4), (5) и (6). $\blacksquare$

Следствие 1 *При любом* $k \in \mathbb{N}$*, число* $|\Gamma_n^{(k)}|$ *определяется формулой*

$$|\Gamma_n^{(k)}| = \sum_{\gamma \in \Gamma_k} (\mathsf{S}^{n-1} \mathsf{i})(\gamma) = (\mathsf{i}, \mathsf{S}^{n-1} \mathsf{i}) \,, \tag{8}$$

где, $\mathsf{i}(\gamma) = 1$ *при всех* $\gamma \in \Gamma_k$ *и* $(\cdot, \cdot)$ *– стандартное скалярное произведение в линейном пространстве* $\mathbb{L}_k$*.*

$\square$ Так как, согласно определению (2), $\mathsf{f}^{(1)}(\gamma) = |\Gamma_1^{(k)}[\gamma]| = 1$, то, используя формулу (7), индукцией по $n = 1, 2, 3, ...$, получаем (8). $\blacksquare$

Пусть $\lambda_*(k)$ – максимальное собственное число $\lambda_*(k)$ оператора S. Тогда имеет место

Теорема 1 *Для любого* $k \in \mathbb{N}$*, имеет место верхняя оценка* $\lambda_* < \lambda_k = \lambda_*^{1/k}(k)$ *k-го порядка числа* λ_**.*

$\square$ Достаточно доказать предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} |\Gamma_n^{(k)}|^{1/n} = \lambda_*(k) \,. \tag{9}$$

Пусть $\mathsf{h}_i(\gamma)$, $j = 1, ..., |\Gamma_k|$ – функции соответствующие жорданову представлению оператора S. Обозначим, далее, $\lambda_j(k)$ – собственные числа оператора S соответствующие функциям $\mathsf{h}_j(\cdot)$, $j = 1, ..., |\Gamma_k|$. Так как оператор S имеет неотрицательные матричные элементы, то, согласно теореме Фробениуса

[2], он имеет положительное собственное число $\lambda_*(k)$, которое является максимальным по модулю среди всех его собственных чисел. Мы пометили это число номером $k \in \mathbb{N}$, указав явную зависимость от k оператора S. Разложим вектор-функцию $\mathsf{i}(\gamma) = 1$, $\gamma \in \Gamma_k$ по базису, состоящему из набора функций $\mathsf{h}_j(\gamma)$, $j = 1, ..., |\Gamma_k|$,

$$\mathsf{i}(\gamma) = \sum_{j=1}^{|\Gamma_k|} a_j \mathsf{h}_j(\gamma)\,. \tag{10}$$

Согласно определению функций $\mathsf{h}_j(\gamma)$, $j = 1, ..., |\Gamma_k|$, имеем $\mathsf{S}\mathsf{h}_j = \lambda_j(k)\mathsf{h}_k$, где функции h_k соответствует то же самое собственное число $\lambda_j(k)$, что и функции h_j. Кроме того, $\mathsf{S}^n\mathsf{h}_j = 0$ в том случае, если h_j не является собственной функцией и при этом $n \le |\Gamma_k|$. Тогда для значений n, больших $|\Gamma_k|$, на основании (10), имеем

$$\mathsf{S}^{n-1}\mathsf{i} = \sum_j a_j [\lambda_j(k)]^{n-1}\mathsf{h}_j\,,$$

где суммирование производится только по собственным функциям. Из последнего разложения следует

$$(\mathsf{i}, \mathsf{S}^{n-1}\mathsf{i})^{1/n} = [\lambda_*(k)]^{(n-1)/n}\left[\sum_j a_j[\lambda_j(k)/\lambda_*(k)]^{n-1}(\mathsf{i}, \mathsf{h}_j)\right]^{1/n}.$$

Заметим, что $|\lambda_j(k)/\lambda_*(k)| < 1$ для номеров j, которые не соответствуют собственным векторам с собственными числами $\lambda_j(k)$, обладающими свойством $|\lambda_j(k)| = \lambda_*(k)$. Тогда, при $n \to \infty$, в сумме, стоящей в правой части этого равенства, остаются только слагаемые с теми номерами j, для которых $|\lambda_j(k)/\lambda_*(k)| = 1$. Это факт нами отмечен звёздочкой при знаке суммирования.

Как сказано выше, согласно теореме Фробениуса, по крайней мере, одно такое собственное число существует. Поэтому, переходя к пределу в обеих его частях, получаем

$$\lim_{n\to\infty}(\mathsf{i}, \mathsf{S}^{n-1}\mathsf{i})^{1/n} = \lambda_*(k)\lim_{n\to\infty}\left[\sum_j^{*} a_j(\mathsf{i}, \mathsf{h}_j)\right]^{1/n} = \lambda_*(k)\,.$$

Левая часть этого равенства, согласно (8), равна левой части (9). ■

3. Параметризация матрицы S**.** В этом разделе мы разработаем конкретный алгоритм расчёта оценок λ_k, $k \in \mathbb{N}$ и выполним такой расчёт в простейших случаях.

Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$ и введём следующую естественную нумерацию путей из Γ_k. Занумеруем числами 1, 2, 3, 4 векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $(-\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_3$, $(-\mathbf{e})_2 = \mathbf{e}_4$, соответственно, в порядке их следования против часовой стрелки. Каждому пути $\gamma = \langle 0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k\rangle$ из Γ_k сопоставим взаимно однозначным образом последовательность $\langle \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_k}\rangle$, определяемую последовательностью

$\langle i_1, ..., i_k \rangle$ номеров со значениями $i_j \in \{1,2,3,4\}$, $j = 1, ..., k$, где $\mathbf{e}_{i_j} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}$. Тогда, каждому пути γ взаимно-однозначным образом сопоставляется последовательность номеров $\langle i_1, ..., i_k \rangle$ с указанными значениями компонент. Используя это взаимно-однозначное соответствие, введём обозначения для значений функции $S(\gamma, \gamma')$, а именно, положим

$$S(\gamma, \gamma') \equiv S[i_1, ..., i_k; i_1', ..., i_k'] ,$$

если $\gamma \Leftrightarrow \langle i_1, ..., i_k \rangle$, $\gamma' \Leftrightarrow \langle i_1', ..., i_k' \rangle$. Функцию $S[i_1, ..., i_k; i_1', ..., i_k']$ можно рассматривать как $|\Gamma_k| \times |\Gamma_k|$- матричную реализацию оператора S.

Заметим, что число $|\Gamma_k|$ кратно четырём, так как каждому пути γ, соответствует четыре несовпадающих пути, которые получаются из γ поворотом на угол $j\pi/2$, $j = 0,1,2,3$. Поэтому класс Γ_k разбивается на четыре равномощных непересекающихся класса путей. Два пути $\gamma = \langle \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_k} \rangle$, $\gamma' = \langle \mathbf{e}_{i_1'}, ..., \mathbf{e}_{i_k'} \rangle$ из фиксированного класса имеют совпадающий первый сдвиг $\mathbf{e}_{i_1} = \mathbf{e}_{i_1'}$, $i_1 = i_1'$.

Отметим очевидное свойство матричной реализации $S[i_1, ..., i_k; i_1', ..., i_k']$.

Лемма 2 *Имеет место свойство инвариантности*

$$S[i_1 + j, ..., i_k + j; i_1' + j, ..., i_k' + j] = S[i_1, ..., i_k; i_1', ..., i_k'] , \tag{11}$$

где сдвиг индексов на величину j в левой части формулы понимается следующим образом, $j + l \equiv (j + l - 1) \bmod 4 + 1$, $l = i_1, ..., i_k$.

$\square$ Формула (11) следует из того, что добавление, по указанному правилу, ко всем номерам последовательностей $\langle i_1, ..., i_k \rangle$, $\langle i_1', ..., i_k' \rangle$ числа $j \in \{1,2,3,4\}$ соответствует повороту обоих путей γ и γ' на угол $j\pi/2$. При этом свойство принадлежности или непринадлежности пути $\gamma' \vee \gamma$ к классу Γ_{2k} не изменяется. Так как принадлежность $\gamma' \vee \gamma \in \Gamma_{2k}$ соответствует матричному элементу $S[i_1, ..., i_k; i_1', ..., i_k'] = 1$, а отношение $\gamma' \vee \gamma \notin \Gamma_{2k}$ – матричному элементу $S[i_1, ..., i_k; i_1', ..., i_k'] = 0$, то отсюда следует (11). $\blacksquare$

Таким образом, для описания $|\Gamma_k| \times |\Gamma_k|$-матрицы $S[i_1, ..., i_k; i_1', ..., i_k']$, достаточно задать четыре $(|\Gamma_k|/4) \times (|\Gamma_k|/4)$-матрицы

$$A[i_2, ..., i_k; i_2', ..., i_k'] = S[1, i_2, ..., i_k; 1, i_2', ..., i_k'] , \tag{12}$$

$$B[i_2, ..., i_k; i_2', ..., i_k'] = S[1, i_2, ..., i_k; 2, i_2', ..., i_k'] , \tag{13}$$

$$C[i_2, ..., i_k; i_2', ..., i_k'] = S[1, i_2, ..., i_k; 3, i_2', ..., i_k'] , \tag{14}$$

$$D[i_2, ..., i_k; i_2', ..., i_k'] = S[1, i_2, ..., i_k; 4, i_2', ..., i_k'] . \tag{15}$$

Все остальные матричные элементы матрицы $S[i_1, ..., i_k; i_1', ..., i_k']$ вычисляются, согласно (1), на основе матричных элементов введенных матриц,

$$S[1 + j, ..., i_k + j; i_1' + j, ..., i_k' + j] = S[1, ..., i_k; i_1', ..., i_k'] , \quad j = 1,2,3 .$$

Однако, $(|\Gamma_k|/4)\times(|\Gamma_k|/4)$-матрицы $S[1+j,...,i_k+j;i'_1+j,...,i'_k+j]$, $j=1,2,3$, $i'_1=1,2,3,4$, вообще говоря, не совпадают с матрицами A,B,C,D. По этой причине, введенное матричное представление оказывается неудобным при вычислении спектра. В связи с этим, произведём перенумерацию элементов базиса матричного представления оператора S, т.е. последовательностей $\langle \mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},...,\mathbf{e}_{i_k}\rangle$. Такая перенумерация является унитарным преобразованием линейного пространства $\mathbb{L}_k$ и, поэтому, не изменяет спектра матрицы. Для каждого фиксированного $j=1,2,3$, введём переменные

$$j_l = i_l + j, \quad l=2,...,k\,, \tag{16}$$

где операция сложения понимается так, как это указано в Лемме 2. Тогда каждой последовательности $\langle i_2,...,i_k\rangle$ взаимно-однозначно сопоставляется последовательность $\langle j_2,...,j_k\rangle$. Следовательно, имеется взаимно-однозначное соответствие последовательностей сдвигов

$$\langle \mathbf{e}_{1+j},\mathbf{e}_{i_2+j},...,\mathbf{e}_{i_k+j}\rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{e}_{1+j},\mathbf{e}_{j_2},...,\mathbf{e}_{j_k}\rangle\,,$$

которое определяет нужную перенумерацию

$$\langle 1+j, i_2+j,...,i_k+j\rangle \Rightarrow \langle 1+j, j_2,...,j_k\rangle \tag{17}$$

элементов базиса $\{\langle \mathbf{e}_{i_1},\mathbf{e}_{i_2},...,\mathbf{e}_{i_k}\rangle\}$ для каждого фиксированного сдвига $\mathbf{e}_{i_1}$. Матричное представление оператора S (функцию $S(\gamma,\gamma'))$, на основе новой нумерации, будем обозначать тем же символом $S[i_1,...,i_k;i_1',...,i_k']$. Это матричное представление обладает следующим свойством. Введём 4×4-блок-матрицу $\mathcal{S}_{lm}$, $l,m=1,2,3,4$, элементами которой являются $(|\Gamma_k|/4)\times(|\Gamma_k|/4)$-матрицы, согласно правилу

$$\mathcal{S}_{lm} = S[l,j_2,...,j_k;m,j_2',...,j_k']\,,$$

$$l,m=1,2,3,4\,; \quad j_n,j'_n=1,2,3,4\,,\ n=2,...,k\,.$$

Имеет место

Лемма 3 *Матрица $\mathcal{S}_{lm}$ определяется формулой*

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} A & B & C & D\\ D & A & B & C\\ C & D & A & B\\ B & C & D & A\end{pmatrix}\,. \tag{18}$$

□ Согласно Лемме 2 и формулам (16) и (17), матричные элементы $S[l,j_2,...,j_k;m,j_2',...,j_k']$, в новой нумерации, удовлетворяют соотношениям

$$S[i_1+j,i_2,...,i_k;i'_1+j,i'_2,...,i'_k] = S[i_1,i_2,...,i_k;i'_1,i'_2...,i'_k]\,.$$

Полагая $i_1+j=l$, $i'_1+j=m$, $j=l-1$ в этом соотношении, получаем

$$S[l,j_2,...,j_k;m,j_2',...,j_k'] = S[1,j_2,...,j_k;m-l+1,j_2',...,j_k']\,,$$

где правило сложения индексов такое же, как и в Лемме 2. Отсюда следует соотношение для матричных блоков $\mathcal{S}_{lm} = \mathcal{S}_{1,m-l+1}$. ■.

Перейдём теперь к вычислению максимального собственного числа оператора S. Будем исходить из матричного представления (18). Размерность матрицы оператора S совпадает с размерностью пространства $\mathbb{L}_k$, то есть равна $|\Gamma_k|$. Следующее утверждение существенно упрощает процедуру вычисления числа $\lambda_*(k)$, так как сводит её к вычислению спектра матрицы, имеющей размерность $|\Gamma_k|/4$.

Теорема 2 *Максимальное собственное число оператора* S *совпадает с максимальным собственным числом матрицы*

$$U = A + B + C + D\,,$$

то есть максимальным корнем уравнения

$$\det[A + B + C + D - \lambda] = 0\,. \tag{19}$$

□ Заметим, что матрица (18) является блочно-симметричной, а именно, она представима в виде

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} G & H \\ H & G \end{pmatrix}\,,$$

где блоки G и H имеют размерность $|\Gamma_k|/2$ и определяются как

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ D & A \end{pmatrix}\,, \quad H = \begin{pmatrix} C & D \\ B & C \end{pmatrix}$$

Ввиду симметрии блочной структуры и неотрицательности элементов матрицы, можно утверждать, что максимальное положительное собственное число матрицы $\mathcal{S}$ кратное и совпадает с максимальным положительным собственным числом матрицы

$$G + H = \begin{pmatrix} A & B \\ D & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + C & B + D \\ B + D & A + C \end{pmatrix}\,.$$

Эта матрица снова является блочно-симметричной, составленной из блоков размерности $|\Gamma_k|/4$. Поэтому, снова применяя указанную теорему, получаем, что её максимальное собственное число кратное и совпадает с максимальным собственным числом матрицы $(A + C) + (B + D)$. ■

Для конкретного построения матриц A, B, C, D, перенумеруем все пути из множества Γ_k числами $\{1, ..., |\Gamma_k|\}$ следующим образом. Будем строить нумерацию в лексикографическом порядке описанного ниже типа, на основе величины координат последовательности $\langle j_1, ..., j_k \rangle$, представляющей путь $\gamma \in \Gamma_k$. Для любых двух последовательностей $\langle j_1, ..., j_k \rangle$ и $\langle j'_1, ..., j'_k \rangle$, сначала сравним первые координаты. Если $j_1 \neq j'_1$, то предшествующей последовательностью будем считать ту, у которой будет меньшее значение первой координаты. Если $j_1 = j_1'$, то предшествующей последовательностью будем считать ту, у которой первая из несовпадающих в этих последовательностях координат j_s, $s = 2, 3, ..., k$ оказывается предшествующей. При этом принимается порядок $\langle 2, 1, 4\rangle$ их значений j_s для $j_{s-1} = 1$. Для других значений j_{s-1}, этот порядок получается поворотом векторов $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ против часовой стрелки, то есть, для $j_{s-1} = 2$, порядок следования $\langle 3, 2, 1\rangle$, для $j_{s-1} = 3$ – $\langle 4, 3, 2\rangle$, для $j_{s-1} = 4$ – $\langle 1, 4, 3\rangle$.

4. Вычисление оценок λ_1 и λ_2. При $k = 1$, Γ_1 состоит из одноэлементных путей $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ и матрица S имеет порядок 4

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. матрицы A, B, C и D представляют собой числа $A = B = D = 1$ и $C = 0$. В этом случае матрица $(A+B+C+D)$ также является числом, $\mathcal{S} = 3$. Следовательно, $\lambda_*(1) = 3$ и, поэтому, верхняя оценка первого порядка равна $\lambda_1 = 3$.

Для получения оценки λ_2 второго порядка, перечислим множество Γ_2, занумеровав его в том порядке, который был описан выше. Множество Γ_2 содержит 12 элементов, описываемых допустимыми последовательностями единичных сдвигов $\{\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle; i, j = 1, 2, 3, 4\}$.

Указанная выше нумерация этого множества имеет следующий вид:

$$\gamma_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle, \gamma_2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle, \gamma_3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\rangle;$$

$$\gamma_4 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle, \gamma_5 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle, \gamma_6 = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\rangle;$$

$$\gamma_7 = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\rangle, \gamma_8 = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\rangle, \gamma_9 = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\rangle;$$

$$\gamma_{10} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\rangle, \gamma_{11} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\rangle, \gamma_{12} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3\rangle,$$

где равенства указывают на соответствия между обозначением пути и определяющей его последовательностью.

Таким образом, матрица S имеет размерность 12. Далее, перечислим пути из Γ_4. Они определяют допустимые пути из $\Gamma_2^{(2)}$, то есть такие, которые приводят к ненулевым элементам этой матрицы. Всего имеется 68 путей такого типа. Все пути этого множества получаются из 17 путей класса Γ_4, у которых первый сдвиг равен $\mathbf{e}_1$. Обозначим пути, входящие в эту совокупность, посредством $\gamma_i^{(1)}$, $i = 1, ..., 17$. Они приведены в нижеследующей таблице. Все они получаются в результате склеивания последовательных пар путей γ_j, $j = 1, ..., 12$, указанных выше, причём первым путём этой пары является один из путей γ_i, $i = 1, 2, 3$. В колонках таблицы, слева от путей, указывается отделённая двоеточием пара $\langle l, m\rangle$, $l \in \{1, 2, 3\}$; $m \in \{1, ..., 12\}$ индексов того ненулевого матричного элемента матрицы S, которому она соответствует. Для пар $\langle l, m\rangle$, отсутствующих в таблице соответствующий матричный элемент равен нулю, т.е. склеивание отвечающих им пар не приводит к образованию непересекающегося пути γ из $\Gamma_2^{(2)}$. Всего же, класс $\Gamma_2^{(2)}$ содержит $12 \times 12 = 144$ пути.

$$\langle 1,4\rangle : \gamma_1^{(1)} = \gamma_1 \vee \gamma_4 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle,\ \langle 1,5\rangle : \gamma_2^{(1)} = \gamma_1 \vee \gamma_5 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle$$

$$\langle 1,6\rangle : \gamma_3^{(1)} = \gamma_1 \vee \gamma_6 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\rangle,\ \langle 1,1\rangle : \gamma_4^{(1)} = \gamma_1 \vee \gamma_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$$

$$\langle 1,2\rangle : \gamma_5^{(1)} = \gamma_1 \vee \gamma_2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle,\ \langle 2,5\rangle : \gamma_6^{(1)} = \gamma_2 \vee \gamma_5 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle$$

$$\langle 2,6\rangle : \gamma_7^{(1)} = \gamma_2 \vee \gamma_6 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\rangle,\ \langle 2,1\rangle : \gamma_8^{(1)} = \gamma_2 \vee \gamma_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$$

$$\langle 2,2\rangle : \gamma_9^{(1)} = \gamma_2 \vee \gamma_2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle,\ \langle 2,3\rangle : \gamma_{10}^{(1)} = \gamma_2 \vee \gamma_3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\rangle$$

$$\langle 2,10\rangle : \gamma_{11}^{(1)} = \gamma_2 \vee \gamma_{10} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\rangle,\ \langle 2,11\rangle : \gamma_{12}^{(1)} = \gamma_2 \vee \gamma_{11} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\rangle$$

$$\langle 3,2\rangle : \gamma_{13}^{(1)} = \gamma_3 \vee \gamma_2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle,\ \langle 3,3\rangle : \gamma_{14}^{(1)} = \gamma_3 \vee \gamma_3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\rangle$$

$$\langle 3,10\rangle : \gamma_{15}^{(1)} = \gamma_3 \vee \gamma_{10} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\rangle,\ \langle 3,11\rangle : \gamma_{16}^{(1)} = \gamma_3 \vee \gamma_{11} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\rangle$$

$$\langle 3,12\rangle : \gamma_{17}^{(1)} = \gamma_3 \vee \gamma_{12} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3\rangle$$

В результате, получаем соответствующую указанной нумерации 12×12-матрицу $\mathcal{S}$ с блочной структурой (18), которая состоит из матрицы $C = 0$ и 3×3-матриц A, B, D, имеющих следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$A + B + C + D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для определения максимального собственного значения $\lambda_*(2)$, необходимо решить спектральное уравнение (19). Оно имеет следующий вид

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 7\lambda - 1 = 0\,.$$

Очевидно, что у этого уравнения имеется корень $\lambda = 1$. Тогда, делением многочлена на $(\lambda - 1)$, получаем

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0\,.$$

Корни этого уравнения $\lambda = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Откуда находим $\lambda_*(2) = 3 + 2\sqrt{2}$ и, следовательно, верхняя оценка равна $\lambda_2 = \lambda_*^{1/2}(2) < 2,4143$.

5. Верхняя оценка четвёртого порядка. Получим оценку четвёртого порядка λ_4. Сначала перечислим все пути из Γ_4. Для этого достаточно указать последовательности $\langle \mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \mathbf{e}_{j_3}, \mathbf{e}_{j_4} \rangle$ сдвигов, которые их порождают. Множество Γ_4, как уже было сказано, состоит из 68 путей. Список всех таких путей мы разобьём на четыре списка по 17 путей. Каждый из них содержит пути, у которых совпадает первый орт $\mathbf{e}_{j_1}$ сдвига. В списках, пути упорядочены согласно указанному в предыдущем разделе порядку. Первый из них, состоящий из путей $\gamma_i^{(1)}$, $i = 1, ..., 17$, уже описан в предыдущем разделе. Пути из других списков, обозначаемые $\gamma_i^{(1)}$ с номерами $i = 18, ..., 34$, $i = 35, ..., 41$, $i = 42, ..., 68$, соответственно для каждого из них, получаются из путей первого списка по формуле

$$\gamma_{17j+l}^{(1)} = \mathsf{T}^j \gamma_l^{(1)}, \quad l = 1, ..., 17,$$

где оператор T преобразует каждый путь посредством замен входящих в него ортов сдвига, согласно циклической перестановке $\mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \Rightarrow \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \Rightarrow \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_4 \Rightarrow \mathbf{e}_1$. Формула описывает образование путей из указанных списков посредством поворотов входящих в них ортов соответственно на углы $j\pi/2$, $j = 1, 2, 3$.

Для построения матрицы S, необходимо выбрать все пары путей $\langle \gamma_i^{(1)}, \gamma_j^{(1)} \rangle$, склейки которых, являющиеся путями из $\Gamma_2^{(4)}$, дают пути $\gamma^{(2)} \in \Gamma_8$. Этим парам соответствуют ненулевые матричные элементы матрицы S. При этом, ввиду утверждения Леммы 3, пути $\gamma_i^{(1)}$ достаточно выбирать из первого списка путей, у которых $i = 1, ..., 17$, то есть первым ортом сдвига является $\mathbf{e}_1$. Тогда для вычисления: матрицы A, нужно выбрать все пары указанного типа, у которых $i, j = 1, ..., 17$, матрицы B – $i = 1, ..., 17$, $j = 18, .., 34$, матрицы C – $i = 1, ..., 17$, $j = 35, .., 41$, матрицы D – $i = 1, ..., 17$, $j = 42, .., 68$.

Вычислим элементы матрицы S. Прежде всего заметим, что все склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$, которые образуют путь с чередующимися точками поворотов, в результате, приводят к путям γ из класса Γ_8, так как они, наверняка, не содержат самопересечений. При этом точки поворотов пути $\gamma \Leftrightarrow \langle \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_k} \rangle$ мы называем чередующимися, если за каждым несовпадением соседних номеров у ортов в указанной последовательности, который соответствует переходу к орту, получаемому вращением против часовой стрелки, может следовать только такое несовпадение номеров, которое соответствует переходу к орту, получаемому вращением по часовой стрелке, и наоборот. Для того чтобы точки поворотов в пути γ были чередующимися, необходимо и достаточно чтобы в соответствующей ему последовательности $\langle \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_k} \rangle$ номера ортов принимали не более двух значений.

Кроме того, имеются склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$, $i, j = 1, ..., 17$, которые приводят к путям с чередующимися точками поворотов. Им соответствуют матричные элементы $S_{ij} = 1$. Согласно таблице путей $\gamma_l^{(1)}$, $l = 1, ..., 17$, таковыми являются: $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$ при $i = 2, ..., 8$, $j = 2, ..., 9$; $i = 9$, $j = 2, ..., 16$; $i = 10, ..., 16$, $j = 9, ..., 16$.

Выпишем, дополнительно, все склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$, $i, j = 1, ..., 17$, которые приводят к путям с нечередующимися точками поворотов, однако не имеющим самопересечений и, поэтому, соответствующие им матричные элементы

$S_{ij}=1$. Таковыми являются: $\gamma_i^{(1)}\vee\gamma_j^{(1)}$ при $i=2,4,6,8$, $j=1,10,11,12$; $i=3$, $j=1,10,...,16$; $i=5,7$, $j=1,10,...,17$; $i=9$, $j=1,17$; $i=10,12,14,16$, $j=6,7,8,17$; $i=11,13$, $j=1,...,8,17$; $i=15$, $j=2,...,8,17$.

Все остальные склейки $\gamma_i^{(1)}\vee\gamma_j^{(1)}$ приводят к самопересекающимся путям и, следовательно, соответствующие матричные элементы $S_{ij}=0$. При $i=1,17$, $j=1,...,17$, равенство $S_{ij}=0$ связано с тем, что путь $\gamma_1^{(1)}$ заканчивается ортом $\mathbf{e}_3$, а пути $\gamma_j^{(1)}$ начинаются с орта $\mathbf{e}_1$. При $i=2,4,6,8$, $j=13,...,17$, – склейка содержит недопустимую подпоследовательность ортов $\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4\rangle$. То же самое относится к склейкам при $i=10,12,14,16$, $j=1,...,5$. Наконец, в склейках с $i=3$,$j=17$ и $i=15$, $j=1$ образуется недопустимый цикл: $\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_3\rangle$ в первом случае и $\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_4,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle$ во втором.

На основании результатов проведенного анализа, составим матрицу A. Введём восьмикомпонентные векторы $\mathbf{0}=\langle 0,...,0\rangle$, $\mathbf{1}=\langle 1,...,1\rangle$ $\mathsf{x}=\langle 0,1,1,1,1,1,1,1\rangle$, $\mathsf{x}'=\langle 1,1,1,1,1,1,1,0\rangle$, $\mathsf{y}=\langle 0,0,0,0,0,1,1,1\rangle$, $\mathsf{y}'=\langle 1,1,1,0,0,0,0,0\rangle$. В терминах этих векторов матрица A имеет следующую форму

$$A=\begin{pmatrix} V & \mathsf{x}^+ & W\\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1}\\ W' & (\mathsf{x}')^+ & V'\end{pmatrix}\,,$$

где 8×8-матрицы V,W,V',W' следующим образом определяются восьмимерными векторами, которые служат их строками

$$V=\langle\mathbf{0},\mathbf{1},\dots,\mathbf{1}\rangle^+\,,\quad V'=\langle\mathbf{1},\dots,\mathbf{1},\mathbf{0}\rangle^+\,,$$

$$W=\langle\mathbf{0},\mathsf{y}',\mathsf{x}',\mathsf{y}',\mathbf{1},\mathsf{y}',\mathbf{1},\mathsf{y}'\rangle^+\,,\quad W'=\langle\mathsf{y},\mathbf{1},\mathsf{y},\mathbf{1},\mathsf{y},\mathsf{x},\mathsf{y},\mathbf{0}\rangle^+$$

(Операция $(\cdot)^+$ переводит вектор-строку в вектор-столбец).

Для вычисления матрицы B, выпишем сначала все пути $\gamma_i^{(1)}$, $i=18,...,34$. Поворачивая все орты $\mathbf{e}_i$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки в последовательностях сдвигов, которые составляют пути в таблице предыдущего раздела, имеем

$$\gamma_{18}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\rangle,\ \gamma_{19}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3\rangle,\ \gamma_{20}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2\rangle,$$

$$\gamma_{21}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle,\ \gamma_{22}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\rangle,\ \gamma_{23}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3\rangle,$$

$$\gamma_{24}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2\rangle,\ \gamma_{25}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle,\ \gamma_{26}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\rangle,$$

$$\gamma_{27}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\rangle,\ \gamma_{28}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle,\ \gamma_{29}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle,$$

$$\gamma_{30}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\rangle,\ \gamma_{31}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\rangle,\ \gamma_{32}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle,$$

$$\gamma_{33}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle,\ \gamma_{34}^{(1)}=\langle\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4\rangle\,.$$

Согласно таблице путей $\gamma_l^{(1)}$, $l=18,...,34$ получаем склейки $\gamma_i^{(1)}\vee\gamma_j^{(1)}$, $i=1\div 17, j=18\div 34$, которые приводят к путям с чередующимися точками поворотов: $i = 2,3,4,5,6,7,8,9$, $j = 26 \div 33$. Им соответствуют матричные элементы $S_{ij} = 1$.

Следующие склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$, $i = 1 \div 17, j = 17 \div 34$ приводят к путям с нечередующимися точками поворотов, однако не имеющим самопересечений, для которых $S_{ij} = 1$: $i = 1$, $j = 18 \div 29$; $i = 2,4,6$, $j = 18 \div 25, 34$; $i = 3,5,7,9$,$j = 23 \div 25, 34$; $i = 8$, $j = 19 \div 25, 34$; $i = 13$, $j = 24 \div 34$. В этих путях, в тех местах, в которых появляется нечередование точек поворотов, появляется два одинаковых последовательных сдвига.

Все остальные склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$ приводят к самопересекающимся путям, которым соответствуют матричные элементы $S_{ij} = 0$. Во-первых, это связано с тем, что возникает недопустимая подпоследовательность сдвигов: при $i = 1$, $j = 30, ..., 34$ – $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle$, при $i = 3,5,7,9,13$, $j = 18, .., 22$ – $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, при $i = 11, 15$, $j = 18 \div 34$ – $\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \rangle$. Тоже самое имеет место при $i = 17$, $j = 18 \div 34$ – $\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \rangle$. Во-вторых, при $i = 8$, $j = 18$ возникает цикл $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$; при $i = 13$, $j = 23$ – цикл $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle$. Наконец, при $i = 10, 12, 14, 16$, $j = 18 \div 34$ возникает нестыковка склеиваемых путей – пути γ_j, $j = 18 \div 34$ начинаются со сдвига в направлении, противоположном последнему сдвигу пути γ_i, $i = 10, 12, 16$.

На основании результатов этого анализа, матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} V_1 & \mathbf{1}^+ & W_1 \\ \mathsf{y} & 1 & \mathbf{1} \\ W_2 & \mathsf{d}^+ & V_2 \end{pmatrix},$$

где

$$V_1 = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathsf{y}, \mathbf{1}, \mathsf{y}, \mathbf{1}, \mathsf{y}, \mathsf{x} \rangle^+, \quad W_1 = \langle \mathsf{y}', \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1} \rangle^+,$$

$$V_2 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle^+, \quad W_2 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathsf{y}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle^+,$$

$\mathsf{y}_1 = \langle 0,0,0,0,0,0,1,1 \rangle$, $\mathsf{d} = \langle 0,0,0,1,0,0,0,0 \rangle$.

Для вычисления матрицы C, перечислим пути $\gamma_i^{(1)}$, $i = 35, ..., 51$. Поворачивая все векторы на угол $\pi/2$ против часовой орты в последовательностях сдвигов путей в предыдущей таблице, имеем

$$\gamma_{35}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle,\ \gamma_{36}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle,\ \gamma_{37}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle,$$

$$\gamma_{38}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle,\ \gamma_{39}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle,\ \gamma_{40}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle,$$

$$\gamma_{41}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle,\ \gamma_{42}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle,\ \gamma_{43}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle,$$

$$\gamma_{44}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle,\ \gamma_{45}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle,\ \gamma_{46}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle,$$

$$\gamma_{47}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle,\ \gamma_{48}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle,\ \gamma_{49}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle,$$

$$\gamma_{50}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle,\ \gamma_{51}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle.$$

Следующие склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$, $i = 1 \div 17, j = 35 \div 51$, приводят к путям с нечередующимися точками поворотов, однако не имеющим самопересечений, из-за наличия пар следующих друг за другом одинаковых сдвигов: $i = 1$,

$j = 38 \div 51$; $i = 2$, $j = 40 \div 51$; $i = 6$, $j = 42 \div 51$; $i = 12$, $j = 35 \div 44$; $i = 16$, $j = 35 \div 46$; $i = 17$, $j = 35 \div 48$. В этом случае, $S_{ij} = 1$.

Все остальные склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$ приводят к самопересекающимся путям, которым соответствуют матричные элементы $S_{ij} = 0$. При $i = 1$, $j = 35, 36, 37$ имеется цикл $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle$; $i = 6$, $j = 40, 41$ – цикл $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$; $i = 12$, $j = 45, 46$ – цикл $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle$; $i = 17$, $j = 49, 50, 51$ – цикл $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle$. При $i = 2$, $j = 35 \div 39$; $i = 6$, $j = 35 \div 39$ имеется подпоследовательность $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$. Аналогично, при $i = 4, 8$, $j = 35 \div 51$ – $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$; при $i = 10$, $j = 35, ..., 51$; $i = 14$, $j = 47 \div 51$ – $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle$; при $i = 12, 16$, $j = 47, ..., 51$ – $\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle$. При $i = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ приклеиваемый путь начинается в противоположную сторону.

На основании результатов этого анализа, матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} V_3 & (\mathsf{y}'_1 + \mathsf{d}'_1)^+ & W_3 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ W'_3 & (\mathsf{y}_1 + \mathsf{d}_1)^+ & V'_3 \end{pmatrix},$$

где введены следующие восьмимерные векторы $\mathsf{d}_1 = \langle 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$, $\mathsf{d}'_1 = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0 \rangle$, $\mathsf{y}'_1 = \langle 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$ и 8×8-матрицы

$$V_3 = \langle \bar{\mathsf{y}}, \mathsf{y}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \bar{\mathsf{x}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \rangle^+, \quad W_3 = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \rangle^+,$$

$$V'_3 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \bar{\mathsf{x}}', \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathsf{y}', \bar{\mathsf{y}}', \rangle^+, \quad W'_3 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \rangle^+,$$

где $\bar{\mathsf{y}} = \langle 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$, $\bar{\mathsf{y}}' = \langle 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0 \rangle$, $\bar{\mathsf{x}} = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 \rangle$, $\bar{\mathsf{x}}' = \langle 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$.

Наконец, вычислим матрицу D. Перечислим пути $\gamma_i^{(1)}$, $i = 52, ..., 68$. Поворачивая все векторы на угол $\pi/2$ против часовой орты в последовательностях сдвигов путей в предыдущей таблице, имеем

$$\gamma_{52}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle,\ \gamma_{53}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle,\ \gamma_{54}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle,$$

$$\gamma_{55}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle,\ \gamma_{56}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle,\ \gamma_{57}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle,$$

$$\gamma_{58}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle,\ \gamma_{59}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle,\ \gamma_{60}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle,$$

$$\gamma_{61}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle,\ \gamma_{62}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle,\ \gamma_{63}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle,$$

$$\gamma_{64}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle,\ \gamma_{65}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle,\ \gamma_{66}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle,$$

$$\gamma_{67}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle,\ \gamma_{68}^{(1)} = \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle.$$

Согласно этой таблице путей получаем склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$, $i = 1 \div 17, j = 52 \div 68$, которые приводят к путям с чередующимися точками поворотов: $i = 9 \div 16$, $j = 53 \div 60$.

Следующие склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$, $i = 1 \div 17, j = 52 \div 68$ приводят к путям с нечередующимися точками поворотов, не имеющими самопересечений, из-за наличия пар следующих друг за другом одинаковых сдвигов: $i = 5$, $j =$

$52 \div 68$; $i = 9, 11$, $j = 52, 61 \div 63$; $i = 10$, $j = 52, 61 \div 67$; $i = 12, 14, 15, 16$, $j = 52, 61 \div 68$; $i = 13$, $j = 52, 61 \div 63$; $i = 17$, $j = 57 \div 68$.

Остальные склейки $\gamma_i^{(1)} \vee \gamma_j^{(1)}$ приводят к самопересекающимся путям с матричными элементами $S_{ij} = 0$. При $i = 5$, $j = 63$ имеется цикл $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle$; $i = 10$, $j = 68$ – цикл $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle$. При $i = 1, 3$, $j = 52 \div 68$ имеется недопустимая подпоследовательность $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$; при $i = 5$, $j = 64 \div 68$ – $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle$; при $i = 7$, $j = 52 \div 68$ – $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \rangle$; при $i = 9, 11, 13, 15$, $j = 64 \div 68$ – $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle$; при $i = 17$, $j = 52 \div 56$ – $\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle$. При $i = 2, 4, 6, 8$ приклеиваемый путь начинается в противоположную сторону.

Матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} V_2' & (\mathsf{d}')^+ & W_2' \\ \mathbf{1} & 1 & \mathsf{y}' \\ W_1' & \mathbf{1}^+ & V_1' \end{pmatrix} ,$$

где введён восьмимерный вектор $\mathsf{d}' = \langle 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0 \rangle$ и 8×8-матрицы

$$V_2' = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle^+ , \quad W_2' = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathsf{y}_1', \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle^+ ,$$

$$V_1' = \langle \mathsf{x}', \mathsf{y}', \mathbf{1}, \mathsf{y}', \mathbf{1}, \mathsf{y}', \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle^+ , \quad W_1' = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathsf{y}, \rangle^+ .$$

В результате, на основании явных выражений для матриц A, B, C, D, сформулируем доказанное нами утверждение.

Теорема 3 *Матрица U, соответствующая матрице $\mathcal{S}$ в пространстве $\mathbb{L}_4$, имеет следующий вид*

$$U = A + B + C + D = \begin{pmatrix} G & \mathsf{u}^+ & H \\ 2 + \mathsf{y} & 3 & 2 + \mathsf{y}' \\ H' & (\mathsf{u}')^+ & G' \end{pmatrix} ,$$

где

$$G = V + V_1 + V_2' + V_3 \, , \ \ H = W + W_1 + W_2' + W_3 \, , \ \ \mathsf{u} = \mathbf{1} + \mathsf{x} + \mathsf{d}' + \mathsf{d}_1' + \mathsf{y}_1'$$

и, соответственно,

$$G' = V' + V_1' + V_2 + V_3' \, , \ \ H' = W' + W_1' + W_2 + W_3' \, , \ \ \mathsf{u}' = \mathbf{1} + \mathsf{x}' + \mathsf{d} + \mathsf{d}_1 + \mathsf{y}_1 \, .$$

Получим теперь основной результат работы – вычислим оценку λ_4 четвёртого порядка показателя λ_* в асимптотической формуле числа $|\Gamma_n|$ несамопересекающихся путей при $n \to \infty$.

Обозначим $\langle \mathsf{j}_k ; k = 1 \div 17 \rangle$ векторы естественного базиса в линейном пространстве $\mathbb{R}^{17}$, $(\mathsf{j}_k)_i = \delta_{ik}$. Матрица U представляет линейный оператор U в этом базисе. Совершим преобразование этого базиса, которое состоит в перенумерации векторов $\mathsf{j}_k \Rightarrow \mathsf{j}_{27-k}$ для номеров $k = 10 \div 17$. При этом матричное представление оператора изменится следующим образом. Матрица G не изменится, матрица G' перейдёт в матрицу G, векторы y' и u' заменятся на y

и u, соответственно, а матрицы H и H' перейдут в одну и ту же матрицу F, которая вычисляется следующим образом. Введём операции C_1, C_2 преобразования 8×8-матриц L_{ij}, $i,j=1,...,8$,

$$(\mathsf{C}_1 L)_{ij} = L_{i,9-j}\,, \quad (\mathsf{C}_2 L)_{ij} = L_{9-i,j}\,.$$

Преобразование матрицы G', в терминах этих операций, записывается как $\mathsf{C}_1\mathsf{C}_2 G' = G$. При этом полагается, что нумерация матрицы G'_{ij} сдвинута так, чтобы индексы $i,j = 1 \div 8$. То же самое относится к дальнейшим преобразования матриц H и H'. Преобразование матриц H и H', при указанной перенумерации векторов базиса, записывается, соответственно, как $\mathsf{C}_1 H$ и $\mathsf{C}_2 H'$. Так как

$$\mathsf{C}_1 W = \mathsf{C}_1\langle \mathbf{0}, \mathsf{y}', \mathsf{x}', \mathsf{y}', \mathbf{1}, \mathsf{y}', \mathbf{1}, \mathsf{y}'\rangle^+ = \langle \mathbf{0}, \mathsf{y}, \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathbf{1}, \mathsf{y}, \mathbf{1}, \mathsf{y}\rangle^+ =$$

$$= \mathsf{C}_2\langle \mathsf{y}, \mathbf{1}, \mathsf{y}, \mathbf{1}, \mathsf{y}, \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathbf{0}\rangle^+ = \mathsf{C}_2 W'\,,$$

$$\mathsf{C}_1 W_1 = \mathsf{C}_1\langle \mathsf{y}', \mathbf{1}, ..., \mathbf{1}\rangle^+ = \langle \mathsf{y}, \mathbf{1}, ..., \mathbf{1}\rangle^+ = \mathsf{C}_2\langle \mathbf{1}, ..., \mathbf{1}, \mathsf{y}\rangle^+ = \mathsf{C}_2 W_1'\,,$$

$$\mathsf{C}_1 W_2' = \mathsf{C}_1\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathsf{y}_1', \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle^+ = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathsf{y}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle^+ =$$

$$= \mathsf{C}_2\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathsf{y}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle^+ = \mathsf{C}_2 W_2\,,$$

$$\mathsf{C}_1 W_3 = \mathsf{C}_1\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle^+ = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle^+ =$$

$$= \mathsf{C}_2\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle^+ = \mathsf{C}_2 W_3'\,,$$

то

$$F = \mathsf{C}_1 H = \mathsf{C}_1 W + \mathsf{C}_1 W_1 + \mathsf{C}_1 W_2' + \mathsf{C}_1 W_3 = \mathsf{C}_2 W' + \mathsf{C}_2 W_1' + \mathsf{C}_2 W_2 + \mathsf{C}_2 W_3' =$$

$$= \langle \mathbf{1}+\mathsf{y}, \mathbf{2}+\mathsf{y}, \mathbf{1}+\mathsf{x}, \mathbf{1}+\mathsf{y}, \mathbf{2}+\mathsf{y}_1, \mathbf{2}+\mathsf{y}, \mathbf{2}, \mathbf{1}+\mathsf{y}\rangle^+\,.$$

Таким образом, после преобразования базиса, которое сводится к унитарному преобразованию матрицы U, не изменяющему её спектра, получаем преобразованную матрицу

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} G & \mathsf{u}^+ & F \\ \mathbf{2}+\mathsf{y} & 3 & \mathbf{2}+\mathsf{y} \\ F & \mathsf{u}^+ & G \end{pmatrix}\,,$$

в которой матрица G даётся следующим разложением по строкам

$$G = \langle \mathbf{1}+\bar{\mathsf{y}}, \mathbf{2}+\mathsf{y}, \mathbf{1}+\mathsf{y}, \mathbf{2}, \mathbf{2}+\mathsf{y}, \mathbf{2}+\bar{\mathsf{x}}, \mathbf{1}+\mathsf{y}, \mathbf{1}+\mathsf{x}\rangle^+\,.$$

Запишем систему уравнений для собственного вектора $\langle \mathsf{f}, c, \mathsf{g}\rangle^+$ (здесь f, $\mathsf{g} \in \mathbb{R}^8$, $c \in \mathbb{R}$) с собственным числом λ этой матрицы

$$\begin{array}{ccccccc} G\mathsf{f}^+ & + & c\mathsf{u}^+ & + & F\mathsf{g}^+ & = \lambda\mathsf{f}^+ \\ (\mathbf{2}+\mathsf{y}, \mathsf{f}^+) & + & 3c & + & (\mathbf{2}+\mathsf{y}, \mathsf{g}^+) & = \lambda c \\ F\mathsf{f}^+ & + & c\mathsf{u}^+ & + & G\mathsf{g}^+ & = \lambda\mathsf{f}^+ \end{array}.$$

Сложив первое и последнее уравнения, находим, что максимальное собственное число λ с собственным вектором $\langle \mathsf{f}+\mathsf{g}, c\rangle \in \mathbb{R}^9$ (так как этот вектор не равен нулю вследствие теоремы Фробениуса) матрицы $\tilde{U}$ совпадает с максимальным собственным числом 9×9-матрицы

$$\begin{pmatrix} F+G & 2\mathsf{u}^+ \\ \mathbf{2}+\mathsf{y} & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$F+G = \langle \mathbf{2}+\mathsf{y}+\bar{\mathsf{y}}, \mathbf{4}+2\mathsf{y}, \mathbf{2}+\mathsf{x}+\mathsf{y}, \mathbf{3}+\mathsf{y}, \mathbf{4}+\mathsf{y}_1+\mathsf{y}, \mathbf{4}+\bar{\mathsf{x}}+\mathsf{y}, \mathbf{3}+\mathsf{y}, \mathbf{2}+\mathsf{x}+\mathsf{y}\rangle^+,$$

$\mathsf{u} = \langle 2,3,2,2,3,3,2,2\rangle$, то последняя матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что столбцы 2-й и 3-й, 4-й и 5-й, 8-й и 9-й совпадают друг с другом. Следовательно, ранг матрицы равен 6 и полином, определяющий её спектр ненулевых собственных чисел, имеет степень 6. Вычисляя коэффициенты этого полинома и найдя его наибольший положительный корень, получаем, что $\lambda_*(4) = 33.08$ с избытком. Поэтому, $\lambda_4 = \lambda_*^{1/4}(4) = 2.40$.

6. Заключение. Полученное нами число $\lambda_*(4) = 33.08$ даёт величину верхней оценки (с избытком) $\lambda_4 = 2,40$. Предложенный метод оценивания позволяет получать сколь угодно точные значения величины λ_*, однако, без гарантированной оценки точности вычисления. Для полного решения задачи об укладке полимерных молекул в указанной во введении постановке, необходимо научиться оценивать абсолютную точность получаемых приближений.

Литература

[1] Дой М., Эдвардс С. Динамическая теория полимеров. М.: Мир, 1998. – 440с.

[2] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1966.

Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.

Об одном подходе к описанию эпидемий

Изучаются две модели возникновения эпидемий, с постоянными и периодическими параметрами. Найдены условия существования стационарного и периодического режимов для процессов, описывающих количество заболевших в большой популяции и числа больных и здоровых в ограниченной популяции. Получен явный вид решений уравнений, которым удовлетворяют средние значения для числа здоровых и заболевших, а также соответствующие предельные значения.

1. Введение

Изучение распространения эпидемий с помощью математических моделей может идти в нескольких направлениях. Если количество заболевших, являющихся источниками инфекции, невелико, важна история развития болезни каждого из них, поскольку вероятность инфицирования зависит от стадии заболевания. При условии, что и объем всей популяции ограничен, приходится рассматривать сложно устроенные процессы со взаимодействием (см., напр., [1] – [4]).

Для большой популяции, при малом числе заболевших, на начальной стадии распространения эпидемии в качестве математической модели может быть рассмотрен ветвящийся случайный процесс в случайной среде.

Мы предлагаем простейшую модель развития популяции, считая, что ее объем, а также число источников инфекции весьма велики (мегаполис). Это позволяет описывать состояние популяции марковским процессом.

Если $X_1(t)$ – количество здоровых, а $X_2(t)$ – количество больных индивидуумов в момент t, то вероятность появления нового больного индивидуума вследствие заражения зависит от многих факторов:

– наличия контактов между здоровыми и больными,
– степени иммунитета здоровых,
– способности передавать заболевание инфицированием

и ряда других.

Пусть $Y(t)$ – случайный процесс, представляющий собой число заболевших к моменту t, тогда, будучи суммой большого числа процессов малой интенсивности, он хорошо аппроксимируется пуассоновским со случайной интенсивностью. Доказательство можно провести, используя методы теории массового обслуживания (см., напр., [5]). Естественно предположить, что приращение за малый промежуток времени h имеет вид

$$\Delta_h Y(t) = Y(t+h) - Y(t) = \alpha X_1(t) X_2(t) h + o(h).$$

Последнее соотношение означает, что главным фактором в нашей модели является наличие контактов. Впрочем, можно было бы учесть и другие обстоятельства, проведя градацию по различным признакам (возраст, пол, продолжительность заболевания и т.п.). Это не приведет к существенным математическим трудностям, но изучаемый процесс будет иметь более высокую размерность и количество параметров, требующих статистической оценки на основе реальных данных, резко возрастет.

2. Описание базовой модели

Рассматривается двумерная цепь Маркова $(X_1(t), X_2(t))$, где $X_1(t)$ – количество здоровых, а $X_2(t)$ – количество больных индивидуумов в момент t. Пусть $X_1(t) = i$, $X_2(t) = j$. За малое время h возможны следующие изменения состояния процесса.

– Переход из состояния (i, j) в состояние $(i + 1, j)$ происходит с вероятностью $(\lambda_1 + \nu_1 i)h + o(h)$, что соответствует рождению или приходу извне нового здорового индивидуума (иммиграция).

– Переход из (i, j) в $(i - 1, j)$ осуществляется с вероятностью $\mu_1 ih + o(h)$, это соответствует уходу из популяции здорового индивидуума (эмиграция или смерть).

– Из (i, j) в $(i, j+1)$ процесс переходит с вероятностью $(\lambda_2+\nu_2 j)h+o(h)$, что означает появление больного индивидуума в популяции за счет иммиграции или рождения.

– Из состояния (i, j) в состояние $(i, j - 1)$ переход происходит с вероятностью $\mu_2 jh + o(h)$, это означает уход больного в результате смерти или эмиграции.

– Наконец, переход из (i, j) в $(i-1, j+1)$ означает, что произошло заражение здорового индивидуума в результате контакта с больным. Вероятность такого события равна $\alpha ijh + o(h)$.

Обозначим $P_{ij}(t) = \mathsf{P}(X_1(t) = i, X_2(t) = j)$. Обычные рассуждения позволяют получить следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} P'_{ij}(t) = &-(\lambda_1 + \lambda_2 + (\nu_1 + \mu_1)i + (\nu_2 + \mu_2)j + \alpha ij)P_{ij}(t)+ \\ &+ (\lambda_1 + \nu_1(i - 1))P_{i-1,j}(t) + (\lambda_2 + \nu_2(j - 1))P_{i,j-1}(t)+ \\ &+ \mu_1(i + 1)P_{i+1,j}(t) + \mu_2(j + 1)P_{i,j+1}(t) + \alpha(i + 1)(j - 1)P_{i+1,j-1}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $P_{-1,j}(t) = 0$, $P_{i,-1}(t) = 0$.

Теорема 1. *При начальных условиях $\{P_{ij}(0), i, j = 0, 1, \ldots\}$ система (1) имеет единственное решение, причем стационарное распределение существует, если*

$$\max(\nu_1, \nu_2) < \min(\mu_1, \mu_2). \quad (2)$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются некоторые дополнительные факты, поэтому оно будет приведено в следующем параграфе.

3. Система уравнений для средних значений

Перейдем к изучению средних значений $M_1(t) = \mathsf{E}X_1(t)$, $M_2(t) = \mathsf{E}X_2(t)$.

Сложив уравнения (1) по j, приходим к следующим соотношениям для $P_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)$:

$$P_i'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + (\nu_1 + \mu_1)i)P_i(t) - (\nu_2 + \mu_2)\sum_{j=0}^{\infty} jP_{ij}(t) - \alpha i \sum_{j=0}^{\infty} jP_{ij}(t) +$$
$$+ \lambda_1 P_{i-1}(t) + \lambda_2 P_i(t) + \mu_1(i+1)P_{i+1}(t) + \nu_1(i-1)P_{i-1}(t) +$$
$$+ \mu_2 \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)P_{i,j+1}(t) + \nu_2 \sum_{j=0}^{\infty}(j-1)P_{i,j-1}(t) + \alpha(i+1)\sum_{j=0}^{\infty}(j-1)P_{i+1,j-1}(t).$$

Теперь умножим i-е уравнение на i и сложим полученные соотношения. В результате мы придем к уравнению для функции $M_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} iP_i(t)$, т.е. для среднего процесса $X_1(t)$.

$$M_1'(t) = \lambda_1 + (\nu_1 - \mu_1)M_1(t) - \alpha \mathsf{E} X_1(t)X_2(t). \tag{3}$$

Аналогично для $M_2(t)$ получается

$$M_2'(t) = \lambda_2 + (\nu_2 - \mu_2)M_2(t) + \alpha \mathsf{E} X_1(t)X_2(t). \tag{4}$$

Если уравнения (1) умножить на ij и сложить, то получим соотношения для $M_{12}(t) = \mathsf{E} X_1(t)X_2(t)$.

Теперь можно дать *доказательство* теоремы 1. Существование и единственность решения уравнений (1) устанавливается традиционными методами (см., напр., [6]) и ввиду громоздкости здесь не приводится. Положим

$$\widehat{\lambda} = 2\max_{i=1,2} \lambda_i, \qquad \widehat{\nu} = \max_{i=1,2} \nu_i, \qquad \widehat{\mu} = \min_{i=1,2} \mu_i.$$

В силу (2) имеем $\widehat{\mu} > \widehat{\nu}$. Рассмотрим процесс рождения и гибели $Z(t)$ с параметрами

$$\widehat{\lambda}_i = \widehat{\lambda} + i\widehat{\nu}, \qquad \widehat{\mu}_i = i\widehat{\mu}$$

и обозначим $\widehat{M}(t) = \mathsf{E} Z(t)$. Для $\widehat{M}(t)$ справедливо уравнение

$$\widehat{M}'(t) = \widehat{\lambda} + (\widehat{\nu} - \widehat{\mu})\widehat{M}(t). \tag{5}$$

Легко проверить, что его решение можно записать в следующем виде

$$\widehat{M}(t) = \frac{\widehat{\lambda}}{\widehat{\mu} - \widehat{\nu}} + \left[\widehat{M}(0) - \frac{\widehat{\lambda}}{\widehat{\mu} - \widehat{\nu}}\right] e^{-(\widehat{\mu} - \widehat{\nu})t}.$$

Поскольку выполнено условие (2), то

$$\lim_{t\to\infty} \widehat{M}(t) = \frac{\widehat{\lambda}}{\widehat{\mu} - \widehat{\nu}}.$$

Нетрудно также установить, сложив (3) и (4), что для $M(t) = M_1(t) + M_2(t)$ имеет место уравнение

$$M'(t) = \widehat{\lambda} + (\widehat{\nu} - \widehat{\mu})M(t) - g(t), \tag{6}$$

где $g(t) \geq 0$. В свою очередь, из (11) и (12) следует, что для любых t

$$M(t) \leq \widehat{M}(t). \tag{7}$$

Предположим теперь, что процесс $(X_1(t), X_2(t))$ неэргодичен. Это значит, что сумма $X_1(t) + X_2(t)$ стохастически неограничена. Но тогда должно быть $M(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Поскольку $\lim_{t\to\infty} \widehat{M}(t) = \widehat{\lambda}/(\widehat{\mu} - \widehat{\nu}) < \infty$, то в силу (13) мы приходим к противоречию. Тем самым доказательство закончено.

Замечание. Если вероятность заболевания одного индивидуума в состоянии (i, j) за время h равна $\alpha jh + o(h)$, то решения уравнений для $M_i(t) = \mathsf{E}X_i(t)$, $i = 1, 2$, имеющих более простой вид, чем (3) и (4), находятся в явном виде. В самом деле, для $M_2(t)$ будет справедливо неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$M_2'(t) = \lambda_2 + (\nu_2 - \mu_2 + \alpha)M_2(t),$$

решение которого, как легко видеть, записывается следующим образом

$$M_2(t) = \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \nu_2 - \alpha} + \left[M_2(0) - \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \nu_2 - \alpha}\right] e^{-(\mu_2 - \nu_2 - \alpha)t}.$$

После этого решаем уравнение для $M_1(t)$

$$M_1'(t) = \lambda_1 + (\nu_1 - \mu_1)M_1(t) - \alpha M_2(t).$$

При этом получаем

$$M_1(t) = e^{-d_1 t}\left[M_1(0) - \frac{\lambda_1}{d_1} + \frac{\alpha\lambda_2}{d_1(d_2 - \alpha)} - \alpha\left(M_2(0) - \frac{\lambda_2}{d_2 - \alpha}\right)\frac{1}{d_1 + d_2 - \alpha}\right] + \\ + \alpha\left(M_2(0) - \frac{\lambda_2}{d_2 - \alpha}\right)\frac{e^{-(d_2 - \alpha)t}}{d_1 + d_2 - \alpha} + \frac{\lambda_1}{d_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{d_1(d_2 - \alpha)}.$$

где обозначено для краткости $d_i = \mu_i - \nu_i$, $i = 1, 2$. Таким образом, при $t \to \infty$ имеем

$$M_1(t) \to \frac{\lambda_1}{d_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{d_1(d_2 - \alpha)}, \qquad M_2(t) \to \frac{\lambda_2}{d_2 - \alpha},$$

причем, для существования конечного предела, требуются условия

$$d_1 > 0, \qquad d_2 - \alpha > 0.$$

В первоначальной модели величина α не оказывает влияния на существование предельных значений (см. условие (2)), но, как будет показано далее, их величины выражаются через α.

4. Детерминированная модель

Пусть процессы $X_k(t)$, $k = 1,2$, детерминированные и равны $m_k(t)$ соответственно. На самом деле, нам потребуется лишь условие $\mathsf{E}X_1(t)X_2(t) = \mathsf{E}X_1(t)\mathsf{E}X_2(t)$, которое очевидным образом справедливо для $m_k(t)$, $k = 1,2$. Тогда уравнения (3) и (4) примут вид

$$m_1'(t) = \lambda_1 + (\nu_1 - \mu_1)m_1(t) - \alpha m_1(t)m_2(t),$$

$$m_2'(t) = \lambda_2 + (\nu_2 - \mu_2)m_2(t) + \alpha m_1(t)m_2(t). \tag{8}$$

Предположим, что α мало и будем искать решение уравнений (5) в виде

$$m_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k g_{ik}(t), \quad i = 1,2. \tag{9}$$

Тогда для $g_{i0}(t)$ получаем уравнение

$$g_{i0}'(t) = \lambda_i + (\nu_i - \mu_i)g_{i0}(t),$$

решение которого имеет вид

$$g_{i0}(t) = \left[m_i(0) - \frac{\lambda_i}{\nu_i - \mu_i}\right] e^{-(\mu_i-\nu_i)t} + \frac{\lambda_i}{\mu_i - \nu_i}. \tag{10}$$

Следующий член разложения, при $i = 1$, находится из уравнения

$$g_{11}'(t) = (\nu_1 - \mu_1)g_{11}(t) - g_{10}(t)g_{20}(t),$$

где $g_{10}(t)$ и $g_{20}(t)$ задаются с помощью (6), а $g_{11}(0) = 0$.

Соответственно, при $i = 2$

$$g_{21}'(t) = (\nu_2 - \mu_2)g_{21}(t) + g_{10}(t)g_{20}(t), \quad g_{21}(0) = 0.$$

Положим далее $a_i = \lambda_i/d_i$ и $b_i = m_i(0) - a_i$, где, как и ранее, $d_i = \mu_i - \nu_i$. Тогда нетрудно проверить, что

$$g_{11}(t) = \frac{b_1b_2}{d_2}(e^{-(d_1+d_2)t} - e^{-d_1t}) + \frac{a_1b_2}{d_1-d_2}(e^{-d_1t} - e^{-d_2t}) + a_2b_1te^{-d_1t} + \frac{a_1a_2}{d_1}(e^{-d_1t} - 1), \tag{11}$$

в то время как

$$g_{21}(t) = -\frac{b_1b_2}{d_1}(e^{-(d_1+d_2)t} - e^{-d_2t}) + \frac{a_2b_1}{d_2-d_1}(e^{-d_1t} - e^{-d_2t}) + a_1b_2te^{-d_2t} - \frac{a_1a_2}{d_2}(e^{-d_2t} - 1). \tag{12}$$

Аналогично получаются рекуррентные соотношения

$$g_{in}(t) = (-1)^i e^{-d_it}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^t g_{1j}(u)g_{2,n-1-j}(u)e^{d_iu}\,du\right], \quad i = 1,2.$$

Таким образом, в соответствии с (15) и (6),

$$m_i(t) = b_i e^{-d_i t} + a_i + \alpha g_{i1}(t) + o(\alpha), \qquad i = 1, 2,$$

где $g_{11}(t)$ и $g_{21}(t)$ задаются соответственно формулами (9) и (10).

5. Стационарное решение

Далее мы предполагаем, что выполнено условие (2). Тогда для $m_i = \lim_{t\to\infty} m_i(t)$ получаем систему уравнений

$$\lambda_1 + (\nu_1 - \mu_1)m_1 - \alpha m_1 m_2 = 0, \tag{13}$$

$$\lambda_2 + (\nu_2 - \mu_2)m_2 + \alpha m_1 m_2 = 0. \tag{14}$$

Обозначим $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Сложив уравнения (20) и (7), получим

$$m_2 = \frac{\lambda}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} m_1, \tag{15}$$

здесь $d_i = \mu_i - \nu_i$, как и в предыдущем параграфе. Очевидно, что m_1 удовлетворяет квадратному уравнению

$$\alpha d_1 x^2 - (d_1 d_2 + \alpha\lambda)x + \lambda_1 d_2 = 0, \tag{16}$$

корни которого равны

$$x_{1,2} = \frac{d_1 d_2 + \alpha\lambda \pm \sqrt{(d_1 d_2 + \alpha\lambda)^2 - 4\alpha\lambda_1 d_1 d_2}}{2\alpha d_1}.$$

Преобразуем дискриминант этого уравнения

$$D = d_1^2 d_2^2 + 2\alpha\lambda d_1 d_2 - 4\alpha\lambda_1 d_1 d_2 + \alpha^2\lambda^2 = [d_1 d_2 - \alpha(\lambda_2 - \lambda_1)]^2 + 4\alpha^2\lambda_1\lambda_2 > 0.$$

Поскольку при любом $\alpha \geq 0$ дискриминант положителен, то существуют два различных действительных корня уравнения (17). В качестве m_1 надо выбрать

$$m_1 = \frac{(d_1 d_2 + \alpha\lambda)\left(1 - \sqrt{(1 - 4\frac{\alpha d_1 d_2 \lambda_1}{(d_1 d_2 + \alpha\lambda)^2}}\right)}{2\alpha d_1}. \tag{17}$$

Тогда при $\alpha \to 0$ имеем $m_1 \to \lambda_1/d_1$, в то время как корень со знаком плюс после единицы во второй скобке числителя из (8) дает $m_1 \to \infty$. Согласно (16)

$$m_2 = \frac{\lambda}{d_2} - \frac{(d_1 d_2 + \alpha\lambda)\left(1 - \sqrt{(1 - 4\frac{\alpha d_1 d_2 \lambda_1}{(d_1 d_2 + \alpha\lambda)^2}}\right)}{2\alpha d_2}.$$

6. Модель с периодическими интенсивностями

Полезно также рассмотреть эпидемии типа гриппа. Считаем, что есть очень большая популяция и в нее с интенсивностью $\lambda(t)$ проникают больные.

Точнее, если число $X(t)$ больных в момент t равно j, то за малое время h происходит переход в состояние $j+1$ с вероятностью $\lambda(t)h+\alpha(t)jh+o(h)$, а в состояние $j-1$ переход осуществляется с вероятностью $\mu h+o(h)$, т.е. нет никаких рождений, а вероятность инфицирования зависит лишь от числа заболевших. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $\alpha(t)$ и $\lambda(t)$ – периодические функции с периодом T. Если*

$$\sup_{t\in[0,T]}\lambda(t)\le c<\infty \quad \text{и} \quad \alpha=(T)^{-1}\int_0^T\alpha(y)\,dy<\mu, \tag{18}$$

то существует периодический режим, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(X(nT+t)=j)=P_j(t)>0. \tag{19}$$

Доказательство использует дополнительные факты, приводимые ниже.

Пусть $M(t)=\mathsf{E}X(t)$, для этой функции справедливо следующее уравнение

$$M'(t)=\lambda(t)+(\alpha(t)-\mu)M(t). \tag{20}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$M(t)=e^{-\mu t+\int_0^t\alpha(u)\,du}\left[\int_0^t\lambda(u)e^{\mu u-\int_0^u\alpha(s)\,ds}\,du+M(0)\right]. \tag{21}$$

Лемма 1. *Если выполнено* (21) *то* $\limsup_{n\to\infty}M(nT)<\infty$.

Доказательство. Поскольку $\lambda(t)\le c$ при всех t, можно оценить сверху $M(nT)$ следующим образом

$$M(nT)\le ce^{-(\mu-\alpha)nT}\int_0^{nT}e^{\mu s-\int_0^s\alpha(u)\,du}\,ds+o(1)\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Разложим интеграл от 0 до nT в сумму n интегралов по отрезкам вида $(kT,(k+1)T]$ и рассмотрим отдельное слагаемое, которое можно записать (после замены переменных $s=kT+v$) в виде

$$\int_0^T e^{\mu(v+kT)-\int_0^{kT}\alpha(u)\,du-\int_0^v\alpha(u)\,du}\,dv=\beta e^{kT(\mu-\alpha)},$$

где обозначено

$$\beta=\int_0^T e^{\mu v-\int_0^v\alpha(u)\,du}\,dv.$$

Тогда

$$M(nT)\le ce^{-(\mu-\alpha)nT}\beta\sum_{k=0}^{n-1}e^{kT(\mu-\alpha)}+o(1)<\frac{c\beta e^{-(\mu-\alpha)}}{1-e^{-(\mu-\alpha)}}+o(1)<\infty.$$

Перейдем к *доказательству* теоремы 2.

Рассмотрим вложенную цепь Маркова $Y_n = X(nT)$, $n \geq 1$. Она будет неприводимой и непериодической. Поскольку

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}Y_n = \limsup_{n\to n} M(nT) < \infty,$$

она будет также эргодической, т.е. существуют

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(X(nT) = j) = p_j > 0 \quad j \geq 0.$$

Чтобы проверить выполнение соотношений (22), достаточно использовать представление

$$\mathsf{P}(X(nT+t) = j) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{P}(X(nT) = i) Q_{ij}(t)$$

с $Q_{ij}(t) = \mathsf{P}(X(nT+t) = j / X(nT) = i)$ и установить, что верхний и нижний пределы совпадают, чем и заканчивается доказательство теоремы 2.

Таким образом, функция

$$\lim_{n\to\infty} M(nT+t) = M_0(t)$$

периодическая с периодом T. Для периодического режима $M_0(T) = M_0(0)$, поэтому в силу (14)

$$M_0(0) = \frac{\int_0^T \lambda(u) e^{\mu u - A(u)}\, du}{e^{\mu T - A(T)} - 1},$$

где $A(t) = \int_0^t \alpha(u)\, du$.

Мы получаем таким образом периодическое решение уравнения (23)

$$M_0(t) = \int_0^t \lambda(u) e^{-\mu(t-u) + A(t) - A(u)}\, du + \frac{e^{-\mu t + A(t)} \int_0^T \lambda(u) e^{\mu u - A(u)}\, du}{e^{\mu T - A(T)} - 1}. \qquad (22)$$

Исследуем точки экстремума $M_0(t)$, являющиеся решениями уравнения,

$$M_0'(t) = (-\mu + \alpha(t)) M_0(t) + \lambda(t) = 0$$

и их связь с экстремумами $\lambda(t)$ и $\alpha(t)$. Иначе говоря, те точки, в которых выполнено равенство

$$M_0(t) = \frac{\lambda(t)}{\mu - \alpha(t)}, \qquad (23)$$

и являются точками экстремумов числа заболевших.

Рассмотрим **пример**. Пусть интенсивность поступления в популяцию равна

$$\lambda(t) = \lambda(1 + \cos t),$$

а интенсивность заражения не зависит от времени, т.е. $\alpha(t) \equiv \alpha$.

В данном случае (18) можно переписать в виде

$$M_0(t) = \varphi(t) + \frac{e^{-(\mu-\alpha)t}\varphi(T)}{e^{(\mu-\alpha)T} - 1},$$

где $T = 2\pi$, а

$$\varphi(t) = \lambda e^{-(\mu-\alpha)t} \int_0^t (1 + \cos t) e^{(\mu-\alpha)u}\, du.$$

Подсчитав интегралы, получим

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\mu-\alpha}(1 - e^{-(\mu-\alpha)t}) + \frac{\lambda}{1+(\mu-\alpha)^2}[(\mu-\alpha)\cos t - (\mu-\alpha)e^{-(\mu-\alpha)t} + \sin t].$$

Далее,

$$\varphi(2\pi) = \frac{e^{2\pi(\mu-\alpha)} - 1}{e^{2\pi(\mu-\alpha)}} \left[\frac{\lambda}{\mu-\alpha} + \frac{\lambda(\mu-\alpha)}{1+(\mu-\alpha)^2}\right].$$

Следовательно, (19) имеет вид

$$(\mu-\alpha)\sin t - \cos t = e^{-(\mu-\alpha)t}(1 - e^{-2\pi(\mu-\alpha)})[1 + 2(\mu-\alpha)^2], \qquad (24)$$

т.е. расположение точек экстремума $M_0(t)$ зависит только от разности $\mu - \alpha$ и совсем не зависит от параметра λ, чего нельзя сказать о самих значениях экстремумов.

Замечание. Аналогичный вывод можно сделать для любой интенсивности $\lambda(t) = \lambda f(t)$ с периодической функцией $f(t)$.

Уравнение (24) имеет вид $g(t) = h(t)$, где

$$g(t) = b\sin t - \cos t, \quad h(t) = (1 + 2b^2)(1 - e^{-2\pi b})e^{-bt} \quad \text{и} \quad b = \mu - \alpha.$$

Для иллюстрации мы приводим несколько графиков для разных значений b, см. рисунки 1-3.

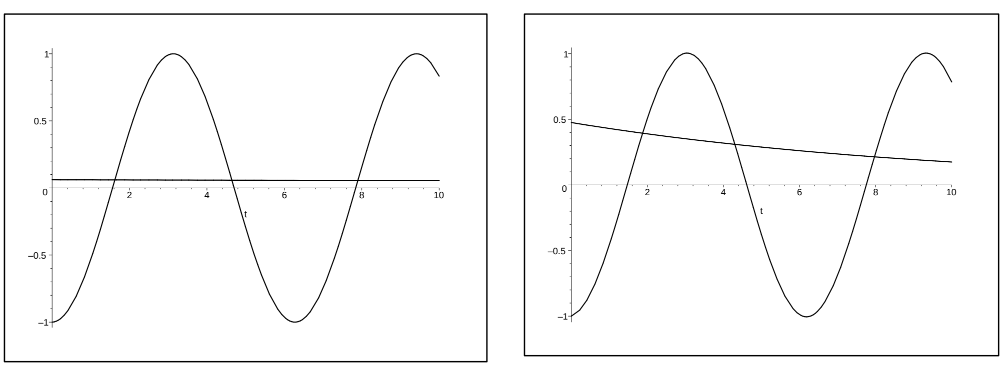


Рис. 1: Случаи $b = 0.01$ и $b = 0.1$.

Функция $g(t)$ периодическая с периодом 2π, причем $g(0) = -1$, она обращается в ноль в точках $t = \mathrm{arctg}(b^{-1}) + \pi k$, $k \geq 0$, а ее экстремумы соответствуют точкам $t = \mathrm{arctg}(-b) + \pi k$, $k \geq 1$. Функция $h(t)$ монотонно убывает с ростом t, при этом $h(0) = (1+2b^2)(1-e^{-2\pi b})$ с ростом b возрастает. Поскольку при $b > 1$ функция $h(t)$ очень быстро стремится к нулю, то практически все решения (24) (возможно, кроме наименьшего) совпадают с нулями функции $g(t)$. Отметим также, что $\lambda'(t) = -\lambda \sin t$, т.е. $\lambda'(t) = 0$ при $t = \pi k$, $k \geq 0$. Таким образом, экстремумы $M_0(t)$ расположены вблизи экстремумов $\lambda(t)$ и при достаточно больших b разность между ними становится как угодно мала.

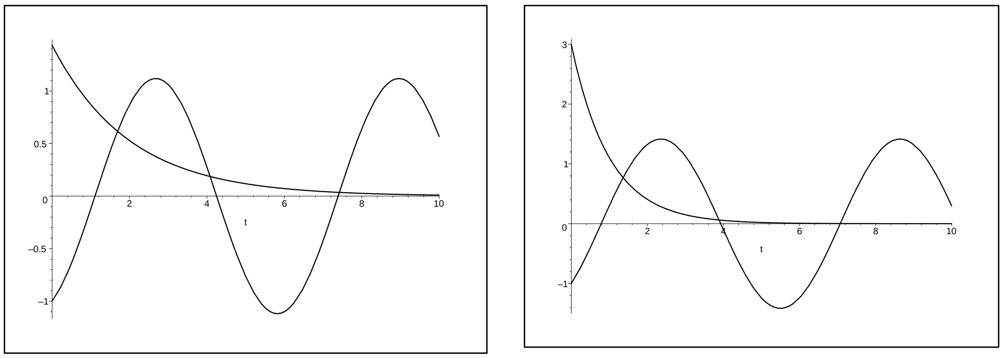


Рис. 2: Случаи $b = 0.5$ и $b = 1$.

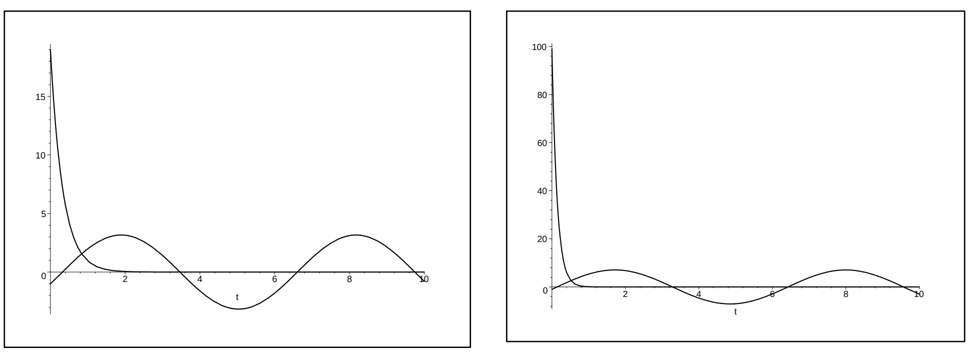


Рис. 3: Случаи $b = 3$ и $b = 7$.

Литература. 1. Murray J.D. Mathematical Biology. – Heidelberg:Springer. – 1993. – 767p. 2. Isham V., Medley G. (eds) Models for Infectious Human Diseases// Publications of the Newton Institute. – Cambridge University Press. 1996. V.6. 3. Anderson G.J., Katzper M. (eds) Simulation in the Medical Sciences. The Society for Computer Simulation, S.Diego, Ca, USA, 1997. 4. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. – Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2002. – 232с. 5. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Ком. Книга. 2005. – 400с. 6. Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. М.: Изд. МГУ. 1980. – 110.

Байрамкулов К. Н.-А.

Масштабирование фрагмента области при расчете магнитного поля в кусочно-однородной среде методом теории цепей

В практике электромагнитных расчетов интерес представляют не только интегральные характеристики электротехнических устройств, но также поведение поля в некоторых ответственных зонах расчетной области, таких как зазоры, внутренние и внешние углы намагничиваемых тел и т.п. В данной работе на примере расчета плоскопараллельного стационарного магнитного поля катушки с током в кусочно-однородной среде демонстрируется возможность более детального рассмотрения поля в этих зонах на основе масштабирования (метода микроскопа). Сечения катушки и намагничиваемых тел условно изображены на рис.1. Там же указаны некоторые используемые обозначения.

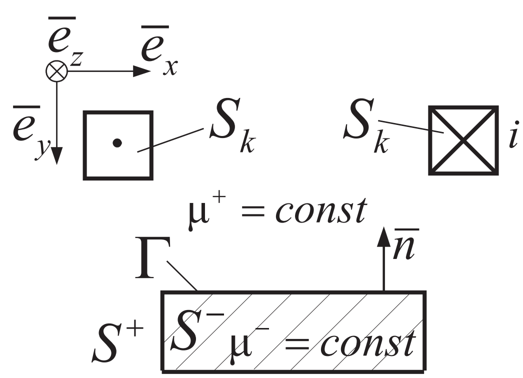


Рис. 1:

Предварительный расчет поля выполняется методом электрических цепей Кирхгофа (ЭЦК) [3], как изложено в [2]. Затем, в расчетной области выделяется фрагмент Ω^*, как показано на рис.2, слева. Граница Γ_Ω этого фрагмента на графе ЭЦК проходит по устранимым узлам, рис.2, справа.

Далее на выделенном фрагменте выполняется учащение сетки (увеличение числа узлов и ветвей в k раз, k – коэффициент масштабирования), а для потенциала $\varphi(p)$ его узлов используется представление

$$\varphi(p) = -\sum_{\mathrm{M}^*_\Omega} R(p,q)\,\Delta\varphi(q) - \sum_{\Gamma^*_\Omega}\left(\varphi(q)\frac{\partial R}{\partial n_q}(p,q) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi}{\partial n_q}(q)\,R(p,q)\right),\ M_p \in \mathrm{M}^*_\Omega \tag{1}$$

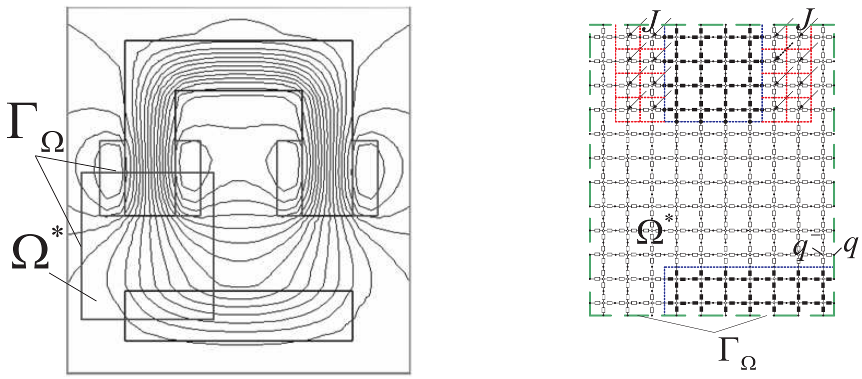


Рис. 2:

через фундаментальное решение $R(p,q)$ уравнения Лапласа на бесконечном графе. Здесь M_{Ω}^{*} – множество внутренних узлов $\{M_q\}$ фрагмента Ω^*; p,q – номера узлов M_p, M_q соответственно; Γ_{Ω}^{*} – множество граничных узлов (граница) фрагмента после учащения сетки; операции Δ и $\frac{\partial}{\partial n_q}$ определяются как

$$\Delta\xi\left(q\right)=\sum_{\mathrm{M_q}}\left(\xi\left(q\right)-\xi\left(p\right)\right),\ M_p\in\mathrm{M_q};$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial n_q}\left(q\right)=\xi\left(q\right)-\xi\left(q^-\right),\ M_q\in\Gamma_{\Omega}^{*},$$

где $\mathrm{M_q}$ – множество узлов, соединенных ветвями с M_q, положение узла q^- относительно граничного узла показано на рис.2, справа, а нахождение $R(p,q)$ составляет отдельную задачу[2].

Заметим, что вторая сумма правой части (1)

$$\varphi^0\left(p\right)=-\sum_{\Gamma_\Omega}\left(\varphi\left(q\right)\frac{\partial R}{\partial n_q}\left(p,q\right)+\ \frac{\partial\varphi}{\partial n_q}\left(q\right)R\left(p,q\right)\right),\ M_p\in\mathrm{M}_{\Omega}^{*}$$

дает вклад в значение потенциала $\varphi(p)$ источников, расположенных вне Ω^*. Будем считать при масштабировании, что эти источники определены и, таким образом, $\varphi(q)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n_q}(q)$, $M_q\in\Gamma_\Omega$ заданы. Строго говоря, из предыдущего расчета, они получаются в старой сетке узлов. Далее для подстановки в (1) их предварительно следует интерполировать на всю границу Γ_{Ω}^{*}, учитывая при этом, что порядок интерполяции $\varphi(q)$ на единицу выше, нежели у $\frac{\partial\varphi}{\partial n_q}(q)$.

Уточнению подлежат источники, находящиеся в Ω^*. Их значения выражает $\Delta\varphi$, который в наших условиях подчиняется равенствам

$$\Delta\varphi\left(q\right)=\begin{cases}J,\ M_q\in\mathrm{M}_J^{*};\\ i_q\left(r_{q^+}-r_{q^-}\right),\ M_q\in\mathrm{M}_{\Gamma}^{*};\\ 0,\ M_q\notin\mathrm{M}_J^{*}\bigcup\mathrm{M}_{\Gamma}^{*},\end{cases}\tag{2}$$

[2]Обсуждение этой задачи выделено в отдельную статью.

где J – величина тока, “впрыскиваемого” в узлы, моделирующие катушку; M_J^* – множество узлов из сечения катушки, попавших в Ω^*;

M_Γ^* – множество узлов границы раздела сред;

i_q – ток в ветви, которой принадлежит q-й узел;

$r_{q^+},\ r_{q^-}$ – сопротивления, входящие в q-ю ветвь, а “+” и “–” соответствуют положительному и отрицательному направлению нормали к сечению сердечника (см. рис.1).

Таким образом, для пользования (1) в Ω^* как решением задачи дифракции [2] на графе остается найти значения $i_q,\ M_q \in \text{M}_\Gamma^*$ в условиях

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^+ = \varphi^- \\ \frac{1}{r_{q^+}}\frac{\partial\varphi^+}{\partial n} = \frac{1}{r_{q^-}}\frac{\partial\varphi^-}{\partial n} \end{array}\right\} = 0 \ \text{ на } \text{M}_\Gamma^*, \tag{3}$$

Подставляя (1) с учетом (2) в условия (3), аналогично [2] получим

$$\begin{gathered} i_p = \frac{1}{r_{p^-}+r_{p^+}} \sum_{\text{M}_\Gamma^*(q\neq p)} \left[\frac{R\left(p^-,q^+\right)-R\left(p^+,q^+\right)}{2} + \frac{R\left(p^-,q^-\right)-R\left(p^+,q^-\right)}{2}\right] \\ \left(r_{q^+} - r_{q^-}\right)\ i_q - \frac{1}{r_{p^-}+r_{p^+}} \sum_{\text{M}_J^*} \left[R\left(p^-,q\right) - R\left(p^+,q\right)\right] \frac{J}{\theta} + \\ + \frac{\varphi^0\left(p^-\right)-\varphi^0\left(p^-\right)}{r_{p^-}+r_{p^+}},\ M_p \in \text{M}_\Gamma^* \qquad . \end{gathered} \tag{4}$$

Отличие (4) от соответствующего уравнения в [2] заключается в том, что здесь M_Γ^* может оказаться разомкнутым (в этом случае M_Γ^* – часть замкнутой смежной границы M_Γ однородных частей бесконечной цепи, моделирующей среду), а сумма $\text{I}^* = \sum\limits_{\text{M}_\Gamma^*} i_q$ – отличной от нуля. Однако эти отличия несущественны для обоснования применимости к матричному уравнению (4) метода простой итерации (МПИ). Действительно, в нашей задаче источники уравновешены, поэтому величина I^* при уточняющем расчете на фрагменте Ω^* известна из предшествующего расчета на более редкой сетке. Остается выполнить редукцию, положив $i_q = i_q^* + {}^{\text{I}^*}\!/_{N^*}$ (N^* – число узлов границы M_Γ^*), а при обосновании МПИ – использовать продолжение $\left\{i_q^*\right\}$ на M_Γ, получаемое доопределением $\left\{i_q^*\right\}$ нулем на $\text{M}_\Gamma \backslash \text{M}_\Gamma^*$. Ниже приведены примеры работы программного модуля, созданного на основе описанного выше подхода. Поскольку новые результаты расчета получаются более детальным описанием источников, расположенных в выделенном фрагменте, можно полагать, что точность расчета поля здесь увеличится. Отметим также, что масштабирование можно проделывать неоднократно (см. рис.3).

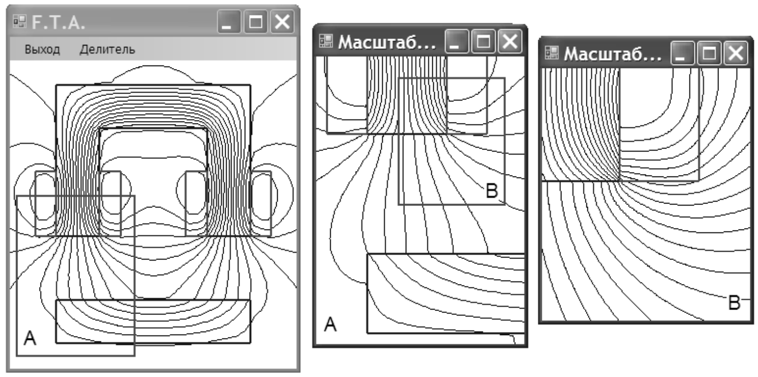


Рис. 3:

Литература

[1] Астахов В.И., Байрамкулов К.Н.-А. Внутренние краевые задачи на графе электрической цепи // Математические методы в физике, технике и экономике: Сборник научных статей кафедры «Прикладная математика»/Южно-Российский государственный технический университет (НПИ). Новочеркасск: Редакция журнала Изв. вузов. Электромеханика, 2006. С. 3–37.

[2] Байрамкулов К. Н.-А., Астахов В.И. Расчет магнитного поля методом граничных уравнений на графе электрической цепи // Труды Южного научного центра РАН. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮНЦ РАН, 2007. Т. 2. С. 72–79.

Белопольская Я.И., Филимонова С.Р.

Безарбитражные цены платежных обязательств азиатского типа

Целью этой работы является расчет безарбитражных цен платежных обязательств на валютных рынках, модели которых основаны на процессах Леви. Азиатские опционы (АО), представляющие собой популярные финансовые инструменты, платежные обязательства по которым зависят от траекторий цен базовых активов, активно исследуются в последние годы [1]-[3]. Специфика расчета цен валютных АО состоит в необходимости рассматривать многомерные модели рынков, основанные на так называемых процессах Леви, обобщающих диффузионные процессы. Это позволяет рассматривать динамику цен валютных инструментов, учитывающую скачки.

Если модель рынка представляет собой диффузионный процесс и рынок полный, то безарбитражная цена платежного обязательства (в том числе и АО) совпадает с начальной стоимостью хеджирующего его портфеля. Если же модель рынка включает скачкообразную составляющую, то, вообще говоря, захеджировать связанный с ней риск не удается и можно говорить лишь, например, о расчете суперхеджирующего портфеля соответствующего безабитражной цене, лежащей в некотором интервале цен и выбираемой в соответствии с тем или иным критерием. В этой работе мы ограничимся рассмотрением многомерного диффузионного рынка.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ полное вероятностное пространство, $w(t) \in R^n$ – P-винеровский процесс. Обозначим $\mathcal{F}_t$ поток σ- алгебр, порожденных процессом $w(t)$ Рассмотрим рынок $(B(t), S(t))$, где $B(t)$ – цена безрискового актива, а $S(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))$ и $S_k(t), k = 1, \dots, n$ – цена рискового актива. Пусть P - мартингальная мера и динамика риского актива имеет вид

$$dS(\tau) = S(\tau)[rd\tau + \sigma(\tau)dw(\tau)], \quad S(t) = s. \tag{1}$$

Здесь $\tau \in [t, T]$ и $\sigma(\tau) \in R^n \times R^n$ – неслучайная ограниченная функции. При этом процесс $e^{r(\tau - t)}S(\tau)$ является $\mathcal{F}_t$-мартингалом.

Платежное обязательство по форвардному контракту азиатского типа имеет вид $\mathcal{X} = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha(S(t))dm(t) - K$. Платежное обязательство по азиатскому опциону, обобщающему ванильные опционы, зададим в виде

$$\kappa[\int_0^T \alpha(S(t))dm(t) - K_1\Phi(S(T)) - K_2]^+, \tag{2}$$

где $[x - K]^+ = \max(x - K, 0)$. Набор параметров $(K_1, K_2, m(dt), \alpha(s)), \Phi(s)$, где $K, K_1, K_2 \geq 0$ – константы, $\Phi, \alpha : R^n_+ \to R_+$ и $m(dt)$- положительная борелевская мера на $[0, T]$, позволяет описать ряд АО. Выбирая, в частности, $\alpha(s) = \sum_{k=1}^n s_k$, $K_1 \geq 0$, мы получим АО с фиксированной договорной ценой, если $K_2 = 0$, то мы получим АО с плавающей договорной ценой. Выбор $\kappa = \pm 1$ соответствует пут или колл-опциону, а выбор $m(t) = \frac{t}{T}$ или $m(t) = \frac{1}{n}[\frac{nt}{T}]$ приводит соответственно к непрерывному или дискретному платежному обязательству азиатского типа.

Обозначим $Y(T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sum_{k=1}^n S_k(t)dt$ и пусть $f_{t,T}(y)$ – плотность распределения $Y(T)$. Выберем в формуле (2) $\kappa = 1, K_1 = 0, K_2 = K$. Цена $c_{t,T}$ в момент t колл-опциона на Y с моментом исполнения T ценой исполнения K при этом вычисляется по формуле

$$c_{t,T}(\sigma, K) = e^{-r(T-t)}E_t[Y(T) - K]^+ = e^{-r(T-t)}\int_K^\infty (y - K)f_{t,T}(y)dy. \tag{3}$$

В работе [1] показано, что при $n = 1$ можно рассмотреть двойное преобразование Лапласа функции $c_{t,T}(\sigma, K)$ вида (3) по параметрам K, T, найти его в явном виде и затем определить $c_{t,T}(\sigma, K)$, вычисляя обратное преобразование Лапласа.

Другой подход, связанный с построением хеджирующего портфеля (хеджа), при $n = 1$ использован в работах [2],[3]. Рассмотрим случай $n > 1$ и пусть σ – невырожденная матрица, тогда, как известно, рассматриваемый рынок полный и для любого платежного обязательства $\mathcal{Y} = \Psi(S(T))$ существует самофинансируемый (SF) портфель $h(\tau) = (h_1(\tau), \ldots, h_n(\tau))$, хеджирующй $\mathcal{Y}$, т.е. такой, что $\mathcal{Y} = \sum_{k=1}^n h_i(T)S_i(T)$. Вычислив динамику капитала этого портфеля, т.е функцию $V(\tau) = F(\tau, S(\tau))$ такую, что $V(T) = F(T, S(T)) = \mathcal{Y}$, безарбитражную цену $\mathcal{Y}$ можно определить как его начальный капитал $V(t) = F(t, s)$.

Рассмотрим рынок, на котором присутствует n рисковых активов, по которым выплачиваются непрерывные дивиденды. ы будем считать, что P-динамика рисковых активов определяется стохастическим уравнением

$$dS_k(\tau) = S_k(\tau)[(r - \gamma_k)d\tau + \sum_{j=1}^n \sigma_{kj}dw_j(\tau)], \quad S_k(t) = s_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где r – процентная ставка, γ_k – непрерывно выплачиваемые дивиденды по k-му активу и σ –обратимая $n \times n$-матрица волатильностей. Пусть $h(t) = (h_1(t), \ldots, h_n(t))$ – портфель, хеджирующий азиатский форвард с платежным обязательством вида $\mathcal{Y} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{T}\int_0^T S_k(t)dt - K$. Такой портфель можно задать соотношением

$$h_k(t) = \frac{1}{(r - \gamma_k)T}[e^{-\gamma_k(T-t)} - e^{-r(T-t)}], \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

При этом его капитал задается соотношением

$$\begin{aligned} dV(\tau) &= h(\tau) \cdot dS(\tau) + r(V(\tau) - h(\tau) \cdot S(\tau))d\tau + h(\tau) \cdot S^\gamma(\tau)d\tau = \\ &= rV(\tau)d\tau + h(\tau) \cdot [dS(\tau) - rS(\tau)d\tau + S^\gamma(\tau)d\tau] \end{aligned} \tag{6}$$

с начальным условием

$$V(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(r-\gamma_k)T}[e^{-\gamma_k(T-t)} - e^{-r(T-t)}]s_k - e^{-rT}K. \tag{7}$$

Здесь $S_k^\gamma = \gamma_k S_k$ и $h \cdot s = \sum_{k=1}^n h_k s_k$.

Нетрудно проверить, что при этом

$$V(T) = e^{-rT}V(0) + \int_0^T e^{r(T-t)}h(t) \cdot [dS_t - (rS(t) - S^\gamma(t))dt] =$$

$$= e^{rT}V(0) + h(T) \cdot S(T) - e^{-rT}h(0) \cdot S(0) + \int_0^T e^{r(T-t)}[S^\gamma(t) \cdot h(t) - S(t) \cdot h'(t)]dt =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^n \int_0^T S_i(t)dt - K.$$

Для того, чтобы определить безарбитражную цену $c_{t,T}(\sigma, K)$ АО, рассмотрим функцию

$$F(t,s,z) = e^{-r(T-t)}E_{t,s,z}[\Psi(S(T), Z(T))], \tag{8}$$

где S удовлетворяет уравнению (4) ,

$$dZ(\tau) = \frac{-Z(\tau) + \alpha(S(\tau))}{\tau - t}d\tau, \quad Z(t) = z, \quad 0 \le t \le \tau \le T,$$

и $\Psi(s,z) = [z - K_1\Phi(s) - K_2]^+$.

При этом нетрудно показать, что $F(t,s,z)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^n (rs_k - s_k^\gamma)\frac{\partial F}{\partial s_k} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \sigma_{ik}s_i\frac{\partial F}{\partial s_i \partial s_j}\sigma_{jk}s_j + \frac{-z + \alpha(s)}{t}\frac{\partial F}{\partial z} - rF = 0,$$

$$F(T,s,z) = [\frac{1}{T-t}\int_t^T \alpha(S(\tau))d\tau - K_1\Phi(S(T)) - K_2]^+.$$

При этом $F(t,s,z)$ совпадет с $c_{t,T}(\sigma, K)$ вида (3), если выбрать $K_1 = 0, K_2 = K$.

Заметим, в заключение, что для вычисления функции $F(t,s,z)$ можно воспользоваться методом Монте Карло, моделируя случайные величины $S(T)$ и $Z(T)$ используя соотношение (8).

Литература.

1. Fu M., Madan D., Wang T. Pricing asian options. A comparison of analytical and Monte Carlo methods. Journal of Computational Finance, 1999. Vol.2, No.2, p. 49-74,

2. Večer J., Xu M. Pricing asian options in a semimartingale model. Quantitative Finance, 2004. v.4. p.170-175,

3. Večer J. Unified Asian Pricing, Risk, 2002. V. 15, No. 6, p. 113-116.

4. Björk T. Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press, 2004.

Быстрецкий М.В., Наимов А.Н.

О третьей двухточечной краевой задаче на плоскости

Рассмотрим задачу

$$z'' = Q(z' - Cz) + f(t, z, z'), \qquad 0 < t < 1, \quad z \in R^2, \tag{1}$$

$$z'(0) = Az(0) + h_0(z), \qquad z'(1) = Bz(1) + h_1(z), \tag{2}$$

где $z = (x, y) \in R^2$, $Q(z) = |z|^{m-1}(x, -y)$, $m > 1$, A, B, C - квадратные матрицы второго порядка, отображения $f : [0,1]\times R^2\times R^2 \mapsto R^2$, $h_i : C^1([0,1]; R^2) \mapsto R^2$, $i = 0, 1$ непрерывны и удовлетворяют условиям

$$(|z| + |w|)^{-m} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t, z, w)| \to 0 \quad \text{при} \quad |z| + |w| \to \infty, \tag{3}$$

$$||z||_{C^1}^{-1} h_i(z) \to 0 \quad \text{при} \quad ||z||_{C^1} \to \infty. \tag{4}$$

Разрешимость задачи (1)-(2) в случае нулевой матрицы C была исследована в работе [1] и в работе [2] при более общих условиях на Q. Здесь рассматривается вопрос об априорной оценке для решений задачи (1)-(2) в случае, когда главный нелинейный член правой части системы (1) обращается в ноль на гиперплоскости $z' = Cz$, где C - произвольная квадратная матрица второго порядка. Расположение этой гиперплоскости должно быть согласовано с краевыми условиями. Для этого введем матрицу

$$[A, B, C] = P_1(A-C) + P_2(B-C)e^C, \quad \text{где} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 (об априорной оценке). *Пусть для задачи (1)-(2) матрица $[A, B, C]$ невырождена. Тогда существует число R, зависящее лишь от A, B, C, f, h_0, h_1, такое, что для любого решения $z(t)$ задачи (1)-(2) справедлива оценка $||z||_{C^1} < R$.*

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{(A, B, C) : det[A, B, C] \neq 0\}$ с метрикой, определяемой через сумму норм матриц A, B и C.

Теорема 2. *Пространство $\mathfrak{M}$ состоит из двух связных компонент.*

На основе этой теоремы исследование разрешимости задачи (1)-(2)для любой тройки $(A, B, C) \in \mathfrak{M}$ можно свести к двум случаям, в которых C есть нулевая матрица, а матрицы A и B одновременно равны либо единичной матрице, либо матрице $P_1 - P_2$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что оценка $||z||_{C^1} < R$ неверна. Тогда существует последовательность решений $z_n(t)$, $n = 1, 2, ...$ задачи (1)-(2), для которой $r_n = ||z||_{C^1} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим функции $u_n(t) = r_n^{-1} z_n(t)$, $n = 1, 2, ...$. Для этих функций имеем:

$$r_n^{1-m} u_n''(t) = Q(u_n'(t) - Cu_n(t)) + f_n(t), \quad 0 < t < 1, \tag{5}$$

$$u_n'(0) = Au_n(0) + h_{0n}, \quad u_n'(1) = Bu_n(1) + h_{1n}, \tag{6}$$

где $f_n(t) = r_n^{-m} f(t, r_n u_n(t), r_n u_n'(t))$, $\quad h_{jn} = r_n^{-1} h_j(r_n u_n)$, $j = 0, 1$. Заметим, что $f_n(t) \rightrightarrows 0$ и $h_{jn} \to 0$ при $n \to \infty$, $j = 0, 1$. Действительно, в силу условия (3), для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\max_{0 \le t \le 1} |f(t, z, w)| < \varepsilon(|z| + |w|)^m \quad \text{при} \quad |z| + |w| > N(\varepsilon).$$

Отсюда,

$$\max_{0 \le t \le 1} |f(t, z, w)| \le \varepsilon(|z| + |w|)^m + M(\varepsilon),$$

где $M(\varepsilon) = max\{|f(t, z, w)| : 0 \le t \le 1, |z| + |w| \le N(\varepsilon)\}$. Теперь для $f_n(t)$ имеем:

$$|f_n(t)| \le \frac{1}{r_n^m}(\varepsilon(|r_n u_n(t)| + |r_n u_n'(t)|)^m + M(\varepsilon)) \le \varepsilon + \frac{M(\varepsilon)}{r_n^m},$$

откуда $\overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(t)| \le \varepsilon$. Следовательно, $f_n(t) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$.

Аналогичным образом для h_{jn} получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |h_j(z)| \le \varepsilon ||z||_{C^1} + M_j(\varepsilon),$$

$$|h_{jn}| \le \frac{1}{r_n}(\varepsilon ||r_n u_n||_{C^1} + M_j(\varepsilon)) = \varepsilon + \frac{1}{r_n} M_j(\varepsilon),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |h_{jn}| \le \varepsilon, \quad \text{отсюда,} \quad \lim_{n\to\infty} |h_{jn}| = 0.$$

Так как $||u_n||_{C^1} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}(|u_n(t)| + |u_n'(t)|) = |u_n(t_n)| + |u_n'(t_n)| = 1$, поэтому, в силу теоремы Арцеля, не теряя общности, можно считать что $u_n(t) \rightrightarrows u_0(t)$, $n \to \infty$ на $[0, 1]$.

Лемма 1. *Функция $u_0(t)$ хотя бы в одной точке не обращается в ноль.*

Доказательство. Пусть $u_0(t) \equiv 0$. Рассмотрим функции $v_n(t) = u_n'(t_n + tr_n^{1-m}), \alpha_n \le t \le \beta_n, n = 1, 2, ...,$ где $\alpha_n = -t_n r_n^{m-1}, \beta_n = (1 - t_n) r_n^{m-1}$. Имеем:

$$v_n'(t) = Q(v_n(t) - Cu_n(t_n + tr_n^{1-m})) + f_n(t_n + tr_n^{1-m}), \tag{7}$$

$$v_n(\alpha_n) = Au_n(0) + h_{0n}, \quad v_n(\beta_n) = Bu_n(1) + h_{1n}, \tag{8}$$

$$|v_n(t)| \le 1, \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{9}$$

$$|v_n(0)| \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Из (7) и (9) следует, что на каждом конечном отрезке $[a_1, b_1] \subset (\alpha, \beta)$, где $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} \beta_n$, определены функции $v_n(t), n = n_0, n_0 + 1, ..., (n_0 = n_0(a_1, b_1))$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Поэтому можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $v_{n_k}^{(1)}(t), k = 1, 2, ...,$ где $n_1 \geq n_0$. Выберем расширяющиеся отрезки

$$[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset ... \subset [a_p, b_p] \subset ...,$$

где $a_p \to \alpha$, и $b_p \to \beta$ при $p \to \infty$. На каждом отрезке $[a_p, b_p]$ (начиная с $p = 2$) из последовательности функций $v_{n_k}^{(p-1)}(t), k = 1, 2, ..., n_1 \geq n_0(a_p, b_p)$, выберем подпоследовательность функций $v_{n_k}^{(p)}(t), k = 1, 2, ...$ равномерно сходящуюся на отрезке $[a_p, b_p]$. Если рассмотрим последовательность функций $v_{n_k}^{(k)}(t), k = 1, 2, ...,$ то она определена на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ начиная с некоторого номера $k_0 = k_0(a, b)$, и равномерно сходится. Процедуру выделения такой последовательности функций и предельного перехода на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ впредь назовем процедурой предельного перехода на расширяющихся отрезках. В пределе получим функцию $v_0(t)$, определенную и непрерывную на промежутке (α, β), и такую, что

$$|v_0(0)| = 1, \quad |v_0(t)| \leq 1, \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{11}$$

$$|v_0(t_1) - v_0(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|, \quad \text{где } M \text{ не зависит от } \alpha \text{ и } \beta, \tag{12}$$

$$v_0'(t) = Q(v_0(t)), \quad \alpha < t < \beta. \tag{13}$$

Если $\alpha > -\infty$ или $b < +\infty$, то в силу (12) функция $v_0(t)$ непрерывно продолжима вплоть до точки α или β соответственно. В случае $\alpha > -\infty$ имеем:

$$|v_0(\alpha) - v_{n_k}^{(k)}(\alpha_{n_k})| \leq |v_0(\alpha) - v_0(\alpha + \delta)| + |v_0(\alpha + \delta) - v_{n_k}^{(k)}(\alpha + \delta)| +$$

$$+ |v_{n_k}^{(k)}(\alpha + \delta) - v_{n_k}^{(k)}(\alpha_{n_k})| \leq M\delta + |v_0(\alpha + \delta) - v_{n_k}^{(k)}(\alpha + \delta)| + M\delta,$$

$$\lim_{k \to \infty} |v_0(\alpha) - v_{n_k}^{(k)}(\alpha_{n_k})| \leq 2M\delta \qquad \forall \delta > 0,$$

следовательно, $v_0(\alpha) = \lim_{k\to\infty} v_{n_k}^{(k)}(\alpha_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}(Au_{n_k}(0) + h_{0n_k}) = 0$. Аналогично, если $\beta < +\infty$, то $v_0(\beta) = 0$.

Пусть $\alpha > -\infty$. Тогда $v_0(\alpha) = 0$, $v_0(0) \neq 0$, $\alpha < 0$ и при $\alpha < t < 0$

$$< v_0'(t), v_0(t) >=< Q(v_0(t)), v_0(t) > \quad (\text{здесь } < \cdot, \cdot > -\text{скалярное произведение}),$$

$$\frac{d}{dt}|v_0(t)|^2 = 2 < Q(v_0(t)), v_0(t) >,$$

$$-c_0|v_0(t)|^{m+1} \leq \frac{d}{dt}|v_0(t)|^2 \leq c_0|v_0(t)|^{m+1},$$

отсюда, если $v_0(t) \neq 0$ при $\alpha_1 < t < 0$, где $\alpha_1 > \alpha$ и $v_0(\alpha_1) = 0$, то

$$-c_0 \leq \frac{(|v_0(t)|^2)'}{(|v_0(t)|^2)^{\frac{m+1}{2}}} \leq c_0, \qquad -c_0|t| \leq \frac{(|v_0(s)|^2)^{-\frac{m-1}{2}}}{-\frac{m-1}{2}}\Big|_0^t \leq c_0|t|,$$

$$-\frac{c_0(m-1)}{2}|t| \leq |v_0(t)|^{\frac{1-m}{2}} - 1 \leq \frac{c_0(m-1)}{2}|t|$$

$$\frac{c_0(m-1)}{2}|\alpha_1| \geq \lim_{t\to\alpha_1}(|v_0(t)|^{\frac{1-m}{2}}-1) = +\infty,$$

приходим к противоречию. Следовательно, случай $\alpha > -\infty$ невозможен, т.е. $\alpha = -\infty$. Аналогичным образом можно показать, что $\beta = +\infty$.

Таким образом, $v_0(t)$ является ненулевым ограниченным решением системы $z' = Q(z)$. Данную систему можно записать в виде $z' = |z|^{m-1}Jz$, где $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим функцию $w_0(t) = v_0(\phi_0(t))$, $t \in (-\infty, +\infty)$, где $\phi_0(t)$ - решение дифференциального уравнения $\phi' = |v_0(\phi)|^{1-m}$, удовлетворяющее условию $\phi(0) = 0$. Имеем:

$$w_0'(t) = v_0'(\phi_0((t))\phi_0'(t) = |v_0(\phi_0(t))|^{m-1}Jv_0(\phi_0(t))\phi_0'(t) = Jv_0(\phi_0(t)) = Jw_0(t).$$

Следовательно, $w_0(t)$ является ненулевым ограниченным решением системы $w' = Jw$. Приходим к противоречию. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. $\forall t \in (0,1) \quad \lim_{n\to\infty}(u_n'(t) - Cu_n(t)) = 0$.

Доказательство. Пусть при некотором $\tau_0 \in (0,1)$

$$u_n'(\tau_0) - Cu_n(\tau_0) \to w_*, \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad w_* \neq 0.$$

Рассмотрим функции $w_n(t) = u_n'(\tau_0 + tr_n^{1-m})$, $0 \leq \tau_0 + tr_n^{1-m} \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Имеем: $w_n'(t) = Q(w_n(t) - Cu_n(\tau_0 + tr_n^{1-m})) + o(1)$, $|w_n(t)| \leq 1$, $w_n(0) - Cu_n(0) \to w_*$, $n \to \infty$. Применяя процедуру предельного перехода на расширяющихся отрезках, получим:

$$w_0'(t) = Q(w_0(t) - Cu_0(\tau_0)), \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

$$|w_0(t)| \leq 1, \quad w_0(0) - Cu_0(\tau_0) = w_*, \quad w_* \neq 0.$$

Отсюда следует, что функция $w_*(t) = w_0(t) - Cu_0(\tau_0)$ есть ненулевое ограниченное решение системы $z' = Q(z)$. Опять приходим к противоречию. Лемма 2 доказана.

Обозначим $\tilde{u}_n(t) = u_n'(t) - Cu_n(t)$, $n = 1, \ldots$. Тогда

$$u_n(t) = u_n(0) + \int_0^t (Cu_n(s) + \tilde{u}_n(s))ds, \quad 0 < t < 1.$$

В последнем равенстве, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$u_0(t) = u_0(0) + \int_0^t Cu_0(s)ds, \quad 0 < t < 1,$$

$$u_0(t) = e^C u_0(0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Теперь, рассматривая функции $\tilde{v}_n(t) = u_n'(tr_n^{1-m})$, $0 \leq t \leq r_n^{m-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и применяя процедуру предельного перехода на расширяющихся отрезках, получим:

$$\tilde{v}_0'(t) = |\tilde{v}_0(t)|^{m-1}J(\tilde{v}_0(t) - Cu_0(0)), \quad t > 0,$$

$$\tilde{v}_0(0) = Au_0(0), \quad |v_0(t)| \leq 1 \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Значит, функция $\tilde{\tilde{v}}_0(t) = \tilde{v}_0(t) - Cu_0(t)$ является ограниченным справа решением системы $z' = |z|^{m-1}Jz$, удовлетворяющее начальному условию $z(0) = (A - C)u_0(0)$. Отсюда, как необходимое условие выводим

$$P_1(A - C)u_0(0) = 0. \tag{14}$$

Аналогичным образом выводится равенство $P_2(B - C)u_0(1) = 0$ или

$$P_2(B - C)e^C u_0(0) = 0. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что система $(P_1(A - C) + P_2(B - C)e^C)z = 0$ имеет ненулевое решение. Следовательно, матрица $P_1(A - C) + P_2(B - C)e^C$ невырождена. А это противоречит условию теоремы. Теорема 1 доказана.

В линейном нормированном пространстве $\mathfrak{N}$ всех троек (A, B, C) матриц A, B, C с нормой $||(A, B, C)||_{\mathfrak{N}} := ||A|| + ||B|| + ||C||$, где $||A||$, $||B||$, $||C||$ - нормы матриц A, B, C, рассмотрим множество

$$\mathfrak{M} = \{(A, B, C) : det[A, B, C] \neq 0\}.$$

Множество $\mathfrak{M}$ открыто, поэтому, согласно теореме приведенной в книге [3], связные компоненты $\mathfrak{M}$ линейно связны. Последнее означает, что если две тройки из $\mathfrak{M}$ лежат в одной связной компоненте, то их можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в $\mathfrak{M}$; другими словами, любые две тройки из одной связной компоненты гомотопны.

Доказательство теоремы 2. В силу выше сделанных замечаний достаточно показать, что любая тройка $(A, B, C) \in \mathfrak{M}$ гомотопна тройке $(D, D, 0) \in \mathfrak{M}$, где $D = [A, B, C]$ и $detD \neq 0$.

Сначала проверим гомотопность троек (A, B, C) и $(\tilde{A}, \tilde{A}, C)$, где $\tilde{A} = P_1A + P_2B$. Положим $A_\lambda = (1 - \lambda)A + \lambda\tilde{A}$, $B_\lambda = (1 - \lambda)B + \lambda\tilde{A}$, $C_\lambda = C$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Тогда

$$[A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda] = P_1(A_\lambda - C) + P_2(B_\lambda - C)e^C = P_1((1 - \lambda)A + \lambda P_1A - C) +$$

$$+ P_2((1 - \lambda)B + \lambda P_2B - C)e^C = P_1(A - C) + P_2(B - C)e^C = [A, B, C] = D.$$

Следовательно, $(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda) \in \mathfrak{M}$ при $\lambda \in [0, 1]$.

Теперь положим $C_\lambda = (1 - \lambda)C$, $0 \leq \lambda \leq 1$ и $\tilde{A}_\lambda$ построим из условий

$$P_1(\tilde{A}_\lambda - C_\lambda) = P_1(\tilde{A} - C), \quad P_2(\tilde{A}_\lambda - C_\lambda)e^{C_\lambda} = P_2(\tilde{A} - C)e^C,$$

отсюда,

$$\tilde{A}_\lambda = C_\lambda + P_1(\tilde{A} - C) + P_2(\tilde{A} - C)e^{\lambda C}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Тогда имеем:

$$[\tilde{A}_\lambda, \tilde{A}_\lambda, C_\lambda] = [\tilde{A}, \tilde{A}, C] = D, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

$$\tilde{A}_0 = C + P_1(\tilde{A} - C) + P_2(\tilde{A} - C) = \tilde{A}, \quad \tilde{A}_1 = P_1(\tilde{A} - C) + P_2(\tilde{A} - C)e^C = D.$$

Таким образом, любая тройка $(A, B, C) \in \mathfrak{M}$ гомотопна тройке $(D, D, 0) \in \mathfrak{M}$, где $D = [A, B, C]$.

Заметим, что если две тройки $(D_1, D_1, 0)$, $(D_2, D_2, 0) \in \mathfrak{M}$ гомотопны, то $detD_1 \cdot detD_2 > 0$ и матрицы D_1, D_2 можно соединить семейством невырожденных матриц. Верно и обратное, если две квадратные матрицы D_1 и D_2 невырождены и их определители имеют одинаковый знак, то их можно соединить семейством невырожденных матриц (см., например, [4]). Следовательно, гомотопность двух троек $(D_1, D_1, 0)$, $(D_2, D_2, 0) \in \mathfrak{M}$ эквивавлентна условию совпадения знаков определителей матриц D_1 и D_2. Значит, любая тройка $(D, D, 0) \in \mathfrak{M}$ гомотопна либо тройке $(I, I, 0)$, где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, если $detD > 0$, либо тройке $(J, J, 0)$, где $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, если $detD < 0$. Отсюда, окончательно выводим, что $\mathfrak{M}$ состоит из двух связных компонент. Теорема 2 доказана.

На основе теоремы 2, используя результаты работы [5], можно показать, что если $(A, B, C) \in \mathfrak{M}$, то разрешимость задачи (1)-(2) при любых f, h_0 и h_1, удовлетворяющих условиям (3)-(4), эквивалентна разрешимости системы

$$\begin{gathered} z'' = |z'|^{m-1}z' + f(t, z, z'), \quad 0 < t < 1, \\ z'(0) = Ez(0) + h_0(z), \quad z'(1) = Ez(0) + h_1(z), \end{gathered} \tag{16}$$

где $E = I$, если $det[A, B, C] > 0$, и $E = J$, если $det[A, B, C] < 0$. В той же работе [5] доказана разрешимость задачи (16) при условии, что $detE \neq 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если $(A, B, C) \in \mathfrak{M}$, то задача (1)-(2) разрешима при любых f, h_0 и h_1, удовлетворяющих условиям (3) и (4).

Литература

[1] Севостьянова В.С., Наимов А.Н. // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования". – Воронеж. 2005. С.203.

[2] Наимов А.Н. // Дифференциальные уравнения. – Т.38, № 1, 2002. С.132-133.

[3] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.

[4] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., 1979.

[5] Наимов А.Н. // Докл. АН Республики Таджикистан. – Т.41, №10, 1998. С.56-61.

Вдовин А.Ю., Рублева С.С.

О гарантированной оценке точности динамического восстановления управления (случай непостоянства ранга матрицы коэффициентов)

Рассматривается задача восстановления неизвестного управления $v(t)$ для процесса, динамика которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))v(t), \quad x(t_0) = x_0,\, t \in [t_0, T], \tag{1}$$

по результатам неточных измерений $\xi(\cdot)$ состояний системы: $|x(t_i) - \xi(t_i)| \leqslant h$. Здесь $|\cdot|$ — евклидова норма, t_i – узлы разбиения временного промежутка $[t_0, T] : t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T,\ t_{i+1} - t_i = \Delta(h)$; $f_1(\cdot)$ — вектор–функция и $f_2(\cdot)$ — матрица–функция, отображающие $[t_0, T] \times R^m$ в R^m и в пространство $m \times q$ матриц со спектральной нормой $\|\cdot\|$, соответственно.

Считается известным, что:

— $v(t)$ — измеримая функция, со значениями, принадлежащими заданному выпуклому компакту $Q \subset R^q$, и значит, существует положительное M_v такое, что $|v(t)| \leqslant M_v$;

— каждое значение $x(t)$ является внутренней точкой компакта $\mathbf{X} \subset R^m$, и значит, $|x(t)| \leqslant M_x$;

— $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ удовлетворяют на $[t_0, T] \times \mathbf{X}$ условию Липшица по совокупности переменных: $\max\{|f_1(t_1, x_1) - f_1(t_2, x_2)|, \|f_2(t_1, x_1) - f_2(t_2, x_2)\|\} \leqslant L\big(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|\big)$, а значит, для $i = 1, 2$ существуют положительные константы M_i такие, норма $f_i(\cdot)$ не превосходит M_i.

При указанных предположениях Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским [4] был предложен метод решения этой обратной задачи в динамической постановке. Коротко суть этого подхода состоит в следующем:

1) по известной величине ошибки h осуществляется выбор моментов t_i для проведения измерений $\xi(t_i)$;

2) формируется правило построения $u_h(t)$ приближения для неизвестного управления $v(t)$ на каждом отрезке разбиения $[t_i, t_{i+1}]$;

3) на том же промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ с помощью $u_h(t)$ формируется траектория вспомогательной системы – модели $w_h(t)$, которая используется для моделирования движения исследуемой системы.

Подчеркнем, что если для построения $u_h(t)$ и $w_h(t)$ используются только предопределенные величины, то существует возможность при достаточном быстродействиии вычислительного устройства проводить восстановление управления в темпе реального времени.

Таким образом, задается однопараметрическое семейство операторов — $(D_h)_{h>0}$, зависящее от величины h, которое измерению движения $\xi(\cdot)$ ставит в соответствие приближение управления – $u_h(\cdot)$.

Подробнее остановимся на предложенном в [4] динамическом алгоритме $D_h^{(1)}$:

а) $u_h(t)$ на промежутке $[t_0, t_1)$ есть вектор из Q, обладающий наименьшей нормой;

б) система–модель на $[t_i, t_{i+1})$ имеет вид:

$$w_h(t) = w_h(t_i) + \Big(f_1(t_i, \xi(t_i)) + f_2(t_i, \xi(t_i))u_h(t)\Big)(t - t_i), \quad (w_h(t_0) = \xi(t_0)) \quad (2)$$

в)для $[t_i, t_{i+1}), i > 0$ результат приближения $u_h(t)$ на промежутке полагается равным результату проектирования на компакт Q вектора

$$\frac{1}{\alpha(h)} f_2^T(t_i, \xi(t_i))\Big(w_h(t_i) - \xi(t_i)\Big),$$

где функция $\alpha(h) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ играет роль параметра регуляризации.

Там же было установлено, что при условии согласования параметров $\alpha(h)$, $\Delta(h)$ с величиной погрешностью измерения h : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h + \Delta(h)}{\alpha(h)} = 0$, $\Delta(h) = h$, $D_h^{(1)}$ является регуляризирующим, то есть $\|u_h(\cdot) - v^*(\cdot)\|_{L_{2[t_0,T]}}$ стремится к нулю вместе с h, где $v^*(\cdot)$ — управление, обладающее минимальной нормой, среди всех управлений со значениями из Q, порождающих движение $x(\cdot)$.

Рассмотрим вопрос об оценке $\rho(u_h(\cdot), v^*(\cdot))$ — расстояния между управлением и построенным приближением в некоторой метрике.

Определение 1 *Верхней (нижней) оценкой точности динамического алгоритма назовем всякую функцию* $\mu(\cdot) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *такую, что при некотором* $h_0 > 0$ *и всех* $h \in [0, h_0)$ *выполняется* $\sup\limits_{x(\cdot)\in \mathbf{X}} \sup\limits_{\xi(\cdot)} \rho(v_*(\cdot), u_h(\cdot)) \leqslant (\geqslant) \mu(h)$

Определение 2 *Число* $r > 0$ *назовем асимптотическим порядом точности динамического алгоритма если существуют* $h_* > 0$ *и* $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ *такие, что для всех* $h \in [0, h_*)$ *функции* $\mu_1(h) = \lambda_1 h^r$ *и* $\mu_2(h) = \lambda_2 h^r$ *являются, соответственно, нижней и верхней оценками точности данного алгоритма.*

Коротко остановимся на известных к настоящему моменту результатах. В работе [3] были получены оценки точности в пространстве $L_{2[t_0,T]}$ в предположении, что $f_2(t, x(t))$ обратима, а единственное, в силу этого, управление $v(t)$, порождающее наблюдаемое движение, обладает ограниченной вариацией на $[t_0, T]$. В [4] была предложена модификация упомянутого алгоритма для случая неограниченных управлений, для которой в [5] были получены гарантированные оценки точности при тех же условиях, что и в [3], но для постоянной, возможно вырожденной, матрицы $f_2(t, x(t))$.

В предлагаемой работе исследуется оценка точности $D_h^{(1)}$ в метрике пространства $L_{1[t_0,T]}$ для движений $x(t)$, порождаемых управлением с ограниченной на $[t_0, T]$ вариацией, вдоль которых матрица $f_2(t, x(t))$ имеет постоянный, но возможно неполный ранг, кроме того, предложена модификация

$D_h^{(2)}$ алгоритма $D_h^{(1)}$, для которой удается указать асимптотическую оценку точности и для случая изменения ранга в конечном числе точек.

Рассмотрим задачу (1) в виде: $f_2(t,x(t))v(t) = x'(t) - f_1(t,x(t))$. При известных $x(t)$, $x'(t)$ ее можно трактовать как систему алгебраических уравнений относительно неизвестного управления $v(t)$. Заметим, что данная система может иметь множество решений. Через $v_*(t)$ обозначим нормальное псевдорешение этой системы. Пусть $v_*(t) \in Q$ и обладает ограниченной вариацией на $[t_0, T]$. Через $R\left(A(t,x(t))\right)$ обозначим подпространство собственных векторов матрицы $A(t,x(t)) = f_2(t,x(t))f_2^T(t,x(t))$. Будем предполагать, что $R\left(A(t,x(t))\right)$ — постоянно и $0 \in Q$.

Поскольку ранг симметричной матрицы $A(\cdot)$, а, значит, и $f_2(\cdot)$, равен размерности $R\left(A(t,x(t))\right)$, то $f_2(\cdot)$ является матрицей постоянного ранга, не обязательного полного.

Рассмотрим ситуацию, когда система (1) является идеально наблюдаемой на расширенном временном промежутке $[t_0 - \delta(h), T]$, то есть $x(t)$ известно точно. Полагая, при этом, для $t \in [t_0 - \delta(h), t_0)$ $v(t) \equiv 0$, $f_i(t,x(t)) \equiv f_i(t_0, x_0)$, $i = 1, 2$. Функцию

$$u_0(t) = f_2^T(t,x(t))\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} \tag{3}$$

будем рассматривать как управление моделью

$$w_0'(t) = f_1(t,x(t)) + f_2(t,x(t))f_2^T(t,x(t))\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)}, \quad w_0(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Решение задачи (4) может быть записано в виде:

$$w_0(t) = Y(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t,\tau)\left(\frac{1}{\alpha(h)}A(\tau,x(\tau))x(\tau) + f_1(\tau,x(\tau))\right)d\tau, \tag{5}$$

здесь $Y(t,\tau)$ является решением дифференциального уравнения

$$Y'(t,\tau) = \frac{1}{\alpha(h)}Y(t,\tau)A(\tau,x(\tau)) \tag{6}$$

с начальным условием $Y(t,t) = E$, где E – единичная матрица.

Применяя формулу интегрирования по частям к (5), с учетом (6), имеем:

$$w_0(t) = x(t) - \int_{t_0}^{t} Y(t,\tau)f_2(\tau,x(\tau))v(\tau)d\tau,$$

где $v(t)$ любое измеримое управление, порождающее движение. Из последнего равенства получаем:

$$\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha(h)} = \frac{1}{\alpha(h)}\int\limits_{t_0}^{t} Y(t,\tau)f_2(\tau,x(\tau))v(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Далее будем обозначать $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$. В силу определения и свойств псевдообратной матрицы $f_2^+(\cdot)$ [6] имеют место равенства:

$$f_2(\cdot) = f_2(\cdot) f_2^+(\cdot) f_2(\cdot) = f_2(\cdot) \left(f_2^+(\cdot) f_2(\cdot)\right)^T = f_2(\cdot) f_2^T(\cdot) \big(f_2^T(\cdot)\big)^+,$$

согласно которым (7) может быть представлено в виде:

$$\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} Y(t,\tau) A(\tau, x(\tau)) \left(f_2^T(\tau, x(\tau))\right)^+ v(\tau) d\tau. \qquad (8)$$

Рассмотрим $P(\cdot)$ — матрицу–проектор векторов–строк на $R\,(A(\cdot))$. В связи с тем, что подпространство собственных векторов постоянно, то и матрица – проектор также будет постоянной: $P(t) \equiv P$. Пусть $Y_1(t,\tau) = Y(t,\tau)P$. Очевидно, что

$$Y(t,\tau) A(\tau, x(\tau)) = Y_1(t,\tau) A(\tau, x(\tau))$$

и $Y_1(t,\tau)$ является решением (6) с начальным условием

$$Y_1(t,t) = P. \qquad (9)$$

Тогда (8) можно представить следующим образом:

$$\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{t_0}^{t} Y_1'(t,\tau) \left(f_2^T(\tau, x(\tau))\right)^+ v(\tau) d\tau. \qquad (10)$$

Отметим, что интеграл, стоящий в правой части (10) может рассматриваться как оператор восстановления для функции $\left(f_2^T(t, x(t))\right)^+ v(t)$.

Чтобы получить оценку $|v_*(t) - u_0(t)|$ при $t \in [t_0 - \delta, T]$, предварительно рассмотрим две вспомогательные леммы:

Лемма 1 *Пусть подпространство $R\,(A(t, x(t)))$ постоянно, $Y_1(t,\tau)$ является решением (6) с начальным условием (9). Тогда при $t \in [t_0, T]$, $\tau \in [t_0, t]$ существует положительное число λ такое, что имеет место*

$$\|Y_1(t,\tau)\| \leqslant m e^{-\lambda \frac{t-\tau}{\alpha}}$$

Доказательство. Известно, что собственные числа произвольной непрерывной симметричной матрицы HH^T являются непрерывными и неотрицательными. Поэтому, функции $\lambda_r(t) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_1(t)$, являющиеся упорядоченными собственными числами $A(t, x(t))$, соответствующие векторам из $R\,(A(t, x(t)))$, будут положительными и непрерывными. Следовательно, можно указать положительное число λ, такое, что $\lambda_1(t) \geqslant \lambda$ для всех $t \in [t_0 - \delta, T]$.

Для получения требуемой оценки воспользуемся известным приемом, см. [7]. Рассмотрим функцию $\varphi(\tau) =< y^k(\tau), y^k(\tau)) > e^{-2\lambda \frac{\tau - t_0}{\alpha}}$, здесь $y^k(\tau)$ – строка матрицы $Y_1(t,\tau)$ с номером k; $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение.

Ее производная имеет вид:

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = \left(2 < \left(y^k(\tau)\right)', y^k(\tau) > -2\frac{\lambda}{\alpha} < y^k(\tau), y^k(\tau) >\right) e^{-2\lambda\frac{\tau - t_0}{\alpha}} =$$

$\big($в силу того, что $y^k(\tau)$ удовлетворяет (6)$\big)$

$$= \left(\frac{2}{\alpha} < y^k(\tau)A(\tau, x(\tau)), y^k(\tau) > -2\frac{\lambda}{\alpha} < y^k(\tau), y^k(\tau) >\right) e^{-2\lambda\frac{\tau - t_0}{\alpha}} \geqslant$$

$$\geqslant \left[\frac{2\lambda_1(\tau)}{\alpha} < y^k(\tau), y^k(\tau) > -2\frac{\lambda}{\alpha} < y^k(\tau), y^k(\tau) >\right] e^{-2\lambda\frac{\tau - t_0}{\alpha}} \geqslant 0.$$

Следовательно, функция $\varphi(\cdot)$ не убывает, и для любого $\tau \in [t_0, t]$ имеет место неравенство:

$$< y^k(\tau), y^k(\tau) > e^{-2\lambda\frac{\tau - t_0}{\alpha}} \leqslant < y^k(t), y^k(t) > e^{-2\lambda\frac{t - t_0}{\alpha}}$$

В силу того, что $Y_1(t, t) = P$ и, следовательно, $|y^k(t)|^2 \leqslant 1$, последнее неравенство принимает вид:

$$|y^k(\tau)| \leqslant e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t - \tau)}.$$

Тогда, для спектральной нормы $Y_1(t, \tau)$, согласно [7], имеет место оценка:

$$\|Y_1(t, \tau)\| \leqslant m e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t - \tau)}.$$

Лемма 2 *Пусть ранг матрицы $f_2(t, x(t))$ постоянен, $v(t)$ — функция ограниченной вариации на $[t_0, T]$ ($\bigvee\limits_{t_0}^{T} v(\cdot) < \infty$). Тогда $\left(f_2^T(t, x(t))\right)^+ v(t)$ обладает ограниченной вариацией на $[t_0, T]$.*

Доказательство. Для матрицы H постоянного ранга имеет место оценка [8]:

$$\|H^+(t_1) - H^+(t_2)\| \leqslant 3\|H^+(t_1)\|^2 \, \|H(t_1) - H(t_2)\|.$$

Используя ее для матрицы $f_2^T(t, x(t))$, получаем:

$$\| \left(f_2^T(t_1, x_1)\right)^+ - \left(f_2^T(t_2, x_2)\right)^+ \| \leqslant 3\| \left(f_2^T(t_1)\right)^+ \|^2 \, \|f_2^T(t_1, x_1) - f_2^T(t_2, x_2)\| \leqslant$$

[по определению спектральной нормы и в силу липшицевости $f_2(t, x(t))$ имеем:]

$$\leqslant 3\frac{1}{\lambda}\|f_2^T(t_1, x_1) - f_2^T(t_2, x_2)\| \leqslant \frac{3}{\lambda} L \left(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|\right).$$

Следовательно $\left(f_2^T(t, x(t))\right)^+$ удовлетворяет условию Липшица, а значит, и обладает ограниченной вариацией на $[t_0, T]$.

Для вариации функции $\left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot)$, являющейся произведением двух функции, обладающих ограниченной вариацией, имеет место неравенство:

$$\bigvee_{t_0}^{T} \left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot) \leqslant \sup_{t\in[t_0,T]} \| \left(f_2^T(t,x(t))\right)^+ \| \bigvee_{t_0}^{T} v(\cdot) + \sup_{t\in[t_0,T]} |v(t)| \bigvee_{t_0}^{T} \left(f_2^T(\cdot)\right)^+,$$

из которого следует справедливость леммы.

Перейдем к оценке $|v_*(t) - u_0(t)|$, $t \in [t_0 - \delta, T]$:

Лемма 3 *Пусть выполнены условия лемм 19,2* $k \in N$ *и* α, δ, $\dfrac{h}{\alpha}$, $\dfrac{\alpha}{\delta}$ *стремятся к нулю вместе с* h, *Тогда существуют положительные константы* K_1 *и* $h_1(k)$, *такие, что для любых* $h \in [0, h_1(k))$, $t \in [t_0, T]$ *справедлива оценка:*

$$|v_*(t) - u_0(t)| \leqslant K_1 \left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)^k + M_2 \bigvee_{t-\delta}^{t} \left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot),$$

$$\textit{где} \quad K_1 = \left(M_2^2 M_v m \frac{1}{\lambda^2} + \frac{m M_v}{\lambda}\right).$$

Доказательство. Пусть $U(t) = \left(f_2^T(t,x(t))\right)^+ v(t)$. Согласно (10) оценим норму разности $U(t)$ и $\dfrac{x(t) - w_0(t)}{\alpha}$:

$$I = \left|\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha} - U(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} Y_1'(t,\tau) U(\tau) d\tau - U(t)\right| =$$

$\Bigg[$ Добавляя и вычитая $\int\limits_{t_0-\delta}^{t} Y_1'(t,\tau)U(t)d\tau$, с учетом того, что $U(\tau) = 0$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0]$, имеем $\Bigg]$

$$= \left|\int_{t_0-\delta}^{t} Y_1'(t,\tau)\big(U(\tau) - U(t)\big)d\tau + \int_{t_0-\delta}^{t} Y_1'(t,\tau)U(t)d\tau - U(t)\right| \leqslant$$

$\Bigg[$ Разобьем первый интеграл из правой части последнего неравенства на сумму двух: первый, по промежутку $[t_0 - \delta, t + \delta]$, и второй, по промежутку длиною $\delta :$ $[t - \delta, t]$, тогда $\Bigg]$

$$\leqslant \left|\int_{t_0-\delta}^{t-\delta} Y_1'(t,\tau)\big(U(\tau) - U(t)\big)d\tau\right| + \left|\int_{t-\delta}^{t} Y_1'(t,\tau)\big(U(\tau) - U(t)\big)d\tau +\right|$$

$$+ \left|\int_{t_0-\delta}^{t} Y_1'(t,\tau)U(t)d\tau - U(t)\right|$$

Тогда:

1)Оценивая первое слагаемое, воспользуемся леммой 19 для оценки нормы матрицы $Y_1(t,\tau)$, удовлетворяющей (6):

$$\left|\int\limits_{t_0-\delta}^{t-\delta} Y_1'(t,\tau)\big(U(\tau)-U(t)\big)d\tau\right| \leqslant \left|\int\limits_{t_0-\delta}^{t-\delta} \frac{1}{\alpha}Y_1(t,\tau)A(\tau,x(\tau))\big(U(\tau)-U(t)\big)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}M_2^2\left|\left(f_2^T(t,x(t))\right)^+ v(t)\right|\int\limits_{t_0-\delta}^{t-\delta}\|Y_1(t,\tau)\|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}M_2^2\frac{1}{\lambda}M_v\frac{\alpha}{\lambda}me^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t-\tau)}\Big|_{t_0-\delta}^{t-\delta} \leqslant M_2^2M_vm\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{\lambda\delta}{\alpha}}.$$

2)Для оценки второго слагаемого воспользуемся результатом из работы [3]: Если для ограниченной функции $p: J\to R^q$ $(J=[a,b])$ и функции $g: J\to R^q$ с ограниченной вариацией выполняются при любых $t\in J$ соотношения

$$\left|\int_a^t p(\tau)d\tau\right| \leqslant \varepsilon, \quad |g(t)|\leqslant G,$$

то

$$\left|\int_a^b g^T(\tau)p(\tau)d\tau\right| \leqslant \varepsilon(\bigvee_a^b g(\cdot)+G).$$

Нетрудно проверить, с учетом леммы 2, что для второго слагаемого выполняются условия приведенного утверждения, поэтому:

$$\left|\int\limits_{t-\delta}^{t} Y_1'(t,\tau)\big(U(\tau)-U(t)\big)d\tau\right| \leqslant \bigvee_{t-\delta}^{t}U(\cdot)\left\|\int\limits_{t-\delta}^{t}Y_1'(t,\tau)d\tau\right\| \leqslant \bigvee_{t-\delta}^{t}U(\cdot).$$

3)Для оценки третьего слагаемого вновь воспользуемся результатом леммы 19:

$$\left|\int\limits_{t_0-\delta}^{t} Y_1'(t,\tau)U(t)d\tau - U(t)\right| = \left|\Big(\int\limits_{t_0-\delta}^{t}Y_1'(t,\tau)d\tau - E\Big)U(t)\right| =$$

$$= \Big|Y_1(t,t_0-\delta)U(t)\Big| \leqslant me^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t-t_0+\delta)}\frac{1}{\lambda}M_v \leqslant mM_v\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\frac{\delta}{\alpha}}.$$

Суммируя выписанные оценки трех слагаемых, приходим к неравенству:

$$I \leqslant K_2e^{-\frac{\lambda\delta}{\alpha}} + \bigvee_{t-\delta}^{t}\left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot),$$

где $K_2 = M_2^2M_vm\dfrac{1}{\lambda^2}+mM_v\dfrac{1}{\lambda}$.

Отметим, что для любого $k \in N$ можно указать такое $h_1(k) > 0$, что для всех $h \in [0, h_1(k))$:

$$e^{-\frac{\lambda\delta}{\alpha}} \leqslant \left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)^k.$$

Поэтому

$$I = \left|\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha} - \left(f_2^T(t, x(t))\right)^+ v(t)\right| \leqslant K_2 \left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)^k + \bigvee_{t-\delta}^{t} \left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot). \quad (11)$$

Из последнего неравенства следует существование вектора $e(t)$, по норме меньшего единицы такого, что имеет место равенство:

$$\left(f_2^T(t, x(t))\right)^+ v(t) = \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha} + \left[K_2 \left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)^k + \bigvee_{t-\delta}^{t} \left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot)\right] e(t). \quad (12)$$

Нормальное псевдорешение $v_*(t)$ системы (12), согласно [7], записывается в виде:

$$v_*(t) = f_2^T(t, x(t)) \left(\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha} + \left[K_2 \left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)^k + \bigvee_{t-\delta}^{t} \left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot)\right] e(t)\right),$$

учитывая (3), окончательно получаем:

$$|v_*(t) - u_0(t)| \leqslant K_1 \left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)^k + M_2 \bigvee_{t-\delta}^{t} \left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot), \quad (13)$$

где $K_1 = M_2 K_2$.

Замечание 1 *Оценка (11) влечет существование константы $K_3 > 0$ такой, что для всех $t \in [t_0, T]$, $h \in [0, h_1(k))$ имеет место:*

$$\left|\frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha}\right| \leqslant K_3.$$

Замечание 2 *Рассмотрим задачу Коши (1) на временном промежутке, длиною $\delta :$ $[t_0, t_0 + \delta]$. Тогда оценка (13) принимает вид:*

$$|v_*(t) - u_0(t)| \leqslant K_{1,\delta} \left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)^k + M_2 \bigvee_{t-\delta}^{t} \left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot), \quad (14)$$

$$\textit{где } K_{1,\delta} = M_2 m M_v \frac{1}{\lambda}$$

Отметим, что для получения оценки (11) в данном случае нет необходимости разбивать промежуток интегрирования на две части, поэтому:

$$I \leqslant \left|\int_{t_0-\delta}^{t} Y_1'(t,\tau)\big(U(\tau) - U(t)\big) d\tau\right| + \left|\int_{t_0-\delta}^{t} Y_1'(t,\tau) U(t) d\tau - U(t)\right|.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в лемме 3, с использованием результата из работы [3] для оценки первого слагаемого и леммы 19 для второго, приходим к неравенству (14).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда информация о состоянии системы, используемая для построения приближения неизвестного управления $v_*(t)$, поступает с погрешностью. Оценим на промежутке $[t_i, t_{i+1})$ норму разности функций $u_0(t)$ и $u_h(t) = f_2^T(t_i, \xi(t_i))\dfrac{\xi(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha}$, для нахождения последней, в отличии от описанного выше способа построения $u_h(t)$ в $D_h^{(1)}$, не станем использовать процедуру проектирования на компакт, при этом результат разве лишь ухудшим.

Нетрудно убедиться, что при $t \in [t_i, t_{i+1})$ разность $u_0(t)$ и $u_h(t)$ может быть представлена в виде:

$$\begin{gathered} u_0(t) - u_h(t) = f_2^T(t, x(t))\frac{x(t) - \xi(t_i)}{\alpha} + f_2^T(t, x(t))\frac{w_h(t_i) - w_h(t)}{\alpha} + \\ + f_2^T(t, x(t))\frac{w_h(t) - w_0(t)}{\alpha} + \left(f_2^T(t, x(t)) - f_2^T(t_i, \xi(t_i))\right)\frac{\xi(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha} \end{gathered} \tag{15}$$

Поскольку для любой матрицы H имеет место $R(H^T H) = R(H^T)$, то в третьем слагаемом (15) можно перейти к проекциям $w_h^1(t)$ и $w_0^1(t)$ векторов $w_h(t)$ и $w_0(t)$ на подпространство $R\left(A(t, x(t))\right)$:

$$f_2^T(t, x(t))\frac{w_h(t) - w_0(t)}{\alpha} = f_2^T(t, x(t))\frac{w_h^1(t) - w_0^1(t)}{\alpha}, \tag{16}$$

где $w_h^1(t) = Pw_h(t)$, $w_0^1(t) = Pw_0(t)$.

В силу того, что для симметричных матриц возмущения собственных значений не превосходят матричных возмущений [9], то для точки (t, x) из $\frac{\lambda}{2}$ – окрестности траектории задачи (1) подпространство $R\left(A(t, x(t))\right)$ — постоянно.

С учетом последнего замечания, а также (15), (16), оценка нормы разности $u_0(t)$ и $u_h(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$ принимает вид:

$$\begin{gathered} |u_0(t) - u_h(t)| = \|f_2^T(t, x(t))\|\frac{|x(t) - \xi(t_i)|}{\alpha} + \|f_2^T(t, x(t))\|\frac{|w_h^{(1)}(t_i) - w_h^{(1)}(t)|}{\alpha} + \\ + \|f_2^T(t, x(t))\|\frac{|w_h^{(1)}(t) - w_0^{(1)}(t)|}{\alpha} + \left\|f_2^T(t, x(t)) - f_2^T(t_i, \xi(t_i))\right\|\frac{|\xi(t_i) - w_h^{(1)}(t_i)|}{\alpha} \end{gathered} \tag{17}$$

Поскольку $w_h(t)$ ограничено (а значит, существует константа M_w такая, что $|\xi(t_i) - w_h(t_i)| \leqslant M_w$), оценки для первого, второго и четвертого слагаемых правой части (17) легко выписываются, поэтому для получения окончательного результата остается рассмотреть норму разности проекций $w_h(t)$ и $w_0(t)$.

Лемма 4 *Пусть* $\Delta = h$. *Тогда существует* $h_3 > 0$ *такое, что для всех* $h \in [0, h_3)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$ *имеет место оценка:*

$$|w_h^{(1)}(t) - w_0^{(1)}(t)| \leqslant \frac{h}{\alpha} K_4,$$

где K_4 *выписывается в ходе доказательства.*

Доказательство. Проекция движения модели $w_h^{(1)}(t)$ в $D_h^{(1)}$ задается формулой

$$w_h^{(1)}(t) = w_h^{(1)}(t_i) + \left(Pf_1(t_i, \xi(t_i)) + A(t_i, \xi(t_i) \frac{\xi(t_i) - w_h^{(1)}(t_i)}{\alpha} \right) (t - t_i), \quad (18)$$

являющейся, по сути дела, реализацией метода Эйлера для задачи Коши

$$\left(w_0^{(1)}(t) \right)' = Pf_1(t, x(t)) + A(t, x(t)) \frac{x(t) - w_0^{(1)}(t)}{\alpha}, \quad w_0^{(1)}(t_0) = Px_0. \quad (19)$$

Для оценки нормы разности $w_0^{(1)}(t)$ и $w_h^{(1)}(t)$ воспользуемся стандартным подходом получения погрешности метода Эйлера, см. например [10].

Почти дословно повторяя рассуждения, приведенные в процитированной работе, приходим к следующему результату:

$$|w_h^{(1)}(t) - w_0^{(1)}(t)| \leqslant \frac{h}{\alpha} K_4,$$

где

$$K_4 = \frac{4m}{\lambda} \big(\alpha^2 L(1 + M_1 + M_2 M_v) + (M_1 + M_2 M_v)(\alpha M_2^2 + \alpha 2 L M_2 M_x +$$
$$+ M_w(2\alpha L M_2(1 + M_1 + M_2 M_v) + M_2^4) + M_2^2(\alpha M_1 + M_2^2 L) + m \big) +$$
$$+ \frac{2m}{\lambda} \left(2 L M_2 N_1 + M_1 M_1 + \alpha L \right).$$

Лемма 5 . *Пусть выполнены условия леммы 4,* $\alpha^2 \geqslant h$. *Тогда существуют положительная константа* K_5 *и* $h_4 > 0$ *такие, что для любых* $h \in [0, h_4)$ *и* $t \in [t_i, t_{i+1})$ *выполняется:*

$$|u_h(t)| \leqslant K_5.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\|f_2^T(t_i, x(t_i))\| \frac{|\xi(t_i) - w_h^{(1)}(t_i)|}{\alpha} \leqslant M_2 \Big(\frac{|\xi(t_i) - x(t_i)|}{\alpha} + \quad (20)$$
$$+ \frac{|x(t_i) - w_0(t_i)|}{\alpha} + \frac{|w_0^{(1)}(t_i) - w_h^{(1)}(t_i)|}{\alpha} \Big).$$

Тогда с учетом леммы 4, замечания 1, оценка нормы разности $u_0(t)$ и $u_h(t)$ (17) принимает вид:

$$|u_0(t) - u_h(t)| \leqslant \frac{M_2}{\alpha}\left(h(1 + (M_1 + M_2M_v)) + M_2\frac{h}{\alpha}\left(M_1 + M_2^2\frac{M_w}{\alpha}\right) + \right. \\ \left. + \frac{M_2}{\alpha}\frac{h}{\alpha}K_4 + M_2h\left(1 + M_1 + M_2M_v\right)\left(\frac{h}{\alpha} + K_3 + \frac{h}{\alpha^2}K_4\right) \leqslant \frac{h}{\alpha^2}D_1, \tag{21}$$

где

$$D_1 = \alpha M_2\left(h(1 + (M_1 + M_2M_v)) + M_2\left(\alpha M_1 + M_2^2M_w\right) + \right. \\ \left. + M_2K_4 + M_2\left(1 + M_1 + M_2M_v\right)\left(\alpha h + \alpha^2K_3 + K_4\right)\right..$$

Из последней оценки и ограниченности $u_0(t)$ следует справедливость леммы.

Теперь оценим норму разности $u_0(t)$ и $u_h(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$.

Лемма 6 *Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда существует положительная константа K_6 такая, что имеет место неравенство:*

$$|u_0(t) - u_h(t)| \leqslant \frac{h}{\alpha}K_6,$$

где константа K_6 выписывается конструктивно, в ходе доказательства леммы.

Доказательство. Пусть $g(t) = w_0^{(1)}(t) - w_h^{(1)}(t)$, где $w_0^{(1)}(t)$ и $w_h^{(1)}(t)$, задаются (18) и (19), соответственно. При этом функция $g(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$ является решением уравнения:

$$g'(t) = -A(t, x(t))\frac{g(t)}{\alpha} + \left(A(t_i, \xi(t_i)) - A(t, x(t))\right)\frac{\xi(t_i) - w_h^{(1)}(t_i)}{\alpha} + \\ + A(t, x(t))\frac{\xi(t_i) - x(t)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}A(t, x(t))\left(f_1(t_i, \xi(t_i)) + \right. \\ \left. + f_2(t_i, \xi(t_i))u_h\right)(t - t_i) + P\left(f_1(t_i, \xi(t_i) - f_1(t, x(t))\right), \tag{22}$$

причем $|g(t_0)| \leqslant h$.

Отметим, что существуют матрица – функция $S_1(t)$ и вектор – функции $S_i(t),\ i = 2, 3, 4$, по норме меньшие единицы такие, что при $t \in [t_i, t_{i+1})$ имеют место равенства:

$$A(t_i, \xi(t_i)) - A(t, x(t)) = 2LM_2h\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)S_1(t), \\ t - t_i = hS_2(t), \\ f_1(t_i, \xi(t_i)) - f_1(t, x(t)) = Lh\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)S_3(t), \\ \frac{1}{\alpha}(\xi(t_i) - x(t)) = \frac{1}{\alpha}h\left(1 + M_1 + M_2M_v\right)S_4(t).$$

С их помощью решение (22) представимо в виде:

$$g(t) = Y_1(t, t_0)g(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y_1(t, \tau)\Big[\frac{1}{\alpha}2LM_2h\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)S_1(\tau)(\xi(t_i) -$$

$$-w_h^{(1)}(t_i)) + A(\tau, x(\tau))\frac{1}{\alpha}h\left(1 + M_1 + M_2M_v\right)S_4(\tau) + \frac{1}{\alpha}A(\tau, x(\tau))\left(f_1(t_i, \xi(t_i)) + \right.$$

$$\left. + f_2(t_i, \xi(t_i))u_h\right)hS_2(\tau) + Lh\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)S_3(\tau)\Big]d\tau,$$

где $\|Y_1(t,\tau)\| \leqslant e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t-\tau)}$ в силу леммы 19.

Таким образом, для получения необходимой оценки требуется оценить правую часть последнего равенства. Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности:

1)первое слагаемое:

$$|Y_1(t,t_0)g(t_0)| \leqslant mh;$$

2) в силу того, что $\Big|\xi(t_i) - w_h(t_i)\Big| \leqslant M_w$, оценка второго слагаемого принимает вид:

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} Y_1(t,\tau)\frac{1}{\alpha}2LM_2h\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)S_1(\tau)(\xi(t_i) - w_h^{(1)}(t_i))d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant 2LM_2h\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)\frac{1}{\alpha}M_w\int\limits_{t_0}^{t}\|Y_1(t,\tau)\|d\tau \leqslant h\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)\frac{M_wm}{\alpha}\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(t-\tau)}d\tau \leqslant h\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)\frac{mM_w}{\alpha}\frac{\alpha}{\lambda} \leqslant h\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)m\frac{M_wm}{\lambda};$$

3) третье слагаемое:

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} Y_1(t,\tau)\frac{1}{\alpha}A(\tau, x(\tau))h\left(1 + M_1 + M_2M_v\right)S_4(\tau)d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{\alpha}M_2^2\left(1 + M_1 + M_2M_v\right)\frac{m\alpha}{\lambda} \leqslant hM_2^2\left(1 + M_1 + M_2M_v\right)\frac{m}{\lambda};$$

4) для оценки четвертого слагаемого воспользуемся результатом леммы 5:

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} Y_1(t,\tau)\frac{1}{\alpha}A(\tau, x(\tau))\left(f_1(t_i, \xi(t_i)) + f_2(t_i, \xi(t_i))u_h\right)hS_2(\tau)d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{\alpha}M_2^2(M_1 + M_2K_5)\frac{\alpha m}{\lambda} \leqslant hM_2^2(M_1 + M_2K_5)\frac{m}{\lambda};$$

5) пятое слагаемое:

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} Y_1(t,\tau)Lh\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)S_3(\tau)d\tau\Big| \leqslant hL\left(2 + M_1 + M_2M_v\right)\frac{m\alpha}{\lambda}.$$

Резюмируя эти оценки, окончательно получаем:

$$|g(t)| \leqslant hD_2, \tag{23}$$

где $$D_2 = m + (2 + M_1 + M_2M_v)\,\frac{mM_w}{\lambda} + M_2^2\,(1 + M_1 + M_2M_v)\,\frac{m}{\lambda} +$$

$$+ M_2^2(M_1 + M_2K_5)\frac{m}{\lambda} + L\,(2 + M_1 + M_2M_v)\,\frac{m\alpha}{\lambda}.$$

Неравенство (23) позволяет улучшить оценку (21) нормы разности (17), которая в данном случае принимает вид:

$$|u_0(t) - u_h(t)| \leqslant \frac{M_2}{\alpha}h\,(1 + (M_1 + M_2M_v)) + M_2\frac{h}{\alpha}\,(M_1 + M_2K_5) +$$
$$+ M_2\frac{h}{\alpha}D_2 + M_2h\,(1 + M_1 + M_2M_v)\left(\frac{h}{\alpha} + K_3 + \frac{hD_2}{\alpha}\right) \leqslant \frac{h}{\alpha}K_6,$$

где $$K_6 = M_2\,(1 + (M_1 + M_2M_v)) + M_2\,(M_1 + M_2K_5) + M_2D_2 +$$

$$+ M_2\,(1 + M_1 + M_2M_v)\,(h + \alpha K_3 + hD_2)\,.$$

Лемма 7 [11] *Пусть функция $q(\cdot)$ обладает ограниченной вариацией на промежутке $[t_0, T]$. Тогда*

$$\int\limits_{t_0}^{T} \bigvee_{t-\delta}^{t} q(\cdot)dt \leqslant \delta \bigvee_{t_0}^{T} q(\cdot).$$

Теорема 1 *Пусть выполнены условия лемм 3, 6, $\delta_1 = \lambda\delta$. Тогда справедлива оценка:*

$$\|v_*(t) - u_h(t)\|_{L_{1[t_0,T]}} \leqslant \frac{h}{\alpha}K_6(T - t_0) + K_1\left(\frac{\alpha}{\delta_1}\right)^k (T - t_0) +$$
$$+ \delta_1\frac{M_2}{\lambda}\bigvee_{t_0}^{T}\left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot) \tag{24}$$

Доказательство. Согласно леммам 3, 6 оценка нормы разности $v_*(t)$ и $u_h(t)$ имеет вид:

$$|v_*(t) - u_h(t)| \leqslant |v_*(t) - u_0(t)| + |u_0(t) - u_h(t)| \leqslant \tag{25}$$
$$\leqslant K_1\left(\frac{\alpha}{\lambda\delta}\right)^k + M_2\bigvee_{t-\delta}^{t}\left(f_2^T(\cdot)\right)^+ v(\cdot) + \frac{h}{\alpha}K_6.$$

Тогда, используя лемму 7, приходим к неравенству (24).

Замечание 3 *Оптимизация по порядку правой части (24) реализуется при* $\delta_1 = \alpha^{\frac{k}{k+1}}$, $\alpha = h^{\frac{k+1}{2k+1}}$. *Это означает, что порядок верхней оценки точности* $D_h^{(1)}$ *при выборе достаточно большого значения* k *может быть сделан сколь угодно близким к* $1/2$, *а этот порядок, согласно* [11], *не может быть улучшен.*

При получении приведенной выше верхней асимптотической оценки точности для $D_h^{(1)}$ существенно использовалась строгая отделимость от нуля $\lambda_1(t)$ при $t \in [t_0, T]$, которая гарантировалась постоянством $R(A(t, x(t)))$. В случае изменения его размерности в точке $t_c \in (t_0, T)$ непрерывность $f_2(t, x(t))$ с необходимостью влечет равенство нулю хотя бы одного одностороннего предела для $\lambda_1(t)$ при $t \to t_c$ и, следовательно, описанный метод получения оценок становится неприменимым.

Рассмотрим случай, когда известная априори точка t_c (единственная на $[t_0, T]$) является точкой разрыва $f_2(t, x(t))$ такой, что $\lambda_1(t) > \lambda > 0$ при $t \in [t_0, T]$. Тогда, применяя $D_h^{(1)}$ на каждом из промежутков $[t_0, t_c]$ и $[t_c, T]$, получаем результат с тем же асимптотическим порядком точности, что и ранее. Аналогичное утверждение справедливо и для конечного числа таких точек.

В случае, когда информация о моментах изменения подпространства собственных векторов отсутствует, предложенный подход становится невозможным. В этой ситуации предлагается модификация $D_h^{(2)}$, суть которой коротко состоит в следующем:

— при $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ реализация алгоритма $D_h^{(2)}$ совпадает с реализацией $D_h^{(1)}$;

— в случае $t \geqslant t_0 + \delta$ приближение $u_h^{(2)}$ на $[t_i, t_{i+1})$ является результатом действия $D_h^{(1)}$ на промежутке $[t_{i+1} - \delta, t_{i+1})$ с использованием процедуры проектирования на компакт. Очевидно, что в данной ситуации начальное условие системы–модели будет $w_h(t_{i+1} - \delta) = \xi(t_{i+1} - \delta)$.

Таким образом, количество систем–моделей на промежутке

– $[t_0, t_0 + \delta)$ возрастает на единицу на каждом шаге разбиения и достигает величины $\left[\frac{\delta}{\Delta}\right] + 1$;

– $[t_0 + \delta, T - \delta)$ остается равным достигнутому числу;

– $[T - \delta, T]$ уменьшается на единицу, начиная с момента $T - \delta$, на каждом шаге.

Имеет место

Теорема 2 *Пусть точки, в которых происходит смена ранга матрицы* $f_2(\cdot)$, *являются внутренними, а также конечны их число и вариация* $f_2(\cdot)$ *в каждой из них. На каждом промежутке разбиения, задаваемого ими на* $[t_0, T]$ *выполнены условия теоремы 1. Тогда асимптотический порядок точности* $D_h^{(2)}$ *может быть сделан сколь угодно близким к* $\frac{1}{2}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда имеется одна точка смены размерности подпространства$R(A(\cdot))$(обозначим ее t_c).

Тогда справедливо неравенство

$$\|v_*(t) - u_h(t)\|_{L_{1[t_0,T]}} \leqslant \|v_*(t) - u_h(t)\|_{L_{1[t_0,t_c-\delta)}} + \tag{26}$$
$$+\|v_*(t) - u_h(t)\|_{L_{1[t_c-\delta,t_c+\delta)}} + \|v_*(t) - u_h(t)\|_{L_{1[t_c+\delta,T]}}$$

Необходимые оценки первого и третьего слагаемых из правой части последнего неравенства следуют из (25), с учетом замечания 2 и лемм 6, 7.

Для второго слагаемого, в силу использования процедуры проектирования на компакт, имеет место:

$$\|v_*(t) - u_h(t)\|_{L_{1[t_c-\delta,t_c+\delta)}} = \int_{t_c-\delta}^{t_c+\delta} |v_*(t) - u_h(t)| dt \leqslant 4M_v\delta.$$

Применение правила согласования параметров из замечания (3) приводит к требуемому результату.

Литература

[1] Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе. // Техн. Кибернетика. Изв. АН СССР. 1983. № 2. – с. 51–60.

[2] Вдовин А.Ю. Оценки погрешности в задаче восстановления управления.// Задачи позиционного моделирования. Свердловск. Изд-во УНЦ АН СССР, 1986. – с. 3–11.

[3] Максимов В.И., Пандолфи Л.,О реконструкции неограниченных управлений в нелинейных динамических системах. Прикл. математика и механика, Т.65, №. 3. 2001. – с. 385–390.

[4] Мартьянов А.С., Оценки скорости сходимости одного алгоритма динамической реконструкции,Труды ИММ, Екатеринбург:УрОРАН, Т.12, №. 2. 2006. – с. 119–128.

[5] Алберт А., Регрессия, псевдоинверсия и реккурентное оценивание. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука."1977. – 224 с.

[6] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука."1970. – 536 с.

[7] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления.М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. – 320 с.

[8] Stewart G.W. On the continuity of the generalized inverces.// SIAM G. on Appl.Math. V.17, № 1. 1969. – p. 33–45.

[9] Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир. 1983. – 384 с.

[10] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1987. – 600 с.

[11] Вдовин А.Ю., Ким А.В., Рублева С.С. Об асимптотической точности в L_1 одного динамического алгоритма восстановления возмущения. // Труды ИММ, Екатеринбург: УрО РАН 2006. Т. 12, №. 2. с. 18–26.

Вервейко Н.Д., Сумец П.П.

Математическое моделирование состояния газа с учетом релаксации при сверхзвуковом течении.

При рассмотрении процесса движения газа со сверхзвуковыми скоростями возникают поверхности слабого и сильного разрывов, на которых происходит скачек параметров среды. Если полагать, что изменение параметров среды происходит не скачком на поверхности, а непрерывно внутри некой переходной зоны, то возникает необходимость описать этот переходный процесс.

При движении с большими скоростями обычно вязкостью газа пренебрегают, а сам газ предполагается политропным с уравнением состояния [2]

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = const, \tag{1}$$

где $\gamma = c_p/c_v$ - отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме. Это уравнение состояния получено в предположении выполнения условия локального термодинамического равновесия. То есть считается, что при движении газа происходящие локальные изменения плотности, давления и других параметров газа протекают настолько быстро, что в каждый рассматриваемый момент времени газ находится в неком равновесном состоянии. Однако, при рассмотрении процесса в масштабах времени, сравнимых с временем переходного процесса (время релаксации) принцип локального равновесия перестает действовать. Такой случай соответствует движению газа внутри переходной зоны, толщина которой сравнима с длиной свободного пробега молекул и тем меньше, чем больше интенсивность волны. В этом случае за рассматриваемое время переходный процесс не успевает завершиться, и среда находится в неравновесном состоянии.

Пусть среда слабо отклоняется от состояния равновесия (т.е. действует линейная теория). Поскольку рассматриваемые масштабы сравнимы с длиной свободного пробега молекул, то воспользуемся уравнениями молекулярной теории газов.

Рассмотрим движение элемента объема газа с характерным линейным размером $L \times L \times l$, где l - характерная длина зоны релаксации, которая сравнима с длиной свободного пробега молекул. Пусть $f(t, r, \Gamma)$ - функция распределения молекул газа в их фазовом пространстве, где t - время, $r = (x, y, z)$ - координаты центра инерции молекулы, а Γ - все остальные переменные, от которых зависит f. Величины Γ меняются только при столкновении молекул, в то время как координаты x, y, z меняются в течение ее свободного движения. Интеграл

$$\int f\left(t, r, \Gamma\right) d\Gamma = N\left(t, r\right) \tag{2}$$

есть плотность пространственного распределения частиц газа; произведение $\rho = mN$ есть соответственно массовая плотность газа, m - масса молекулы.

Предоставленный самому себе газ стремится перейти в равновесное состояние, что согласно кинетической теории газов, должно сопровождаться изменением энтропии. Как известно, энтропия идеального газа, находящегося в неравновесном макроскопическом состоянии, равна [1]

$$s = \int f\left(1 - \ln f\right) d\Gamma dV \tag{3}$$

где dV малый объем, но который содержит достаточно много молекул газа, чтобы можно было считать функцию $N(r,t)$ макроскопической. Рассмотрим изменение энтропии, связанное со столкновительной частью взаимодействия молекул. Дифференцирование (3) по времени дает

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\int \frac{\partial f}{\partial t} \ln f d\Gamma dV \tag{4}$$

В равновесном состоянии $f = f_0 = const$ и $\partial f / \partial t = 0$, а выражение (4) даст постоянство энтропии или изэнтропическое движение.

Рассмотрим слабо неоднородный газ, у которого отклонения f от своего равновесного значения f_0 малы, то есть $f = f_0(1+\delta)$, где $\delta = l/L$ - малая поправка. Чтобы задать $\partial f / \partial t$, надо знать характер изменения функции распределения благодаря столкновениям молекул, пока не установилось равновесное состояние. Определить это возможно лишь в случае подробного рассмотрения столкновения отдельных молекул. Мы ограничимся лишь качественной картиной и положим, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx -\frac{f - f_0}{\tau} \approx -\frac{f_0 \delta}{\tau} \tag{5}$$

Написав в числителе $f - f_0$ мы тем самым учли, что $\partial f / \partial t$ обращается в ноль для равновесной функции. Знак минус выражает тот факт, что столкновения стремятся уменьшить отклонение функции распределения от равновесной. В этом смысле величина τ играет роль времени релаксации для установления равновесия в каждом элементе объема газа. Тогда, из выражения (4) получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial s}{\partial t} = -\int \frac{\partial f}{\partial t} \ln\left[f_0\left(1+\delta\right)\right] d\Gamma dV = \\ -\int \ln f_0 \frac{\partial f}{\partial t} d\Gamma dV - \int \ln\left(1+\delta\right) \frac{\partial f}{\partial t} d\Gamma dV\end{gathered} \tag{6}$$

Первый интеграл обращается в ноль тождественно [1], а во втором пишем в ввиду малости δ, $\ln(1+\delta) \approx \delta$. С учетом (5) получаем

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \int \frac{\delta^2}{\tau} f_0 d\Gamma dV \tag{7}$$

Для идеального газа воспользуемся известными термодинамическими соотношениями [1]

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c_v}{p}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c_p}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\frac{p^{c_v}}{\rho^{c_p}}\right) \tag{8}$$

Полагая, что $\delta = const$, из (2), (7) и (8) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\frac{p^{c_v}}{\rho^{c_p}}\right) = \frac{\delta^2}{\tau}\int f_0 d\Gamma dV = \frac{\delta^2}{\tau}\int N dV = \frac{\delta^2}{\tau}\int\frac{\rho dV}{m} \tag{9}$$

Интегрируя по времени, получаем

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C_0 \exp\left(\delta^2\int\frac{\rho dV dt}{m\tau}\right) \tag{10}$$

Здесь $dV = dldLdL$ - элементарный объем, соответствующий нашей задаче. Поскольку $\delta^2 dV = dldldl = d\text{v}$, то $d\text{v}$ есть представительный объем, соответствующий релаксируемой зоне. Обозначим $n = t/\tau$ - число тактов релаксации, соответствующих нашей задаче. Тогда

$$\int\frac{\delta^2\rho dV dt}{m\tau} = \int\frac{\rho d\text{v}}{m}dn = \int\omega(n)\,dn \tag{11}$$

$$\text{где}\quad \omega(n) = \int\limits_V\frac{\rho dv}{m} = \int\limits_V\frac{dM}{m}$$

есть относительное число молекул, участвующих в процессе релаксации. Если предположить, что изменение концентрации релаксирующих молекул с каждым тактом релаксации убывает по экспоненциальному закону $\omega(n) = e^{-\alpha n}$, где α - скорость процесса релаксации, то получим

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C_0\exp\left(\int e^{-\alpha n}dn\right) \tag{12}$$

Интегрируя по n от 0 до ∞, получаем

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C_0\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \tag{13}$$

Выражение (13) дает связь давления и плотности в зависимости от скорости протекающего процесса релаксации. Если релаксация наступает мгновенно, то $\alpha = \infty$ и из (13) вытекает классическое соотношение (1) для локально равновесного процесса. Учет процесса релаксации дает большую величину скорости звука c по сравнению с равновесным значением. Действительно, так как $c^2 = \partial p/\partial\rho$, то из (13) и (1) следует, что скорости отличаются на константу $\exp(1/2\alpha)$.

Литература

1. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика (Серия: "Теоретическая физика", том X) - М: Физматлит, 2002 - 536 с.
2. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. - М.: Физматлит, 2003. - 496 с.

Воронов А.М., Трубникова А.Ю.

Метод чебышевской аппроксимации в задаче двух тел

В данной работе разработан аппроксимативный метод исследования дифференциального уравнения для радиальной составляющей невозмущенного кеплеровского движения, основанный на аппроксимации в равномерной метрике функций r^{-2}, r^{-3}, присутствующих в этом уравнении.

Как известно [1], дифференциальное уравнение для радиальной составляющей $r(t)$ невозмущенного кеплеровского движения имеет вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi = -\frac{\mu}{r^2}, \tag{1}$$

где (r, λ, φ) — сферические координаты движущейся точки, μ — некоторая постоянная. Если воспользоваться законом сохранения площадей

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\lambda}\cos^2\varphi\right) = 0, \tag{2}$$

и за плоскость вращения принять плоскость Oxy, то $\varphi = 0$, т.е. $\cos\varphi = 1$ и система уравнений (1)-(2) примет следующий вид

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\lambda}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \\ r^2\dot{\lambda} = q, \end{cases} \tag{3}$$

где $q = \mathrm{const}$. Выражая $\dot{\lambda}$ из второго уравнения системы (3) и подставляя в первое уравнение, получаем

$$\ddot{r} - r\left(\frac{q}{r^2}\right)^2 = -\frac{\mu}{r^2} \tag{4}$$

и, таким образом, уравнение (4) приводится к виду

$$\ddot{r} = \frac{q^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}. \tag{5}$$

Классический метод исследования [2] уравнения (5) состоит в получении зависимости $t = t(r)$ и последующего изучения свойств этой зависимости. Функцию $r = r(t)$ получают приближенно, используя приближенное решение уравнения Кеплера, выражающего соотношение между временем t и эксцентрической аномалией $E = E(t)$ [3]:

$$E(t) = \frac{180^0}{\pi}e\sin E(t) + 360^0 \cdot \frac{t - t_0}{T}, \tag{6}$$

где e — эксцентриситет эллиптической орбиты, T — период обращения по орбите.

В данной статье предлагается метод получения зависимости $r = r(t)$, основанный на аппроксимации функций r^{-2}, r^{-3} в равномерной метрике на отрезке $r \in [r_1, r_2]$. Для этого прежде всего получим соответствующие выражения для многочленов наилучшего приближения.

Лемма 1. *Многочленом наилучшего приближения первой степени в равномерной (чебышевской) метрике для функции* $g(r) = r^{-2}$, *определенной на отрезке* $[r_1, r_2]$ $(0 < r_1 < r_2)$, *является многочлен*

$$P_1(r) = -\frac{r_1 + r_2}{(r_1 r_2)^2} \cdot r + \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{2(r_1 r_2)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{1/3}(r_1 + r_2)^{2/3}}{(r_1 r_2)^{4/3}}. \qquad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся алгоритмом, приведенным в монографии [4], для этого рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} d + a_0 + a_1 r_3 = r_3^{-2}, \\ d + a_0 + a_1 r_4 = r_4^{-2}, \\ d + a_0 + a_1 r_5 = r_5^{-2}, \; r_1 \le r_3 < r_4 < r_5 \le r_2. \end{cases} \qquad (8)$$

Считая d, a_0 и a_1 неизвестными, выразим d (а это после максимизации по переменным r_3, r_4, r_5 будет величина максимального уклонения, т.е.

$$d = \max_{r \in [r_1, r_2]} \left| \frac{1}{r^2} - a_0 - a_1 r \right|)$$

через r_3, r_4, r_5 :

$$d = \frac{r_5 - r_4}{2r_3^2(r_5 - r_3)} - \frac{1}{2r_4^2} + \frac{r_4 - r_3}{2r_5^2(r_5 - r_3)}. \qquad (9)$$

Далее найдем частную производную

$$\frac{\partial d}{\partial r_3} = -\frac{r_5 - r_4}{2(r_3 r_5)^2}\left(1 + \frac{2r_5}{r_3}\right) < 0. \qquad (10)$$

Неравенство (10) означает, что максимальное значение d по переменной r_3 при фиксированных r_4 и r_5 достигается при $r_3 = r_1$. Аналогично, максимальное значение d по переменной r_5 достигается при $r_5 = r_2$.

Подставим в правую часть равенства (9) $r_3 = r_1, r_5 = r_2$ и найдем производную по переменной r_4 :

$$\frac{\partial d}{\partial r_4} = \frac{1}{2(r_1 r_2 r_4)^2}\left[\frac{2(r_1 r_2)^2}{r_4} - (r_1 + r_2) r_4^2\right]. \qquad (11)$$

Приравнивая правую часть равенства (11) к нулю, получаем, что

$$r_4 = \left(\frac{2(r_1 r_2)^2}{r_1 + r_2}\right)^{1/3}. \qquad (12)$$

В этой точке правая часть равенства (11) меняет знак с «+» на «—», т.е. величина d достигает на множестве $r_1 \le r_3 < r_4 < r_5 \le r_2$ своего абсолютного максимума.

Подставляя найденное значение r_4 в выражение (9), получаем

$$d_{\max} = \frac{r_2 - r_4}{2r_1^2 (r_2 - r_1)} + \frac{r_4 - r_1}{2r_2^2 (r_2 - r_1)} - \frac{1}{2r_4^2} =$$

$$= \frac{r_2}{2r_1^2 (r_2 - r_1)} - \frac{r_1}{2r_2^2 (r_2 - r_1)} + r_4 \left[\frac{1}{2r_2^2 (r_2 - r_1)} - \frac{1}{2r_1^2 (r_2 - r_1)}\right] - \frac{1}{2r_4^2} =$$

$$= \frac{1}{2(r_2 - r_1)} \cdot \frac{(r_2 - r_1)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{(r_1 r_2)^2} + \frac{2^{1/3} (r_1 r_2)^{2/3}}{(r_1 + r_2)^{1/3}} \cdot \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{2 (r_1 r_2)^2 (r_2 - r)} -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{(r_1 + r_2)^{2/3}}{2^{2/3} (r_1 r_2)^{4/3}} = \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{2(r_1 r_2)^2} - \frac{2^{1/3} (r_1 + r_2)^{2/3}}{2 (r_1 r_2)^{4/3}} - \frac{2^{1/3} (r_1 + r_2)^{2/3}}{4 (r_1 r_2)^{4/3}} =$$

$$= \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{2(r_1 r_2)^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{1/3} (r_1 + r_2)^{2/3}}{(r_1 r_2)^{4/3}}. \tag{13}$$

Подставляя найденное значение $d_{\max}$ в систему (8), получаем

$$a_1 = \frac{1}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) = \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{(r_1 r_2)^2}; \tag{14}$$

$$a_0 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{r_1 (r_1 + r_2)}{(r_1 r_2)^2} - \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{2(r_1 r_2)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{1/3} (r_1 + r_2)^{2/3}}{(r_1 r_2)^{4/3}} =$$

$$= \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{(r_1 r_2)^2} - \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{2(r_1 r_2)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{1/3} (r_1 + r_2)^{2/3}}{(r_1 r_2)^{4/3}} =$$

$$= \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{2(r_1 r_2)^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{1/3} (r_1 + r_2)^{2/3}}{(r_1 r_2)^{4/3}}. \tag{15}$$

Лемма доказана.

Приведем выражения (13)-(15) к более удобному виду. Пусть $r_1 = a(1-e)$, $r_2 = a(1+e)$,где $e \in (0,1)$, тогда

$$d_{\max} = \frac{a^2 \left[(1-e)^2 + 1 - e^2 + (1+e)^2\right]}{2a^4 (1-e^2)^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{1/3} a^{2/3} 2^{2/3}}{a^{8/3} (1-e^2)^{4/3}} =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{3 + e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^2 (1-e^2)^{4/3}} =$$

$$
= \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{\left(1-e^2\right)^{4/3}} \left[\frac{3+e^2}{\left(1-e^2\right)^{2/3}} - 3 \right]. \tag{16}
$$

Далее

$$
a_1 = -\frac{a\left(1-e+1+e\right)}{a^4\left(1-e^2\right)^2} = -\frac{2}{a^3\left(1-e^2\right)^2}; \tag{17}
$$

$$
a_0 = \frac{a^2\left(3+e^2\right)}{2a^4\left(1-e^2\right)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^2\left(1-e^2\right)^{4/3}} = \frac{1}{2a^2\left(1-e^2\right)^{4/3}} \left[\frac{3+e^2}{\left(1-e^2\right)^{2/3}} + 3 \right]. \tag{18}
$$

Приведем следующий пример: если в выражении (16) положить

$$
a = 149,59787 \cdot 10^6 \text{ км}, \quad e = 0,016709,
$$

т.е. взять в качестве a одну астрономическую единицу и в качестве $e-$ эксцентриситет эллиптической орбиты Земли, то

$$
d_{\max} = 1,872392387 \cdot 10^{-20} \left(\frac{1}{\text{км}^2} \right).
$$

Лемма 2. *Многочленом наилучшего приближения первой степени в равномерной (чебышевской) метрике для функции* $g\left(r\right) = r^{-3}$ *на отрезке* $[r_1, r_2]$ $(0 < r_1 < r_2)$ *является многочлен*

$$
Q_1\left(r\right) = -\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{\left(r_1 r_2\right)^3} \cdot r + \frac{\left(r_1+r_2\right)\left(r_1^2+r_2^2\right)}{2\left(r_1 r_2\right)^3} +
$$

$$
+ \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)^{3/4}}{\left(r_1 r_2\right)^{9/4}}, \tag{19}
$$

причем максимальное уклонение $d_{\max}$ имеет вид

$$
d_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(r_1+r_2\right)\left(r_1^2+r_2^2\right)}{\left(r_1 r_2\right)^3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)^{3/4}}{\left(r_1 r_2\right)^{9/4}}. \tag{20}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству леммы 1.

Приведем правую часть равенства (19) к более удобному виду, считая, что $r_1 = a\left(1-e\right), r_2 = a\left(1+e\right)$. Тогда

$$
a_1 = -\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{\left(r_1 r_2\right)^3} = -\frac{3+e^2}{a^4\left(1-e^2\right)^3}; \tag{21}
$$

$$
a_0 = \frac{2a^3\left[\left(1-e\right)^2 + \left(1+e\right)^2\right]}{2a^6\left(1-e^2\right)^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4} a^{3/2}\left(3+e^2\right)^{3/4}}{a^{9/2}\left(1-e^2\right)^{9/4}} =
$$

$$
= \frac{1}{a^3} \cdot \frac{2\left(1+e^2\right)}{\left(1-e^2\right)^3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4}\left(3+e^2\right)^{3/4}}{a^3\left(1-e^2\right)^{9/4}}. \tag{22}
$$

Аналогично

$$d_{\max} = \frac{2}{a^3 \left(1-e^2\right)^{9/4}} \left[\frac{1+e^2}{\left(1-e^2\right)^{3/4}} - \frac{3^{1/4} \left(3+e^2\right)^{3/4}}{3} \right]. \tag{23}$$

Вернемся теперь к уравнению (5). В этом уравнении $q-$ удвоенная секториальная скорость, т.е. $q^2 = pk^2 \left(1+m\right) = a \left(1-e^2\right) k^2 \left(1+m\right)$, где $p-$ орбитальный параметр [4], который связан [5] с секториальной скоростью c равенством

$$p = \frac{c^2}{k^2 \left(1+m\right)}, \tag{24}$$

где $k^2 = 2,959122083 \cdot 10^{-4}$ — квадрат гауссовой гравитационной постоянной, m — масса тела (планеты или кометы) в долях солнечной массы, $\mu = k^2 \left(1+m\right)$.

Тогда уравнение, аппроксимирующее уравнение (5), примет вид

$$\ddot{r} = -\frac{k^2 \left(1+m\right) \left(1+e^2\right)}{a^3 \left(1-e^2\right)^2} \cdot r + \frac{k^2(1+m)}{a^2} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1+3e^2}{2\left(1-e^2\right)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4} \left(3+e^2\right)^{3/4}}{\left(1-e^2\right)^{5/4}} - \frac{3}{2\left(1-e^2\right)^{4/3}} \right]. \tag{25}$$

Таким образом, уравнение (25) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{r}\left(t\right) + \omega^2 r\left(t\right) = b, \tag{26}$$

в котором

$$\omega^2 = \frac{k^2 \left(1+m\right) \left(1+e^2\right)}{a^3 \left(1-e^2\right)^2}, \tag{27}$$

$$b = \frac{k^2 \left(1+m\right)}{a^2} \left[\frac{1+3e^2}{2\left(1-e^2\right)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4} \left(3+e^2\right)^{3/4}}{\left(1-e^2\right)^{5/4}} - \frac{3}{2\left(1-e^2\right)^{4/3}} \right].$$

Общее решение такого уравнения имеет вид

$$r\left(t\right) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{b}{\omega^2}, \tag{28}$$

где c_1 и A_2- постоянные, определяемые начальными или краевыми условиями.

Далее найдем решение следующей краевой задачи:

$$c_1 \cos \omega t_0 + c_2 \sin \omega t_0 = r\left(t_0\right) - \frac{b}{\omega^2}, \tag{29}$$

$$c_1 \cos \omega t_1 + c_2 \sin \omega t_1 = r\left(t_1\right) - \frac{b}{\omega^2}. \tag{30}$$

Применяя правило Крамера, получаем

$$c_1 = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\sin\omega t_1}{\sin\omega(t_1 - t_0)} - \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\sin\omega t_0}{\sin\omega(t_1 - t_0)}; \tag{31}$$

$$c_2 = \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\cos\omega t_0}{\sin\omega(t_1 - t_0)} - \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\cos\omega t_1}{\sin\omega(t_1 - t_0)}. \tag{32}$$

Теперь из равенства (28) получим решение краевой задачи (29)-(30):

$$r(t) = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\sin\omega t_1}{\sin\omega(t_1 - t_0)} \cdot \cos\omega t - \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\sin\omega t_0}{\sin\omega(t_1 - t_0)} \cdot \cos\omega t +$$

$$+ \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\cos\omega t_0}{\sin\omega(t_1 - t_0)} \cdot \sin\omega t - \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\cos\omega t_1}{\sin\omega(t_1 - t_0)} \cdot \sin\omega t + \frac{b}{\omega^2} =$$

$$= \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\sin\omega t_1 \cos\omega t - \cos\omega t_1 \sin\omega t}{\sin\omega(t_1 - t_0)} +$$

$$+ \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\cos\omega t_0 \sin\omega t - \sin\omega t_0 \cos\omega t}{\sin\omega(t_1 - t_0)} + \frac{b}{\omega^2} =$$

$$= \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\sin\omega(t_1 - t)}{\sin\omega(t_1 - t_0)} + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\sin\omega(t - t_0)}{\sin\omega(t_1 - t_0)} + \frac{b}{\omega^2}. \tag{33}$$

Таким образом, основной результат статьи заключается в следующем.

Теорема. *Пусть тело массы m (выраженной в долях солнечной массы) обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите с большой полуосью a, тогда зависимость $r(t)$ расстояния тела до Солнца, полученная по результатам двух наблюдений $r(t_0)$и $r(t_1)$имеет вид:*

$$r(t) = \left[r(t_0) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\sin\omega(t_1 - t)}{\sin\omega(t_1 - t_0)} + \left[r(t_1) - \frac{b}{\omega^2}\right] \frac{\sin\omega(t - t_0)}{\sin\omega(t_1 - t_0)} + \frac{b}{\omega^2}, \tag{34}$$

где

$$\frac{b}{\omega^2} = a\left[\frac{1 + 3e^2}{2(1 + e^2)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3^{1/4}(3 + e^2)^{3/4}(1 - e^2)^{3/4}}{1 + e^2} - \frac{3(1 - e^2)^{2/3}}{2(1 + e^2)}\right], \tag{35}$$

e — эксцентриситет эллиптической орбиты,

$$\omega^2 = \frac{k^2(1 + m)(1 + e^2)}{a^3(1 - e^2)^2},$$

$k^2 = 2,959122083 \cdot 10^{-4}\,(1 a.e.)^3$ сут.$^{-2}$; t — время, выраженное в сутках.

Литература

[1] Дубошин Г. Небесная механика.— М., 1975.— С. 429.

[2] Ландау Л.Д. Краткий курс теоретической физики. — Книга 1.— М., 1969. — С. 43.

[3] Монтенбрук О. Астрономия на персональном компьютере.— С.-П., 2002. — С. 73.

[4] Трубников Ю. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями. — М., 2002.—С.33.

[5] Дубяго А.Д. Определение орбит. — М.-Л., 1949. — С. 36.

Головченко Е.В.

Асимптотический анализ линейной системы дифференциальных уравнений с особой точкой

Рассмотрим задачу о построении общего асимптотического решения сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x,\varepsilon) z \tag{1}$$

с иррегулярной особой точкой $x = \infty$, где h, g – целые неотрицательные числа, $z(x,\varepsilon)$ – искомый n-мерный вектор, а независимая переменная x и малый параметр ε определены в секторах $S = \{|x| > a, \alpha \leqslant \arg x \leqslant \beta\}$, $\pi_\varepsilon = \{0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0, \gamma \leqslant \arg \varepsilon \leqslant \delta\}$ соответственно. Предполагается, что $(n \times n)$-матрица $A(x,\varepsilon)$ допускает асимптотическое разложение

$$A(x,\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x^{-i} \varepsilon^j A_{ij},$$

при $x \to \infty$, $\varepsilon \to 0$.

Построение асимптотического решения системы (1) зависит от кратности собственных значений предельной матирицы A_{00}. Простой спектр исследован в работе [1]. В [2] рассмотрен случай, когда матрица A_{00} имеет кратное собственное значение, которому отвечает один элементарный делитель или несколько элементарных делителей одинаковой кратности, где установлено, что решения системы (1) в этом случае можно построить в виде асимптотических разложений по дробным степеням параметра и отношения независимой переменной и параметра. Эти результаты развиваются в работе [3] с применением диаграмм Ньютона, где более подробно исследуется случай одномерного ветвления, когда кратному собственному значению соответствует элементарный делитель такой же кратности. В данной работе методы [3] применяются для изучения случая многомерного ветвления.

Будем предполагать, что предельная матрица A_{00} имеет собственное значение λ_0 кратности n, которому отвечает r элементарных делителей кратности p $(rp = n)$. Обозначим через φ_i, $i = \overline{1,r}$, соответствующие собственные векторы матрицы A_{00}, а через ψ_i, $i = \overline{1,r}$,– элементы нуль-пространства матрицы $(A_{00} - \lambda_0 E)^*$, сопряженной матрице $A_{00} - \lambda_0 E$. Последние определим так [4], чтобы выполнялись соотношения

$$\left(H^{p-1}\varphi_i, \psi_j\right) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,r}, \tag{2}$$

где H – полуобратная матрица к матрице $(A_{00} - \lambda_0 E)$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Следуя [4], введем оператор проектирования Q, отображающий n-мерное унитарное пространство U, в котором рассматривается задача, на подпространство U_0, являющееся линейной оболочкой векторов φ_i, $i = \overline{1, r}$:

$$Qu = \sum_{i=1}^{r} (u, \psi_i)\varphi_i. \tag{3}$$

Исходя из (2), легко убедиться, что если $u \in U_0$, то

$$QH^{i-1}u = 0, \quad \text{при} \quad i < p, \quad QH^{p-1}u = u.$$

Решения системы (1) будем искать в виде

$$z(x, \varepsilon) = v(x, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{x_0}^{x} x^g \left(\lambda_0 + \lambda(x, \varepsilon) dx\right)\right), \tag{4}$$

где $v(x, \varepsilon)$, $\lambda(x, \varepsilon)$ – искомые n-мерный вектор и скалярная функция.

Подставив (4) в систему (1), получим уравнение

$$\left(A_{00} - \lambda_0 E\right) v = \left(\lambda(x, \varepsilon) + \varepsilon^h x^g \frac{d}{dx} - \sum_{i+j \geq 1} x^{-i} \varepsilon^j A_{ij}\right) v.$$

Вектор $v(x, \varepsilon)$ будет его решением тогда и только тогда, когда

$$Q\left(\lambda(x, \varepsilon) + \varepsilon^h x^g \frac{d}{dx} - \sum_{i+j \geq 1} x^{-i} \varepsilon^j A_{ij}\right) v = 0. \tag{5}$$

При выполнении этого условия будем иметь

$$v(x, \varepsilon) = \left(\lambda(x, \varepsilon) H + \varepsilon^h x^g H \frac{d}{dx} - \sum_{i+j \geq 1} x^{-i} \varepsilon^j H A_{ij}\right) v(x, \varepsilon) + u(x, \varepsilon),$$

где $u(x, \varepsilon)$ – вектор из подпространства U_0, откуда

$$\left(E - \lambda(x, \varepsilon) H - \varepsilon^h x^g H \frac{d}{dx} + \sum_{i+j \geq 1} x^{-i} \varepsilon^j H A_{ij}\right) v(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon).$$

Этому соотношению можно формально удовлетворить, представив вектор $v(x, \varepsilon)$ в виде разложения

$$v(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda(x, \varepsilon) H + \varepsilon^h x^g H \frac{d}{dx} - \sum_{i+j \geq 1} x^{-i} \varepsilon^j H A_{ij}\right)^k u(x, \varepsilon). \tag{6}$$

Подставив (6) в (5) и перегруппировав слагаемые таким же образом, как в [3], получим

$$\left(\lambda^p + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r+s=1}^{\infty} x^{-r} \varepsilon^s Q \widetilde{L}_{krs} \left[\lambda^k\right]\right) u = 0, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{L}_{0rs}=\sum_{j=1}^{r+s}(-1)^j\left(\widetilde{P}_{0j}^{r,s}(H,HA)+\sum_{p=1}^{j-1}\widetilde{R}_{p,j-p}^{r-p(g+1),s-ph}(H,HA)\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\min\left\{\left[\frac{r}{g}\right],\left[\frac{s}{h}\right]\right\}}\sum_{j=0}^{r+s-m(h+g)}(-1)^j\left(\widetilde{P}_{m-1,j}^{r-mg,s-mh}(H,HA)+\right.$$

$$\left.\sum_{p=1}^{j-1}\widetilde{R}_{p+m-1,j-p}^{r-p(g+1)-mg,s-(p+m)h}(H,HA)\right)H\prod_{n=0}^{m-1}\left(-ngx^{-1}+D\right),\quad r+s\geq 1;$$

$$\widetilde{L}_{krs}\left[\lambda^k\right]=\sum_{i=1}^{\min\left\{\left[\frac{r}{g}\right],\left[\frac{s}{h}\right]\right\}}\sum_{j=0}^{r+s-i(h+g)}(-1)^jD^i\left[\lambda^k\right]\left(\widetilde{P}_{k+i,j}^{r-ig,s-ih}(H,HA)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{j-1}\widetilde{R}_{i+k+p,j-p}^{r-ig-p(g+1),s-(i+p)h}(H,HA)\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=m}^{\min\left\{\left[\frac{r}{g}\right],\left[\frac{s}{h}\right]\right\}}\sum_{j=0}^{r+s-i(h+g)}(-1)^j\alpha_{m,k+i-m}\times$$

$$\times D^{i-m}\left[\lambda^k\right]\left(\widetilde{P}_{k+i-1,j}^{r-ig,s-ih}(H,HA)+\sum_{p=1}^{j-1}\widetilde{R}_{k+i+p-1,j-p}^{r-p(g+1)-ig,s-(p+i)h}(H,HA)\right)\times$$

$$\times H\prod_{n=0}^{m-1}\left(-ngx^{-1}+D\right),\quad r+s\geq 1,\quad k=1,2,\dots.\tag{8}$$

Здесь $H\widetilde{P}_{ij}^{r,s}(H,HA)=P_{ij}^{r,s}(H,HA)$, $H\widetilde{R}_{ij}^{r,s}(H,HA)=R_{ij}^{r,s}(H,HA)$, а символом $P_{ij}^{r,s}(H,HA)$ обозначена сумма всех возможных произведений i множителей H и j множителей $HA_{r_ks_k}$, $k=\overline{1,j}$, таких, что $r_1+r_2+\dots+r_j=r$, $s_1+s_2+\dots+s_j=s$; $R_{ij}^{r,s}(H,HA)$ – сумма произведений i матриц H и $HA_{i_kj_k}$, $k=\overline{1,j}$, которые определяются с помощью рекуррентных формул:

$$p=1,\quad R_{ij}^{r-(g+1),s-h}(H,HA)=HR_{i-1,j}^{r-(g+1),s-h}(H,HA)+$$

$$+(r-(g+1))HP_{i-1,j}^{r-(g+1),s-h}(H,HA)+$$

$$+\sum_{r_1+s_1=1}^{r+s-(j-1)-(h+g+2)}HA_{r_1s_1}R_{i,j-1}^{r-r_1-(g+1),s-s_1-h}(H,HA);$$

$$1<p<i,\quad R_{ij}^{r-p(g+1),s-ph}(H,HA)=(r-g)HR_{i-1,j}^{r-p(g+1),s-ph}(H,HA)+$$

$$+\sum_{r_1+s_1=1}^{r+s-(j-1)-p(h+g+2)}HA_{r_1s_1}R_{i,j-1}^{r-r_1-p(g+1),s-s_1-ph}(H,HA);$$

$$p=i,\quad R_{ij}^{r-i(g+1),s-ih}(H,HA)=(r-(g+1))HR_{i-1,j}^{r-i(g+1),s-ih}(H,HA)+$$

$$+\sum_{r_1+s_1=1}^{r+s-(j-1)-i(h+g+2)} HA_{r_1s_1}R_{i,j-1}^{r-r_1-i(g+1),s-s_1-ih}(H,HA).$$

Символом $D^i\left[\lambda^k\right]$ обозначена сумма всех возможных произведений i "множителей"$D_s=(-sgx^{-1}+D)$, $D=\frac{d}{dx}$, и k множителей λ, в которых последним множителем является λ, а индекс s в каждом слагаемом изменяется от $i-1$ до 0. Числа $\alpha_{m,k}$ определяются рекурентными соотношениями: $\alpha_{1,k}=1$, $\alpha_{m,1}=m$, $\alpha_{m,k}=\alpha_{m-1,k}+\alpha_{m,k-1}$.

Согласно (3) операторы $Q\widetilde{L}_{krs}$ отображают пространство U на подпространство U_0. Их сужение на подпространство U_0 обозначим $\widehat{L}_{krs}$ и представим в базисе φ_i, $i=\overline{1,r}$, этого подпространства. Если координаты искомого вектора u определить в базисе U_0, то уравнение (7) в подпространстве U_0 будет иметь вид

$$\left(\lambda^p+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r+s=1}^{\infty}x^{-r}\varepsilon^s\widehat{L}_{krs}\left[\lambda^k\right]\right)u=0.$$

Сделав замену

$$\lambda(x,\varepsilon)=\mu\widetilde{\lambda}(x,\varepsilon),\quad \mu=\sqrt[p]{\varepsilon},$$

и введя отношение $\frac{1}{x\varepsilon}$, чтобы избежать появления отрицательных степеней параметра, получим

$$\left(\widetilde{\lambda}^p+\widehat{L}_{001}+\sum_{r+s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^r\mu^s\widehat{L}_{0,r,\frac{s-(r-1)p}{p}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^r\mu^s\widehat{L}_{k,r,\frac{s-(r-1)p+k}{p}}\left[\widetilde{\lambda}^k\right]\right)u=0. \tag{9}$$

Таким образом, имеем задачу о возмущении собственных значений и собственных векторов матрицы $R=-\widehat{L}_{001}=\|(A_{01}\varphi_j,\psi_i)\|_1^r$ в подпространстве U_0.

Функцию $\widetilde{\lambda}(x,\varepsilon)$ будем искать в виде

$$\widetilde{\lambda}=\lambda_{00}+\eta,\quad \lambda_{00}=\sqrt[p]{\eta_0}, \tag{10}$$

где η_0 – собственное значение матрицы R.

Подставив (10) в (9), получим

$$(R-\eta_0E_r)\,u=F\left(\eta,\frac{1}{x\varepsilon},\mu\right)u, \tag{11}$$

где

$$F\left(\eta,\frac{1}{x\varepsilon},\mu\right)=\sum_{k=1}^{p}\eta^kF_{k00}+\sum_{r+s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^r\mu^sF_{0rs}+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^r\mu^sF_{krs}\left[\eta^k\right]; \tag{12}$$

$$F_{k00}=C_p^k\lambda_{00}^{p-k},\quad k=\overline{1,p},$$

$$F_{0rs} = \widehat{L}_{0,r,\frac{s-(r-1)p}{p}} + \sum_{i=1}^{s} \widehat{L}_{i,r,\frac{s-(r-1)p-i}{p}} \left[\lambda_{00}^{i}\right], \quad r+s \geq 1, \tag{13}$$

$$F_{krs}\left[\eta^k\right] = \sum_{i=k}^{s} C_i^k \widehat{L}_{k,r,\frac{s-(r-1)p+k}{p}} \left[\eta^k \lambda_{00}^{i-k}\right], \quad r \geq 0, \quad s \geq 1, \quad k = \overline{1,s},$$

E_r – удиничная матрица r-го порядка.

Пусть собственное значение η_0 матрицы R имеет кратность $r_1 \leqslant r$ и ему отвечает один элементарный делитель той же кратности, причем $\eta_0 \neq 0$. Обозначим через g собственный вектор матрицы R, отвечающий собственному значению η_0, а через $\widetilde{g}$ – елемент нуль-пространства матрицы $(R - \eta_0 E_r)^*$, которые определим так, чтобы выполнялись соотношения

$$\left(\widehat{H}^{i-1} g, \widetilde{g}\right) = \delta_{i,r_1}, \quad i = \overline{1,r_1}, \tag{14}$$

где $\widehat{H}$ – полуобратная матрица к матрице$(R - \eta_0 E_r)$.

Вектор $u(x,\varepsilon) \in U_0$ будет решением уравнения (11) тогда и только тогда, когда

$$\left(F\left(\eta, \frac{1}{x\varepsilon}, \mu\right) u, \widetilde{g}\right) = 0. \tag{15}$$

При выполнении этого условия $u = \widehat{H}Fu + cg$, где c – произвольное число. Положив $c = 1$, будем иметь $\left(E_r - \widehat{H}F\right) u = g$. Это равенство формально удовлетворяется, если искомый вектор u представить в виде

$$u = g + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\widehat{H}F\right)^k g. \tag{16}$$

Подставив (16) в (15) и перегруппировав слагаемые с учётом разложения (12) и соотношений (14), получим уравнение разветвления для задачи (11):

$$\left(p\lambda_{00}^{p-1}\right)^{r_1} + \sum_{k=r_1+1}^{\infty} \eta^k V_{k00} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r+s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^r \mu^s V_{krs}\left[\eta^k\right] = 0, \tag{17}$$

где

$$V_{krs}\left[\eta^k\right] = \sum_{i=1}^{k+r+s} \left(\widetilde{P}_i^{krs}(\widehat{H}F)\left[\eta^k\right] g, \widetilde{g}\right), \quad k+r+s \geq 1. \tag{18}$$

Применяя к уравнению (17) пространственный аналог диаграмм Ньютона, описанный в [5], можно найти вид разложений для функций $\eta(x,\varepsilon)$ и соответствующих векторов $u(x,\varepsilon)$ в зависимости от поведения коэффициентов $V_{krs}\left[\eta^k\right]$. В этом смысле полученные формулы (8), (13), (18) содержат полную информацию о структуре общего асимптотического решения системы (1) в даном многомерном случае.

В частности имеет место такая теорема.

Теорема 1 *Если предельная матрица A_{00} имеет n-кратное собственное значение λ_0, которому отвечает r элементарных делителей кратности p, а $(r \times r)$-матрица $R = \|(A_{01}\varphi_j, \psi_i)\|_1^r$ – собственное значение $\eta_0 \neq 0$ кратности $r_1 \leqslant r$, которому отвечает один элементарный делитель той же кратности, и выполняется условие*

$$\left(\|(HA_{01} + A_{01}H)\varphi_j\psi_i\|_1^r g, \widetilde{g}\right) \neq 0,$$

то система дифференциальных уравнений (1) имеет $r_1 p$ линейно независимых формальных решений вида (4), где функция $\lambda(x,\varepsilon)$ и вектор $v(x,\varepsilon)$ представляются формальными разложениями

$$\lambda(x,\varepsilon) = \mu\left(\lambda_{00} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon\mu}\right)^i \mu^{\frac{j+1}{r_1}}\lambda_{i,j+1}\right), \tag{19}$$

$$v(x,\varepsilon) = g + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon\mu}\right)^i \mu^{\frac{j+1}{r_1}} v_{i,j+1}, \tag{20}$$

в которых $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$, $\lambda_{00} = \sqrt[p]{\eta_0}$, $\lambda_{01} = \sqrt[r_1]{\frac{\left(\|(HA_{01}+A_{01}H)\varphi_j,\psi_i\|_1^r g,\widetilde{g}\right)}{p\lambda_{00}^{p-2}}}$, g – собственный вектор матрицы R, соответствующий ее собственному значению η_0, а $\widetilde{g}$ – елемент нуль-пространства матрицы $(R-\eta_0 E_r)^*$.

Коэффициенты разложений (19), (20) можно определить методом неопределённых коэффициентов, подставляя разложения (19), (20) в систему (1) и приравнивая выражения при одинаковых степенях μ и $\frac{1}{x\varepsilon\mu}$. Эти коэффициенты можно определить и иным способом, как это предложено в работе [3], воспользовавшись непосредственно уравнением разветвления (17) и соотношениями (16), (6).

Если матрица R имеет k собственных значений $\eta_i \neq 0$, кратности r_i, $(i = \overline{1,k}, r_1+r_2+...+r_k = r)$, и для каждого из них выполняются условия теоремы, то всего можно построить $rp = n$ линейно независимых решений системы (1), которые позволяют составить ее общее формальное решение.

Аналогичным образом исследуется случай, когда кратное собственное значение η_0 матрицы R является нулевым. Решения системы (1) также ищутся в виде (4). Тогда задача о возмущении собственных значений и собственных векторов матрицы R в подпространстве U_0 запишется в виде

$$Ru = F\left(\widetilde{\lambda}, \frac{1}{x\varepsilon}, \mu\right)u,$$

где

$$F\left(\widetilde{\lambda}, \frac{1}{x\varepsilon}, \mu\right) = \widetilde{\lambda}^p F_{p00} + \sum_{r+s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^r \mu^s F_{0rs} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r+s=k}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^r \mu^s F_{krs}\left[\widetilde{\lambda}^k\right];$$

$$F_{p00} = E_r; \quad F_{0rs} = \widehat{L}_{0,r,\frac{s-(r-1)p}{p}}, \quad r+s \geq 1;$$

$$F_{krs}\left[\widetilde{\lambda}^k\right] = \widehat{L}_{k,r,\frac{s-k-(r-1)p}{p}}\left[\widetilde{\lambda}^k\right], \quad k \geq 1, \quad r+s \geq k,$$

а условие $(Fu, \widetilde{g}) = 0$ можно формально удовлетворить, положив

$$u = g + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\widehat{H}_0 F\right)^k g.$$

Уравнение разветвления в этом случае будет иметь вид

$$\widetilde{\lambda}^{r_1 p} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r+s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)^r \mu^s V_{krs}\left[\widetilde{\lambda}^k\right] = 0,$$

где

$$V_{krs}\left[\widetilde{\lambda}^k\right] = \sum_{i=1}^{k+r+s}\left(P_i^{k,r,s}(\widehat{H}_0 F)\right), \quad k \geq 0, \quad r+s \geq 1.$$

Откуда, используя метод пространственных диаграмм Ньютона, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2 *Пусть предельная матрица A_{00} имеет n-кратное собственное значение λ_0, которому отвечает r элементарных делителей кратности p, а $(r \times r)$-матрица R – нулевое собственное значение кратности $r_1 \leqslant r$, которому отвечает один элементарный делитель той же кратности, и выполняются условия*

$$V_{101} = \left(\| - ((HA_{01} + A_{01}H)\varphi_j, \psi_i)\|_1^r g, \widetilde{g}\right) \neq 0,$$
$$V_{00p} = \left(\|((A_{01}HA_{01} - A_{02})\varphi_j, \psi_i)\|_1^r g, \widetilde{g}\right) \neq 0.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (1) имеет $r_1 p$ линейно независимых формальных решений вида (4), где функция $\lambda(x,\varepsilon)$ и вектор $v(x,\varepsilon)$ представляются формальными разложениями

$$\lambda^{(\nu)}(x,\varepsilon) = \lambda_{00}^{(\nu)}\mu^{\frac{r_1 p}{r_1 p - 1}} + \sum_{i+j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon^2}\right)^i \mu^{\frac{j+r_1 p}{r_1 p-1}}\lambda_{ij}^{(\nu)}, \quad \nu = \overline{1, r_1 p - 1},$$

$$\lambda^{(r_1 p)}(x,\varepsilon) = \lambda_{00}\mu^p + \sum_{i+j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon^2}\right)^i \mu^{j+p}\lambda_{ij},$$

$$v^{(\nu)}(x,\varepsilon) = g + \sum_{i+j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon^2}\right)^i \mu^{\frac{j}{r_1 p-1}} v_{ij}^{(\nu)}, \quad \nu = \overline{1, r_1 p - 1},$$

$$v^{(r_1 p)}(x,\varepsilon) = g + \sum_{i+j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x\varepsilon^2}\right)^i \mu^j v_{ij},$$

где $\lambda_{00}^{(\nu)}$, $\nu = \overline{1, r_1 p - 1}$, и λ_{00} – ненулевые решения определяющих уравнений $\lambda_{00}^{r_1 p} + \lambda_{00}V_{101} = 0$ и $\lambda_{00}V_{101} + V_{00p} = 0$ соответственно.

Строящиеся указанным способом формальные решения имеют асимптотический характер при $\varepsilon \to 0$, $x \to \infty$. Используя методы [4], можно доказать, что когда $Re\lambda_0 < 0$ и выполняются условия теоремы 1, то имеет место асимптотическая оценка

$$\|z(x,\varepsilon) - z_{m_1 m_2}(x,\varepsilon)\| \leqslant c \left(O\left[\left(\frac{1}{x\varepsilon\mu}\right)^{m_1-g} \mu^{\frac{1-r_1 g}{r_1} - p(h+g+1)} \right] + \right.$$

$$\left. +O\left[\mu^{\frac{m_2+1-r_1 g}{r_1} - p(h+g+1)} \left(\frac{1}{x\varepsilon\mu}\right)^{-(g+1)} \right] \right)$$

где $z(x,\varepsilon)$ – точное решение системы (1), а $z_{m_1,m_2}(x,\varepsilon)$ – (m_1, m_2)-приближение, получающееся из (4), если соответствующие формальные разложения (19), (20) ограничить слагаемыми с показателями $i \leqslant m_1$, $j \leqslant m_2$, c – некоторая постоянная, которая не зависит от ε. Аналогичная оценка имеет место и для решений, строящихся то теореме 2.

Литература

[1] Давидюк Г.П. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой. Дисс. … канд. физ.-мат. наук – Киев, 1983. – 132с.

[2] Яковець В.П., Головченко О.В. Побудова асимптотичних розв'язків сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою у випадку кратного спектра граничної матриці. //Нелінійні коливання – 2008 – Т.11 – №1 – С. 128-144.

[3] Головченко О.В. Побудова загального розв'язку сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою. //Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2007 – 8 – С. 66-81.

[4] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

[5] Айзенгендлер П.Г. Метод диаграм Ньютона для уравнений с несколькими малыми параметрами и его приложения. – Псков, 1989. – 52с. – Деп. в ВИНИТИ, №6852-89.

Голубничий К.В.

Об одной задаче управляемости для модифицированного уравнения переноса

Доказана локальная однозначная разрешимость в $H_2(D) \times L_2(G \times V)$ обратной задачи с финальным переопределением для нелинейного модифицированного уравнения переноса в случае, когда $F(x,v,t) = f(x,v)\,g(x,v,t)$ и управлением является $f(x,v)$. В работе исследуется локальная однозначная разрешимость обратной задачи с финальным переопределением для нелинейного модифицированного уравнения переноса. Эти задачи можно рассматривать как задачи управляемости, в которых управлением является, например, множитель в правой части, или в каких-нибудь других коэффициентах, зависящий только от пространственных переменных в случае финального переопределения и зависящий только от времени в случае интегрального переопределения. Введем следующие функциональные пространства и обозначения:

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ строго выпукла, а ограниченное замкнутое множество V содержится в шаровом слое $\{v \in \mathbb{R}^n : 0 < v_0 \leqslant |v| \leqslant v_1 < \infty\}$.

$L_\infty\big(D, L_2(V)\big)$ — пространство классов существенно ограниченных функций на D со значениями в $L_2(V)$, где $D = G \times V \times (0,T)$.

Пространство $H_2(D) = \{u \in L_2(D) : u_t, (v,\nabla)u \in L_2(D), u|_{\Gamma_-} \in L_2(\Gamma_-)\}$ функций u, суммируемых в квадрате вместе со своими обобщенными производными $u_t, (v,\nabla)u$ на D и следом $u|_{\Gamma_-}$ из $L_2(\Gamma_-)$ где $\Gamma_- = \gamma_- \times [0,T]$ и $\gamma_- = \{(x,v) \in \partial G \times V : (v,n_x) < 0\}$, а n_x — внешняя нормаль к границе ∂G области G в точке x. Это пространство является банаховым относительно нормы

$\|u\|_{H_2(D)} = [\|u\|^2_{2.D} + \|u_t\|^2_{2.D} + \|(v,\nabla)u\|^2_{2.D} + \|u|_{\Gamma_-}\|^2_{2.\Gamma_-}]^{1/2}$,

$W_2^t(D) = \left\{F(x,v,t) \in L_2(D) : \dfrac{\partial F}{\partial t} \in L_2(D)\right\}$ с нормой $\|F\|_{W_2^t(D)} = \left[\|F\|^2_{L_2(D)} + \|\dfrac{\partial F}{\partial t}\|^2_{L_2(D)}\right]^{1/2}$,

$h_2(G\times V) = \{\varphi \in L_2(G\times V) : (v,\nabla)\varphi \in L_2(G\times V), \varphi|_{\gamma_-} \in L_2(\gamma_-)\}$ с нормой

$\|\varphi\|_{h_2} = [\|\varphi\|^2_{L_2(G\times V)} + \|(v,\nabla)\varphi\|^2_{L_2(G\times V)} + \|\varphi|_{\gamma_-}\|^2_{L_2(\gamma_-)}]^{1/2}$, $C_{X\to Y}$ — наименьшая константа вложения X в Y, т.е. $\|\cdot\|_Y \leqslant C_{X\to Y}\|\cdot\|_X$.

$\mathcal{L}(X,Y)$ — множество линейных непрерывных операторов из X в Y.

Рассматривается обратная задача

$$u_t(x,v,t) + (v,\nabla x)u(x,v,t) + \sum(x,v,t)u(x,v,t) + S[u](x,v,t) = \int\limits_V J(x,v',t,v)u(x,v',t)dv' + F(x,v,t), \quad \text{где} \quad (x,v,t) \in D \tag{1}$$

где нелинейная часть

$$[S(u)](x,v,t) = \int\limits_0^T \int\limits_{G\times V} Q(x,v,x',v',t)\,\alpha\big(u(x',v',t')\big)\,dx'\,dv'\,dt'\,, \tag{2}$$

с условиями

$$u(x,v,t) = 0, \quad (x,v,t) \in \gamma_- \times [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,v,0) = 0, \quad (x,v) \in \bar{G} \times V \tag{4}$$

$$u(x,v,T) = \psi(x,v), \quad (x,v) \in \bar{G} \times V \tag{5}$$

Для того чтобы в дальнейшем избежать нагромождений, будем рассматривать вместо окрестности точки u_0 окрестность нуля. А именно, вычитая из уравнения

$$u_t(x,v,t) + (v,\nabla)u(x,v,t) + \Sigma(x,v,t)\,u_0(x,v,t) =$$
$$= \int_V J\,(x,v,t,v')\,u(x,v',t)\,dv' + F(x,v,t),$$

уравнение

$$\tilde{u}_t(x,v,t) + (v,\nabla)\tilde{u}(x,v,t) + \Sigma(x,v,t)\,u_0(x,v,t) =$$
$$= \int_V J\,(x,v,t,v')\,\tilde{u}(x,v',t)\,dv' + \tilde{F}(x,v,t),$$

получим

$$\hat{u}_t(x,v,t) + (v,\nabla)\hat{u}(x,v,t) =$$
$$= \int_V J\,(x,v,t,v')\,\hat{u}(x,v',t)\,dv' + \hat{F}(x,v,t).$$

Пусть функция источников представима в виде

$$F(x,v,t) = f(x,v)\,g(x,v,t), \tag{6}$$

где u и f — неизвестные функции, а g, ψ — априори заданные функции, которую можно рассматривать как задачу управляемости, а именно, перевести систему из $u(x,v,0) = 0$ в условие финального переопределения $u(x,v,T) = \psi(x,v)$ с помощью управления $f(x,v)$. В нашей работе доказано, что существует единственное решение (u,f) данной задачи в окрестности точки u_0 в соответствующем функциональном пространстве (все обозначения и условия будут введены ниже) при достаточно малых по норме $\psi(x,v)$.

Здесь и в дальнейшем $\nabla = \nabla_x$.

В нашем случае [2] процесс массопереноса описывается многоскоростным анизотропным кинетическим модифицированном уравнением переноса:

$$\begin{gathered} u_t(x,v,t) + (v,\nabla)\, u(x,v,t) + \sum(x,v,t)\, u_0(x,v,t) = \\ = \int\limits_V J(x,v,t,v')\, u(x,v',t)\, dv' + F(x,v,t), \\ (x,v,t) \in G \times V \times (0,T), \end{gathered} \tag{7}$$

в котором функция $u(x,v,t)$ характеризует плотность распределения частиц в фазовом пространстве $G \times V$ в момент времени $t \in (0,T)$, а функции $\sum(x,v,t), J(x,v,t,v')$ и $F(x,v,t)$ – среду, в которой этот процесс протекает, являясь при этом коэффициентом поглощения, индикатрисой рассеяния и функцией источников соответственно. Функция u_0 здесь фиксирована. К такому же уравнению приводят задачи излучения заряженных частиц, а также распространения γ-излучения. Как доказано в работе [4], если заданы все характеристики среды Σ, J, F, а также "входящий поток", т.е.

$$u(x,v,t) = \mu(x,v,t), \quad (x,v,t) \in \gamma_- \times [0,T], \tag{8}$$

и начальное состояние процесса, т. е.

$$u(x,v,0) = \varphi(x,v), \quad (x,v) \in \bar{G} \times V, \tag{9}$$

то состояние процесса $u(x,v,t)$ может быть определено однозначно в любой момент времени t, и там же выведена оценка корректности

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_2(D)} \leqslant C \Bigg(& \left[\|F\|^2_{2.D} + \|F_t\|^2_{2.D}\right]^{1/2} + \\ & + \left[\|\varphi\|^2_{2.G\times V} + \|(v,\nabla)\varphi\|^2_{2.G\times V} + \|\,\varphi|_{\gamma_-}\,\|^2_{2.\gamma_-}\right]^{1/2} + \\ & + \left[\|\mu\|^2_{2.\Gamma_-} + \|\mu_t\|^2_{2.\Gamma_-}\right]^{1/2} \Bigg). \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим обратную задачу для линейного модифицированного уравнения переноса с помощью функции источников. Интересен случай, когда допустимые управления являются стационарными, т.е. не меняющимися во времени. Предположим, что

$$F(x,v,t) = f(x,v)\, g(x,v,t) + h(x,v,t), \tag{11}$$

где f — искомая, а g, h — априори заданные функции. С физической точки зрения задача управления заключается в следующем: можно ли найти такую функцию $f(x,v)$ и соответствующую ей функцию $u(x,v,t)$, удовлетворяющее условиям (1)–(3) так, чтобы в момент времени $t = T$ функция распределения была равна $\psi(x,v)$. В такой постановке эта задача является задачей управления процессом нестационарного переноса с помощью функции источника F. Под обобщенным решением класса $H_2(D) \times L_2(G \times V)$ обратной задачи (1) будем понимать пару функций (u,f): $u \in H_2(D)$ и $f \in L_2(G \times V)$, удовлетворяющих почти всюду условиям (1)–(4).

Теорема 1 (*Однозначная разрешимость обратной задачи для линейного модифицированного уравнения переноса в* $H_2(D) \times L_2(G \times V)$).

Пусть $\sum, \sum_t \in L_\infty(D)$; $J, J_t \in L_\infty\big(D, L_2(V)\big)$; $u_0 \in H_2(D)$, $u_{0_t} \in L_2(D)$, $g, g_t \in L_\infty\big(G \times V, L_2(0,T)\big)$, $|g(x,v,T)| \geq g_0 > 0$; $h, h_t \in L_2(D)$; $\mu, \mu_t \in L_2(\Gamma_-)$; $\varphi, (v,\nabla)\varphi, \psi, (v,\nabla)\psi \in L_2(G \times V)$, $\varphi|_{\gamma_-}, \psi|_{\gamma_-} \in L_2(\gamma_-)$; $v_0^{-1} diam G < a$, и выполнены условия согласования $\varphi(x,v) = \mu(x,v,0)$ и $\psi(x,v) = \mu(x,v,T)$ при почти всех $(x,v) \in \gamma_-$. Тогда исследуемая задача управления имеет единственное решение $\{u,f\} \in H_2(D) \times L_2(G \times V)$. Как уже отмечалось выше, для облегчения изложения будем рассматривать вместо окрестности точки u_0 окрестность нуля. Методика доказательства этой теоремы по сути не отличается от доказательства теоремы об однозначной разрешимости обратной задачи для линейного уравнения переноса Волкова Н.П. [2].

Поскольку оператор

$$\hat{\hat{\mathcal{A}}} : L_2(G \times V) \longrightarrow h_2(G \times V),$$
$$f \mapsto \psi,$$

линейный непрерывный и биективный (т.к. решение единственно), то по теореме Банаха $\hat{\hat{\mathcal{A}}}$ — изоморфизм, т.е.

$$\hat{\hat{\mathcal{A}}}^{-1} : h_2(G \times V) \longrightarrow L_2(G \times V),$$

непрерывен и, таким образом, $\forall\, \psi \; \exists \,!$ решение f линейной обратной задачи, причем

$$\|f\|_{L_2(G \times V)} \leqslant \bar{C} \|\psi\|_{h_2(G \times V)}, \tag{12}$$

при некотором $\bar{C} > 0$ ($\bar{C}$ зависит от $\sum, J, g, h, \mu, G, V$, а также от норм дифференциальных и интегральных операторов, введенных в доказательстве теоремы).

Пусть $\mu(x,v,t) = 0, (x,v,t) \in \gamma_- \times [0,T]$; Пусть $\mu(x,v,t) = 0, (x,v,t) \in \gamma_- \times [0,T]$; $\varphi(x,v) = 0$, $(x,v) \in \bar{G} \times V$; $h(x,v,t) \equiv 0$ на D.

Положим $Lu = u_t + (v,\nabla)\, u - \int\limits_V Ju\, dv' = -\sum u_0 + F$, $H = \{u \in H_2(D) | \exists F \in W_2^t(D)$: u — решение задачи (7)–(9)$\}$ с нормой $\|u\|_H = \|Lu\|_{W_2^t(D)}$. Тогда $L : H \to W_2^t(D)$ — изометрический изоморфизм H на $W_2^t(D)$ [4] (10), H — полно и непрерывно вкладывается в $H_2(D)$. Оттуда же следует, что $\exists \hat{C} > 0$, $\forall\, t_1 \in]0,T]$, $\forall\, u \in H : \|u|_{t=t_1}\|_{L_2(G \times V)} \leqslant \hat{C} \|u\|_H$. Отметим также, что по теореме о следах для $H_2(D)$ оператор

$$\begin{aligned} \Lambda_u :\; & H \longrightarrow L_2(G \times V), \\ & u \mapsto u_t|_{t=t_1}, \end{aligned} \tag{13}$$

непрерывен в силу непрерывности вложения H в $H_2(D)$. Положим $\chi(x,v) = f(x,v)\, g(x,v,T)$.

Всюду в дальнейшем будут приняты предыдущие обозначения. Пусть $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируемо на $\mathbb{R}$, причем

$$\begin{cases} |\alpha(u)| \leqslant C_1 |u|\,, \\ |\alpha'(u)| \leqslant C_1\,, \quad \alpha'(0) = 0\,, \\ |\alpha''(u)| \leqslant C_2\,. \end{cases} \tag{14}$$

Далее, $Q(x, v, x', v', t)$ непрерывна на $\bar{G} \times \bar{V} \times \bar{G} \times \bar{V} \times [0, T]$.
Введем оператор S: $H_2(D) \to W_2^t(D)$,
$[S(u)](x, v, t) = \int\limits_0^T \int\limits_{G\times V} Q(x, v, x', v', t)\, \alpha\big(u(x', v', t')\big)\, dx'dv'dt'.$

Теорема 2 (*(Однозначная разрешимость обратной задачи для нелинейного модифицированного уравнения переноса в $H_2(D) \times L_2(G \times V)$).*)

Пусть $\sum, \sum_t \in L_\infty(D)$, $|\sum(x, v, T)| \geq \sum_0 > 0$, $(x, v) \in G \times V; J, J_t \in L_\infty\big(D, L_2(V)\big)$; $u_0 \in H_2(D)$ $u_{0_t} \in L_2(D)$, $g, g_t \in L_\infty\big(G \times V, L_2(0, T)\big)$, $|g(x, v, T)| \geq g_0 > 0$; $\psi, (v, \nabla)\psi \in L_2(G \times V)$, $\psi|_{\gamma_-} \in L_2(\gamma_-)$; $v_0^{-1} diam G < a$ и выполнено условие $\psi(x, v) = 0$ при $(x, v) \in \gamma_-$. Тогда задача

$$\begin{aligned} u_t(x, v, t) + (v, \nabla)u(x, v, t) + \sum(x, v, t) u_0(x, v, t) + [S(u)](x, v, t) = \\ = \int\limits_V J(x, v, t, v') u(x, v', t)\, dv' + F(x, v, t), \quad (x, v, t) \in D\,, \end{aligned} \tag{15}$$

$$u(x, v, t) = 0, \quad (x, v, t) \in \gamma_- \times [0, T], \tag{16}$$

$$u(x, v, 0) = 0, \quad (x, v) \in \bar{G} \times V, \tag{17}$$

$$u(x, v, T) = \psi(x, v), \quad (x, v) \in \bar{G} \times V, \tag{18}$$

$$F(x, v, t) = f(x, v)\, g(x, v, t), \tag{19}$$

где f — искомая, а g — априори заданная функция, имеет единственное решение (u, f) в окрестности нуля в $H_2(D) \times L_2(G \times V)$ при достаточно малых по норме $\psi \in L_2(G \times V)$.

Замечание. Доказательство теоремы *2* сводится к проверке выполнимости условия теоремы об обратной функции, при этом главными моментами являются проверка строгой дифференцируемости соответствующих отображений и выбор функциональных пространств, связанных с задачей (15)–(18). Напомним теорему об обратной функции.

Теорема 3 (*(Однозначная разрешимость обратной задачи для нелинейного модифицированного уравнения переноса в $H_2(D) \times L_2(G \times V)$).*)

Теорема 4 Пусть X, Y — банаховы пространства, U — открытое множество в X, а отображение $f : U \to Y$ строго дифференцируемо на U и

$f'(x_0) : X \to Y$ — изоморфизм X на Y для некоторой точки $x_0 \in U$. Тогда существует такая окрестность U' точки x_0, что f осуществляет гомеоморфизм U' на открытое множество $f(U')$, $f'(x)$ — изоморфизм X на Y при $x \in U'$, $f^{-1} : f(U') \to X$ строго дифференцируемо на $f(U')$ и $(f^{-1})'\big(f(x)\big) = [f'(x)]^{-1}$ при $x \in U'$ (т.е. f — диффеоморфизм U' на $f(U')$ класса C^1).

По теореме об обратной функции *3* существуют такие открытые окрестности U_1 в H и V_1 в $W_2^t(D)$ точек u_0 и $\xi(u_0)$ соответственно, что оператор $\xi : u \mapsto Lu + S(u)$ осуществляет диффеоморфизм U_1 на V_1 класса C^1. При этом оператор $\eta = \xi^{-1} : V_1 \to U_1$ строго дифференцируем на V_1 как отображение в H и, следовательно, в $H_2(D)$ и $\eta'(F) = \big[\xi'\big(\eta(F)\big)\big]^{-1}$ при $F \in V_1$. В этом случае, в силу линейности и непрерывности оператора $\chi(x,v) \mapsto \chi(x,v)g(x,v,t)/g(x,v,T)$ из $L_2(G \times V)$ в $W_2^t(D)$ следует, что оператор $P : L_2(G \times V) \to H_2(D)$, $\chi(x,v) \mapsto P(\chi) = \eta\left(\chi(x,v)g(x,v,t)/g(x,v,T)\right)$ строго дифференцируем по Фреше в окрестности $V_2 \subset L_2(G \times V)$ точки $P(u_0)$, а тогда операторы

$$O_1 : V_2 \to L_2(G \times V),$$
$$\chi \mapsto \big(P(\chi)\big)_t\Big|_{t=T}, \tag{20}$$
$$O_2 : V_2 \to L_2(G \times V),$$
$$\chi \mapsto (v, \nabla)\big(P(\chi)\big)\Big|_{t=T}, \tag{21}$$
$$O_3 : V_2 \to L_2(G \times V),$$
$$\chi \mapsto \int\limits_V JP(\chi)\, dv'\Big|_{t=T}, \tag{22}$$
$$O_4 : V_2 \to L_2(G \times V),$$
$$\chi \mapsto S\big(P(\chi)\big)\Big|_{t=T}, \tag{23}$$

также строго дифференцируемы на V_2. Далее будем искать решение нелинейной задачи (15)–(18) в виде $u = P(\chi)$, где u — решение нелинейной задачи (15)–(18) с правой частью $F(x,v,t) = \chi(x,v)g(x,v,t)/g(x,v,T)$. Введем оператор

$$M(\chi) = \Bigg\{\chi - \big(P(\chi)\big)_t\Big|_{t=T} - (v,\nabla)\big(P(\chi)\big)\Big|_{t=T} - S\big(P(\chi)\big)\Big|_{t=T} + \\ + \Bigg(\int\limits_V JP(\chi)\, dv'\Bigg)\Big|_{t=T}\Bigg\} \times \left(\frac{1}{\sum(x,v,T)}\right), \tag{24}$$

$$M'(u_0)\chi = \left\{ \chi - \bigl(P'(u_0)\chi\bigr)_t\Big|_{t=T} - (v,\nabla)\bigl(P'(u_0)\chi\bigr)\Big|_{t=T} + \right.$$
$$\left. + \left(\int\limits_V J\bigl(P'(u_0)\chi\bigr)\,dv'\right)\Big|_{t=T} \right\} \times \left(\frac{1}{\sum(x,v,T)}\right), \quad (25)$$

где $P'(u_0)\chi = \eta'(u_0)\,(\chi(x,v)g(x,v,t)/g(x,v,T))$, т.е. решение прямой линейной задачи с правой частью $F(x,v,t) = \chi(x,v)g(x,v,t)/g(x,v,T)$ (решение существует, как показано в [4], и оператор $\eta'(u_0)$ непрерывен, т.к. имеет место оценка корректности (10)). Подставив в (15) $u|_{t=T}$ из (4) и $F(x,v,t) = \chi(x,v)g(x,v,t)/g(x,v,T)$, приходим к уравнению

$$M(\chi) = \psi(x,v), \qquad (26)$$

к которому в силу непрерывности $M'(u_0)$, а также существования и ограниченности $[M'(u_0)]^{-1}$ (следует из корректной разрешимости линейной обратной задачи – оценка (12)), можно применить теорему *3*. Согласно теореме *3* существуют такие открытые окрестности U_* в $L_2(G\times V)$ и V_* в $L_2(G\times V)$ точек u_0 и $M(u_0)$ соответственно, что $M:\chi\to\psi$ осуществляет диффеоморфизм U_* на V_* класса C^1. Поэтому $\forall\,\psi\in V_*\ \exists!\ \chi\in U_*: M(\chi)=\psi$. Теорема доказана.

Проведено доказательство локальной однозначной разрешимости в $H_2(D)\times L_2(G\times V)$ обратной задачи с финальным переопределением для нелинейного модифицированного уравнения переноса в случае, когда $F(x,v,t) = f(x,v)\,g(x,v,t)$ и управлением является $f(x,v)$.

Полученные результаты отражены в виде кратких сообщений в [30] и [31].

Литература

[1] *Хамди Н.* Задачи управляемости для нелинейных уравнений переноса. Дис... канд. физ.-мат.наук. -М. : РУДН, 2004. - 155 с.

[2] *Волков Н.П.* Достаточные условия разрешимости некоторых обратных задач (задач управления) для процессов массопереноса // Обратные задачи для математических моделей физических процессов. -М. : МИФИ, 1991. - с. 16.

[3] *Волков Н.П.* Обратные задачи для нестационарного кинетического уравнения переноса. Дис... канд. физ.-мат.наук. -М. : ВМК МГУ, 1987. - 111 с.

[4] *Прилепко А.И. , Волков Н.П.* Обратные задачи определения параметров нестационарного уравнения переноса по переопределениям интегрального типа. // Дифф. уравнения. 1987. -Т. 23.

[5] *Прилепко А.И., Волков Н.П.* // Диф. уравнения, 1988. - Т. 24. - № 1. -С. 136–146.

[6] *Белл Д. , Глестон С.* Теория ядерных реакторов. -М. : Атомиздат, 1974, -494 с.

[7] *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. -М. : Атомиздат, 1981, -456 с.

[8] *Смелов В.В.* Лекции по теории переноса нейтронов. -М. : Атомиздат, 1978, -216 с.

[9] *Шихов С.Б.* Вопросы математической теории реакторов (линейный анализ). - М. : Атомиздат, 1973, - 376 с.

[10] *Соболев В.В.* Рассеяние света в атмосфере планет. - М. : Наука, 1972, -335 с.

[11] *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. - М. : ИЛ, 1953, - 432 с.

[12] *Hopf E.* Mathematical Problems of Radioactiv Equilibrium. Cambridge Tracts., 1934, №31, - 103 p.

[13] *Кэк А.С.* Машинная томография с использованием рентгеновского излучения, радиоактивных изотопов и ультразвука. - ТИИЭР, 1979, т. 67, №9, с. 79 -109.

[14] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Губанов И.Б., Тимонов А.А.* О постановке основных задач вычислительной томографии. - Препринт №141, М. : ИПМ АНСССР, 1982, -23 с.

[15] *Iörgens K.* An asymptotic Expansion in the Theory of Neutron Transport. - Comm. on P. and Appl. Math., 1958, v. 11, №2, p. 219-242.

[16] *Марчук Г.И.* Методы расчёта ядерных реакторов. - М. : Атомиздат, 1961, - 668 с.

[17] *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. - Труды математического института АН СССР, 1961, т. 61, - 158 с.

[18] *Владимиров В.С.* Особенности решения уравнений переноса. - Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968, т. 8, №4, с. 842-852.

[19] *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. - М. : Наука, 1986, -272 с.

[20] *Гермогенова Т.А.* Обобщённые решения краевых задач для уравнения переноса. - Журнал вычислительной математики и математической физики, 1969, т. 9, №3, с. 605-625.

[21] *Кейз К.М. , Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. - М. : Мир, 1972, - 384 с.

[22] *Масленников М.В.* Проблема Милна с анизотропным рассеянием. - Труды математического института АН СССР, 1968, т. 97, - 134 с.

[23] *Прилепко А.И., Иванков А.А.* Обратные задачи определения коэффициента в правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса по переопределению в точке. - // Дифф. уравнения, 1985,- т. 21, №1, с. 109-119.

[24] *Прилепко А.И., Иванков А.А.* Обратные задачи определения коэффициента, индикатрисы рассеяния и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса. // Дифф. уравнения, 1985, -т. 21, №5, с. 870-885.

[25] *Прилепко А.И., Орловский Д.Г.* Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задач математической физики. // Дифф. уравнения, 1985, т. 21, №4, с. 694-701.

[26] *Марчук Г.И.* // Докл. АН СССР, 1964, т. 156, №3, с. 503-506.

[27] *Прилепко А.И.* Обратные задачи теории потенциала (эллиптические и гиперболические уравнения и уравнения переноса). // Мат. заметки, 1973, т. 14, №5, с. 755-767.

[28] *Анимонов Д.С.* // Дифф. уравнения, 1984, т. 20, №5, с. 817-824.

[29] *Шихов С.Б.* Вопросы математической теории реакторов (линейный анализ), - М. : Атомиздат, 1973, -376 с.

[30] *Голубничий К.В.* Задачи управляемости для модифицированного уравнения переноса // XLIII Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. Тезисы докладов. Секции математики и информатики. РУДН, Москва, 2007. с. 11.

[31] *Голубничий К.В.* Задачи управляемости для модифицированного уравнения переноса.// Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная памяти И.Г. Петровского. Сборник тезисов. МГУ, Москва, 2007. с. 106.

[32] *Сухинин М.Ф.* Избранные главы нелинейного анализа. - М.: Изд-во РУДН, 1992. - 300 с.

[33] *Сухинин М.Ф.* Теоретическая и математическая физика, 1995. - Т. 103. - № 1. - с. 23.

Гондарев В.И.

О точных оценках изменения потока тепломассопереноса

Рассматривается одномерная нестационарная задача массопереноса в неподвижной среде

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, x > 0, t > 0 \tag{1}$$

$$u(0,t) = g(t), g(0) = 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{3}$$

$g(t)$ - локально интегрируемая на $[0, \infty)$ функция.

Как известно (см. [2] с. 26) решение задачи (1)-(3) можно записать в виде

$$u(x,t) = \frac{ax}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t exp[-\frac{a^2x^2}{4\xi}]\xi^{-\frac{3}{2}} g(t-\xi)d\xi \tag{4}$$

Одним из основных вопросов теории тепломассопереноса является выяснения поведения решения (4) и ее производных на границе области. Исследование этого вопроса и посвящена настоящая заметка, где получены точные оценки поведения решения и его производных в зависимости от свойств функции $g(t)$.

§1 Некоторые вспомогательные результаты

Пусть $H_n(s)$ - стандартизированный (то есть со старшим коэффициентом равным единице) ортогональный многочлен Чебышева - Эрмита, $s \geq 0$,$g(s)$ - вектор функция, непрерывно дифференцируемая, причем ее первая производная удовлетворяет условию Гельдера

$$||g'(t+h) - g'(t)|| \leqslant M(t) \cdot h^{\alpha}, \alpha \in (0,1) \tag{1.1}$$

$M(t)$ - константа не зависящая от h

В этом параграфе исследуем поведение при $x \to +0$ и $x \to +\infty$, $t \to \infty$, $t \to 0$ интеграла

$$I_{n+1}(t,x) = \int_0^t exp(-\frac{a^2x^2}{4\xi})\xi^{\alpha} H_{n+1}(\frac{ax}{2\sqrt{\xi}})g(t-\xi)d\xi \tag{1.2}$$

$a > 0$

Следующие необходимые нам свойства многочленов Чебышева - Эрмита $H_n(s)$ можно найти в [3],[4]

Справедливо представление

$$H_n(s) = (-1)^n e^{s^2} (e^{-s^2})^{(n)} \tag{1.3}$$

Имеет место рекурентное соотношение

$$H_{n+1}(s) = 2sH_n(s) - 2nH_{n-1}(s) \tag{1.4}$$

$H_0 = 1$, $H_1(s) = 2s$ см. ([1] с.72) и, кроме того, имеет место неравенство

$$H_n'(s) = 2nH_{n-1}(s) \tag{1.5}$$

Корни многочленов $H_{n+1}(s)$ и $H_n(s)$ взаимно разделяются т.е., если $s_m^{(n+1)}$ и $s_k^{(n)}$ - корни многочленов $H_{n+1}(s)$ и $H_n(s)$ - соотвественно , то выполняются неравенства

$$s_1^{(n+1)} < s_1^{(n)} < s_2^{(n+1)} < s_2^{(n)} < ... < s_n^{(n)} < s_{n+1}^{(n+1)} \tag{1.6}$$

I. При оценке интеграла I_{n+1} рассмотрим сначала случай $x \to +\infty$

Замена $s = \frac{ax}{2\sqrt{\xi}}$ приводит интеграл к виду

$$I_{n+1}(x,t) = \frac{(ax)^{2(1+\alpha)}}{2^{1+2\alpha}} \int_{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} H_{n+1}(s) s^{-(2\alpha+3)} g(t - \frac{a^2x^2}{4s^2}) ds \tag{1.7}$$

1) Если $\alpha \geq 0$, то, пользуясь монотонным убыванием функции $s^{-2\alpha}$, получаем неравенство

$$|I(x,t)| \leqslant \frac{a^2x^2 \cdot t^\alpha}{2} \int_{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} H_{n+1}(s) s^{-3} g(t - \frac{a^2x^2}{4s^2}) ds \tag{1.8}$$

Лемма 1.1. Пусть $s_{n+1} \geq 0$ - наибольший корень многочлена $H_{n+1}(s)$. Тогда функция $\widetilde{H_{n+1}}(s) = e^{-s^2} H_{n+1}(s)$ имеет единственную точку максимума s_0 на интервале $s \in [s_{n+1}, \infty)$, причем $s_0 = s_{n+2}$ является наибольшим корнем многочлена $H_{n+2}(s)$

Доказательство.

Из (1.3) и (1.4) имеем

$$(\widetilde{H}_{n+1}(s))' = (H'_{n+1}(s) - 2sH_{n+1}(s))e^{-s^2} = (2nH_n - 2sH_{n+1}(s))e^{-s^2} =$$
$$= -H_{n+2}(s)e^{-s^2} = 0 \tag{1.9}$$

Это доказывает наше утверждение.

Таким образом при $s > s_{n+1}$ функция $\widetilde{H}_n(s)$ монотонно убывает и, следовательно, при $\frac{ax}{2\sqrt{t}} \geq s_{n+2}$ из 1.8 получаем

$$|I_{n+1}(x,t)| \leqslant \frac{a^2t^\alpha x^2}{2} e^{-\frac{a^2x^2}{4t}} H_{n+1}(\frac{ax}{2\sqrt{t}}) \int_{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}^{\infty} g(t - \frac{a^2x^2}{4s^2}) \frac{ds}{s^3} =$$
$$= t^\alpha H_{n+1}(\frac{ax}{2\sqrt{t}}) e^{-\frac{a^2x^2}{4t}} \int_0^t |g(\xi)| d\xi \tag{1.10}$$

Далее рассмотрим случай $\alpha < 0$. Обозначим через $s_\alpha \in (s_{n+2}, \infty)$ максимальный положительный корень многочлена
$\widetilde{H}_{n+2}(s) = sH_{n+2}(s) + \alpha H_{n+1}(s)$

Рассуждая так же, как в случае (1.9), нетрудно видеть, что в точке s_α функция $\widetilde{H}_{n+2} = e^{-s^2}H_{n+1}(s)s^{-2\alpha}$ достигает максимума. И таким образом, для $\frac{ax}{2\sqrt{t}} \geq s_\alpha$ она монотонно убывает. Пользуясь этим фактом, как и в предыдущем случае, получаем оценку (1.10) таким образом лемма 1.1 доказана.

Теорема 1.1. Для
$$t \leqslant (\frac{ax}{2s_\alpha})^2 \tag{1.11}$$
имеет место оценка (1.10), где $s_\alpha = s_{n+2}$, если $\alpha \geq 0$ и $s_\alpha \in [s_{n+2}, \alpha)$ максимальный корень многочлена $sH_{n+2}(s) + \alpha H_{n+1}(s)$, если $\alpha < 0$

Следствие 1.1. Если $g \in s_1, \varphi$, то справедлива оценка
$$|I(x,t)| \leqslant t^\alpha(1+\varphi^{-1}(t))e^{\frac{a^2x^2}{4t}}H_{n+1}(\frac{ax}{2\sqrt{t}})||g||_{1,\varphi} \tag{1.12}$$

§2 Исследование теплового потока

Оценка при при $x \to \infty$.

Применим полученные результаты к исследованию поведения функции $u(x,t)$ и ее производных заданной равенством (4).

Очевидно что ее можно записать в виде
$$u(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}a}\int_0^t \frac{d}{dx}(e^{-\frac{a^2x^2}{4\xi}})\frac{g(t-\xi)}{\sqrt{\xi}}d\xi \tag{2.1}$$

Отсюда, u из 1.3 получаем
$$\begin{aligned}\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}a}\int_0^t \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-\frac{a^2x^2}{4\xi}})\frac{g(t-\xi)}{\sqrt{\xi}}d\xi = \\ &= \frac{(-1)^{n+2}a^n}{2^{n+1}}\int_0^t e^{-\frac{a^2x^2}{4\xi}}H_{n+1}(\frac{ax}{2\sqrt{\xi}})\frac{g(t-\xi)}{\frac{n+2}{2}}d\xi\end{aligned} \tag{2.2}$$

Далее применяя неравенство при $\alpha = -\frac{n+2}{2}$, получаем оценку
$$|\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}| \leqslant \frac{e^{\frac{-(ax)^2}{4t}}H_{n+1}(\frac{ax}{2\sqrt{t}})(a)^n}{\sqrt{\pi}t^{\frac{n+2}{2}}2^{n+1}}\int_0^t |g(\xi)|d\xi \tag{2.3}$$
Справедливо в области $t \leqslant (\frac{ax}{2s_\alpha})^2$, где s_α - максимальный корень уравнения $sH_{n+1}(s) - (\frac{n+2}{2})H_n(s) = 0$ или эквивалентно ему $H_{n+2}(s) + (n-2)H_n(s) = 0$.

В частности при $n = 0$,$s_\alpha = 1$ и для $t \leqslant (\frac{ax}{2})^2$ имеем
$$|u(x,t)| \leqslant \frac{ae^{-\frac{a^2x^2}{4t}}x}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}\int_0^t |g(\xi)|d\xi \tag{2.4}$$

Если $n = 1$, то $s_\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ и для $t \leqslant \frac{(ax)^2}{14}$ справедлива оценка

$$|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}| \leqslant -\frac{a^2 e^{-\frac{a^2x^2}{4t}} x^2}{4t^{5/2}\sqrt{\pi}} \int_0^t |g(\xi)| d\xi \tag{2.5}$$

Следующий факт связан с S - весовыми пространствами Степанова см.[6. стр. 178] с нормой $||f||_{S_{p,\varphi}} = \sup_{s\in[0,\infty)} [\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha+1)} ||f(x)||_E^p dx]^{1/p}$, где $p \geq 1$

Следствие 2.1. Если $g \in S_1, \varphi$, то из неравенств 2.3 и 2.2 следует оценка

$$|\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}| \leqslant \frac{e^{-(\frac{ax}{2\sqrt{t}})} H_{n+1}(\frac{ax}{2\sqrt{t}})(1+\varphi^{-1}(t))||g||_{S_{1,\varphi}}}{2^{n+1} t^{\frac{n+2}{2}}\sqrt{\pi}} \tag{2.6}$$

Следствие 2.2. Если $g \in L_1$, то из 2.2 следует неравенство

$$|\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n}| \leqslant \frac{e^{-(\frac{ax}{2\sqrt{t}})} H_{n+1}(\frac{ax}{2\sqrt{t}})||g||_{-1}}{2^{n+1} t^{\frac{n+2}{2}}\sqrt{\pi}} \tag{2.7}$$

Следствие 2.3 Учитывая, что при $s > s_{n+1}$ справедливы неравенства $H_m(s) > 0$ при всех $m = 0, 1, ..., n+1$ из равенства 1.3 нетрудно получить оценку

$$|H_{n+1}(s)| \leqslant 2^{n+1} s^{n+1} \tag{2.8}$$

применяя которую в 2.3 получаем неравенство

$$|\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n}| \leqslant \frac{(ax)^{n+1} e^{-\frac{(ax)^2}{nt}}}{2^{n+1} t^{\frac{2n+3}{2}}\sqrt{\pi}} \int_0^t |g(\xi)| d\xi \tag{2.9}$$

Для оценки интеграла $I_{n+1}(t,x)$ в случае $g \in L_\infty$ при $n \geq 1$ устанавливаем следующее тождество

$$(\int_0^t e^{-\frac{(ax)^2}{4\xi}} \frac{d\xi}{\xi^{1/2}})^{n+1} = \frac{(-1)^{n-1} e^{-\frac{(ax)^2}{4t}} H_{n-1}(\frac{ax}{2\sqrt{t}}) a^{n+1}}{2^{n-1} t^{n/2}} \tag{2.10}$$

Для $n = 0$ имеем, пользуясь заменой $\frac{ax}{2\sqrt{\xi}} = s$,

$$(\int_0^t e^{-\frac{(ax)^2}{4\xi}} \frac{d\xi}{\xi^{1/2}})' = -2a \int_{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} ds \tag{2.11}$$

Отсюда

$$(\int_0^t e^{-\frac{(ax)^2}{4\xi}} \xi^{-1/2} d\xi) = \frac{a^2}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(ax)^2}{4t}}$$

Таким образом

$$(\int_0^t e^{-\frac{(ax)^2}{4\xi}} \xi^{-1/2} d\xi)^{(n+1)} = \frac{a^2}{\sqrt{t}} (e^{-\frac{(ax)^2}{4\xi}})^{n-1}$$

Отсюда и из (1.3) следует (2.10). Если в (2.10) воспользоваться неравенством (2.8), то в области положительности функции $H_{n-1}(\frac{ax}{2\sqrt{t}})$ получим при $n \geq 0$ оценку

$$|\int_0^t e^{-\frac{(ax)^2}{4\xi}}\xi^{-1/2}d\xi| \leqslant a^{2n}(2x)^{n-1}t^{-(n-1/2)}e^{-\frac{(ax)^2}{4t}} \tag{2.12}$$

Оценки (2.12) являются точными в смысле поведения при $t \to +\infty$ и $x \to +\infty$.

Оценки при $x \to +0$.

Будем предполагать, что функция $g(t)$ принадлежит классу Гельдера с показателем $\gamma \in (0,1)$, то есть при $t > 0$, $|h| < h_0$ имеет место оценка

$$|g(t+h) - g(t)| \leqslant M(t)|h|^\gamma \tag{2.13}$$

где константа $M(t)$ от h не зависит и $M(0) = 0$.

Оценим, при фиксированном $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{t}$,

$$\begin{aligned}|u(t,x) - g(t)| &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}|\int_{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2}g(t - \frac{a^2x^2}{4s^2})ds - \int_0^\infty e^{-s^2}g(t)ds| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2}|g(t - \frac{a^2x^2}{4s^2}) - g(t)|ds + \frac{2}{\sqrt{\pi}}|g(t)|\int_0^{\frac{ax}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}ds \leqslant \\ &\leqslant \frac{2M(t)(ax)^2}{2\sqrt{\pi}}\int_{\frac{ax}{2\sqrt{\pi}}}^\infty e^{-s^2}\frac{ds}{s^{2\gamma}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{ax}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}ds|g(t)|\end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь мы воспользуемся оценкой (2.13.)

Далее для $\gamma < \frac{1}{2}$ и $x \leqslant \frac{2\sqrt{t}}{a}$, получаем

$$\begin{aligned}|u(x,t) - g(t)| &\leqslant \frac{M(t)(ax)^2}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-s^2}s^{-2\gamma}ds + erf(\frac{ax}{2\sqrt{t}}|g(t)|) = \\ &= \frac{M(t)(ax)^2}{4\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2} - \gamma) + erf(\frac{ax}{4\sqrt{t}}|g(t)|)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Для $\gamma \geq \frac{1}{2}$ оценим

$$\begin{aligned}\int_{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2}\frac{ds}{s^{2\gamma}} &= \int_{\frac{ax}{\sqrt{t}}}^1 e^{-s^2}\frac{ds}{s^{2\gamma}} + \int_1^\infty e^{-s^2}\frac{ds}{s^{2\gamma}} \leqslant \\ &\leqslant \int_{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}^1 \frac{dx}{s^{2\gamma}} + \int_1^\infty e^{-s^2}ds \leqslant (\frac{2\sqrt{t}}{ax})^{2\gamma-1} + \int_0^\infty e^{-s^2}ds\end{aligned} \tag{2.16}$$

Пользуясь (2.16) в (2.14) получаем следующую оценку при $\gamma > \frac{1}{2}$

$$|u(x,t) - g(t)| \leqslant \frac{M(t)(ax)^{3-2\gamma}t^{\gamma-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}(2\gamma-1)} + M(t)(ax)^2 + erf(\frac{ax}{2\sqrt{t}})|g(t)| \tag{2.17}$$

Теперь для $g(t) \in H^{\beta}(0,\infty)$, где $\beta > \frac{1}{2}$, оценим $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x \to +0$

Учитывая условие $g(0) = 0$ из представления

$$u(t,x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{ax}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} g(t - \frac{a^2x^2}{4s}) ds$$

и последующей замены $\frac{a^2x^2}{4s} = \xi$ после интегрирования по частям получаем

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}[\int_0^t e^{-\frac{a^2x^2}{4\xi}} \xi^{-1/2} g'(t-\xi) d\xi - \int_0^t \xi^{-1/2} g'(\xi) d\xi] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \xi^{-1/2} g'(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (1 - e^{-\frac{a^2x^2}{4\xi}}) \xi^{-1/2} [g'(\xi) - g'(t-\xi)] d\xi + \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} g(t).$$

Отсюда следует неравенство

$$|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{d^{1/2}g(t)}{dt^{1/2}}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t |1 - e^{-\frac{a^2x^2}{\xi}}|\xi^{-1/2}|g'(\xi) - g'(t-\xi)| d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M_1(t)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (1 - e^{-\frac{a^2x^2}{4\xi}}) \xi^{\gamma - 1/2} d\xi \tag{2.18}$$

Используя (2.18), для произвольного малого $\varepsilon > 0$ и $0 < x < \varepsilon$ имеем оценку

$$|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{d^{1/2}g(t)}{dt^{1/2}}| \leqslant \frac{M_1(t)}{\sqrt{\pi}}[\int_0^{\varepsilon} (1 - e^{-\frac{a^2x^2}{4\xi}}) \xi^{\gamma-1/2} d\xi +$$
$$+ \int_{\varepsilon}^t (1 - e^{-\frac{a^2x^2}{4\xi}}) \xi^{\gamma-1/2} d\xi] \leqslant \frac{M_1(t)}{\sqrt{\pi}}[\int_0^{\varepsilon} \xi^{\gamma-1/2} d\xi + \frac{a^2x^2}{4} \int_{\varepsilon}^t \xi^{\gamma-3/2} d\xi]$$

Из которой, после стандартных вычислений и рассуждений, получаем неравенство

$$|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{d^{1/2}g(t)}{dt^{1/2}}| \leqslant \frac{M_1(t)}{\sqrt{\pi}}[\frac{2\varepsilon^{\gamma+1/2}}{2\gamma+1} + \frac{a^2}{2}\varphi(\varepsilon)], \tag{2.19}$$

где

$$\varphi(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2 t^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}}{2\gamma - 1} & ,\gamma > \frac{1}{2} \\ \frac{\varepsilon^{\frac{2\gamma+3}{2}}}{2(1-2\gamma)} & ,\gamma < \frac{1}{2} \\ \frac{\varepsilon^2}{2} ln\frac{t}{\varepsilon} & ,\gamma = \frac{1}{2} \quad 0 < \varepsilon < L \end{cases}$$

Литература.

1. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен : методы расчета тепловых и диффузионных потоков / Ю.И. Бабенко. - Л.:Химия, 1986 -144с.

2. Полянин А.Д.,Вязьмин А.В.,Журов А.И.,Казенин Д.А. / Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса.М.: Факториал, 1998 - 368с.

3. Сегё Г., Ортогональные многочлены. /М.: Изд.физ.-мат.лит. 1962г. 500с

4. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука. 1979 - 416с.

5. Костин А.В. Пространства $L_{p,\phi}$ и эволюционные уравнения в банаховом пространстве. Дифференциальные уравнения 1969 - N8. С 1615-1621.

6. Костин А.В., Костин В.А. К теории функциональных пространств Степанова. Воронеж. Издательско- полиграфический центр Воронежского государственного университета. 2007. - 259с.

Гришанина Г. Э., Мухамадиев Э. М.

О разрешимости задачи Дирихле для нелинейного уравнения

1. Формулировка основных результатов.

Рассмотрим в полуплоскости $\overline{\Omega} = \{(x, y) : y \geq 0\}$ краевую задачу

$$\Delta u = F(u), \quad y > 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in R, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, $\varphi(x)$ и $F(u)$- непрерывные функции на всей числовой оси. Ниже используем терминологию из [1-3]. Справедлива следующая теорема существования решения задачи (1).

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x)$ - ограниченная положительная функция, а $F(u)$- удовлетворяет условиям: $F(0) = 0, \quad F(u) > 0$ при $u > 0$. Тогда задача (1) имеет по крайней мере одно непрерывно дифференцируемое обобщенное решение $u(x, y)$, удовлетворяющее оценке*

$$0 \leqslant u(x, y) \leqslant u_0(x, y) \equiv \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{y^2 + (x - \xi)^2}, \quad y > 0, x \in (-\infty, \infty). \tag{2}$$

Поведение решения $u(x, y)$ при $y \to \infty$ характеризует следующая

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 неотрицательные ограниченные обобщенные решения задачи (1) удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{s \to \infty} \sup_{(x,y): y > s} [u(x, y) + |\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}| + |\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}|] = 0.$$

При дополнительных условиях о гладкости функции F обобщенное решение является классическим. А именно справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и функция F дополнительно удовлетворяет условию Гельдера на отрезке $[0, \varphi_0]$, где $\varphi_0 = \sup \varphi(x)$. Тогда задача (1) имеет классическое решение, удовлетворяющее оценке (2).*

В заключении приведем условия единственности решения задачи (1).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и функция $\varphi(x)$ равномерно непрерывна на всей оси, а функция F неубывающая на отрезке $[0, \varphi_0]$. Тогда задача (1) имеет единственное обобщенное решение, удовлетворяющее оценке (2).*

2. Доказательство теоремы 1.

Через $C = C(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных функций $v(x, y)$ в замкнутой полуплоскости $\overline{\Omega} = \{(x, y) : y \geq 0\}$ с нормой $||v|| = \sup\{|v(x, y)| : (x, y) \in \overline{\Omega}\}$. Через C_r обозначим подпространство пространства C, состоящее из функций с носителем, содержащимся в круге радиуса r с центром в нулевой точке.

Рассмотрим линейную задачу

$$\Delta u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{4}$$

где $f \in C_r$, φ - ограниченная непрерывная на всей оси функция.

Функция

$$u_0(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}, \quad y > 0. \tag{5}$$

является гармонической в области $y > 0$, принадлежит пространству C и удовлетворяет граничному условию (4). Рассмотрим интегральный оператор

$$(Pf)(x,y) = -\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad y \geq 0, \tag{6}$$

где функция источника (функция Грина) определяется равенством

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

Ясно, что $G(x,y,\xi,\eta) \equiv 0$ при $y = 0$ и $G(x,y,\xi,\eta) > 0$ при $y > 0, \eta > 0$. Функция $u_1(x,y)) \equiv (Pf)(x,y)$ для $f \in C_r$ непрерывна, имеет непрерывные частные производные первого порядка $(\partial/\partial x Pf)(x,y)$, $(\partial/\partial y Pf)(x,y)$, является обобщенным решением неоднородного уравнения (3) и удовлетворяет граничному условию $u_1(x,0) \equiv 0$.

Сформулируем в виде леммы некоторые свойства оператора P.

Лемма 1. *Линейные операторы* P, $\partial/\partial x P$, $\partial/\partial y P : C_r \to C, r > 0$ *являются вполне непрерывными.*

Пусть $\omega(x,y)$- такая бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция, что $\omega(x,y) \equiv 1$ при $x^2+y^2 \leqslant 1/4$ и $\omega(x,y) \equiv 0$ при $x^2+y^2 \geq 1$. Введём функцию

$$\omega_r(x,y) = \omega(x/r, y/r), \quad r > 0$$

и определим нелинейные операторы

$$(Fv)(x,y) = F[v(x,y)], \quad (F_r v)(x,y) = \omega_r(x,y)F[v(x,y)],$$

Лемма 2. *Операторы* $F : C \to C$, $F_r : C \to C_r, r > 0$ *непрерывны и ограниченное множество пространства* C *переводят в ограниченные множества.*

Доказательство леммы следует из свойства равномерной непрерывности и ограниченности непрерывной функции $F(u)$ на каждом отрезке.

Если φ непрерывная ограниченная на всей оси функция, то оператор A_r, определенный равенством

$$(A_r v)(x,y) = u_0(x,y) + (PF_r v)(x,y),$$

действует в пространстве C, причем для данной функции $v \in C$ его образ $u = A_r v$ является решением задачи (3)-(4), где $f(x,y) = \omega_r(x,y)F(v(x,y))$. По оператору $A_r v$ определим оператор $(A_r^+ v)(x,y) = (A_r v)(x,y)$, если $(A_r v)(x,y) \geq 0$ и $(A_r^+ v)(x,y) = 0$, если $(A_r v)(x,y) \geq 0$.

Лемма 3. *Пусть непрерывная ограниченная функция $\varphi(x) > 0$. Если функция $u \in C$ удовлетворяет уравнению*

$$u = A_r^+ u, \tag{7}$$

то она удовлетворяет и уравнению

$$u = A_r u. \tag{8}$$

Доказательство. Предположим, что функция $u(x,y)$ является решением уравнения (8) и существует такая точка (x_0, y_0), что $A_r u(x_0, y_0) < 0$. Тогда существует область D, содержащая эту точку и такая, что

$$A_r u(x,y) < 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D$$

и

$$A_r u(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \partial D.$$

Из уравнения (8) следует, что $u(x,y) = 0$ при $(x,y) \in D$. Следовательно, $F(u(x,y)) = F(0) = 0$ при $(x,y) \in D$ и поэтому функция

$$u_2(x,y)) = -(PF_r v)(x,y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty G(x,y;\xi,\eta)\omega_R(\xi,\eta)F(v(\xi,\eta))d\xi d\eta$$

является гармонической в области D. Кроме того, функция $u_0(x,y)$, определенная равенством (5), также гармоническая и, согласно определению области D, на границе этой области $u_0(x,y) = u_2(x,y))$. Следовательно, в силу теоремы о единственности гармонической функции [3], имеет место тождество $u_0(x,y) \equiv u_2(x,y)), \quad (x,y) \in D$. Но это противоречит предположению $A_R u(x_0,y_0) = u_0(x_0,y_0) - u_2(x_0,y_0)) < 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы. Лемма доказана.

Отметим, что справедливо и обратное: неотрицательное решение уравнения (8) является решением уравнения (7).

Следствие. *Если $u(x,y)$- неотрицательное решение уравнения (8), то оно удовлетворяет неравенству $0 \leqslant u(x,y) \leqslant u_0(x,y)$, где $u_0(x,y)$ - функция, определенная равенством (5).*

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. В силу лемм 1 и 2 операторы A_r и A_r^+ вполне непрерывные. Согласно определению оператора A_r^+ множество неотрицательных функций пространства C переводит в ограниченное множество функций, удовлетворяющих условию

$$0 \leqslant u(x,y) = (A_r^+ v)(x,y) \leqslant u_0(x,y), \quad y \geq 0.$$

В частности, оператор A_r^+ переводит в себя ограниченное замкнутое выпуклое множество

$$W = \{v = v(x,y) : v \in C, 0 \leqslant v(x,y) \leqslant u_0(x,y)\}.$$

В силу теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки, оператор A_r^+ в множестве W имеет по крайней мере одну неподвижную точку: $u_r(x,y) = (A_r^+ u_r)(x,y)$. В силу леммы 3 функция $u_r(x,y)$ является неподвижной точкой и оператора A_r: $u_r(x,y) = (A_r u)_r(x,y)$. Следовательно, функция $u_r(x,y)$ является решением краевой задачи

$$\Delta u = \omega_r(x,y)F[u(x,y)], \quad (x,y) \in \Omega, \tag{9}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{10}$$

Из внутренних оценок решения эллиптических уравнений (см., напр.,[2]) следует, что семейство равномерно ограниченных функций $\{u_r(x,y), \quad r > 1\}$ равностепенно непрерывно. Поэтому существует последовательность $\{u_{r_k}(x,y)\}$, где $r_k \to \infty$, которая сходится равномерно на каждом ограниченном подмножестве области Ω к некоторой функции $u_*(x,y)$ при $k \to \infty$. Очевидно, функция $u_*(x,y)$ удовлетворяет краевому условию $u_*(x,0) = \varphi(x)$. Покажем, что $u_*(x,y)$ является слабым решением задачи (1). Пусть $\psi(x,y)$ бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем из верхней полуплоскости $y > 0$, тогда $u_r(x,y)$ удовлетворяет равенству

$$\int\int_{y>0} u_r(x,y)\Delta\psi(x,y)dxdy = \int\int_{y>0} \psi(x,y)\omega_r(x,y)F(u_r(x,y))dxdy.$$

В этом равенстве переходя к пределу при $r = r_k \to \infty$ имеем

$$\int\int_{y>0} u_*(x,y)\Delta\psi(x,y)dxdy = \int\int_{y>0} \psi(x,y)F(u_*(x,y))dxdy.$$

Итак, функция $u_*(x,y)$ является обобщённым неотрицательным решением задачи (1). Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $u(x,y)$ - ограниченное неотрицательное решение задачи (1). Определим функцию

$$a(s) = \sup_{(x,y):y\geq s} u(x,y), \quad s \geq 0.$$

Так как функция $a(s)$ не возрастает, то существует

$$\lim_{s\to\infty} a(s) = a^*.$$

Докажем, что $a^* = 0$. Воспользуемся формулой Грина [3]

$$v(x,y) + \int\int_{K_\rho} G_\rho(x,y;\xi,\eta)\Delta v(\xi,\eta)d\xi d\eta = -\oint_{\partial K_\rho} \frac{\partial}{\partial n} G_\rho(x,y;\xi,\eta)v(\xi,\eta)ds, \tag{11}$$

$(x, y) \in K_\rho$, где K_ρ - круг радиуса $\rho > 0$ с центром в нуле,

$$G_\rho(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}[\ln\frac{1}{r} - \ln\frac{\rho}{r_0 r_1}], \quad \frac{\partial}{\partial n}G_\rho = -\frac{1}{2\pi}\frac{\rho^2 - r_0^2}{r^2}$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2, \quad r_0^2 = x^2 + y^2, \quad r_1^2 = (\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2,$$
$$r_0^2 x_1 = x\rho^2, r_0^2 y_1 = y\rho^2.$$

Представление (11) справедлива и для функции $v(x, y) = u(x + x_0, y + y_0)$, где (x_0, y_0) - заданная точка в верхной полуплоскости, $0 < \rho < y_0$:

$$u(x + x_0, y + y_0) + \int\int_{K_\rho} G_\rho(x, y; \xi, \eta)F[u(\xi + x_0, \eta + y_0)]d\xi d\eta =$$

$$= -\oint_{\partial K_\rho} \frac{\partial}{\partial n}G_\rho(x, y; \xi, \eta)u(\xi + x_0, \eta + y_0)ds. \tag{12}$$

Предположим, что $a^* > 0$ и $(x_k, y_k), y_{k+1} > y_k + 1$ такая последовательность, что $u(x_k, y_k) \to a^*$ при $k \to \infty$. В силу равномерной непрерывности ограниченного решения $u(x, y)$ на множестве $y \geq 1$, существует такое $0 < \rho_0 < 1$, что

$$|F[u(x, y)] - F[u(x_0, y_0)]| \leqslant \frac{1}{2}F(a^*) \quad \text{при} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant \rho_0^2, y \geq 1.$$

Из представления (12), полагая $x = y = 0$, имеем неравенство

$$u(x_0, y_0) + \min_{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 \leqslant \rho^2} F[u(\xi, \eta)]\frac{\rho^2}{4} \leqslant \max_{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 = \rho^2} u(\xi, \eta). \tag{13}$$

Здесь мы использовали следующие свойства функции Грина, которые следуют из равенства (11), если положим $v \equiv 1$ и $v \equiv \rho^2 - x^2 - y^2$:

$$1 \equiv -\oint_{\partial K_\rho} \frac{\partial}{\partial n}G_\rho(x, y; \xi, \eta)ds, \quad \rho^2 = 4\int\int_{K_\rho} G_\rho(0, 0; \xi, \eta)d\xi d\eta.$$

В неравенстве (13), подставляя $(x_0, y_0) = (x_k, y_k)$ и $\rho = \rho_0$ и затем переходя к пределу при $k \to \infty$, в силу выбора ρ_0, имеем

$$a^* + \frac{\rho_0^2}{8}F(a^*) \leqslant \limsup_{k\to\infty} \max_{(\xi - x_k)^2 + (\eta - y_k)^2 = \rho^2} u(\xi, \eta) \leqslant a^*$$

Полученное неравенство противоречит условию $F(a^*) > 0$. Равенство $a^* = 0$ доказано.

Теперь докажем, что

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{(x,y): y > s} [|\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}| + |\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}|] = 0. \tag{14}$$

Вычисляя из (12) частную производную $\partial u/\partial x$, получим

$$\partial u(x+x_0,y+y_0)/\partial x+\int\int_{K_\rho}\partial G_\rho/\partial x F[u(\xi+x_0,\eta+y_0)]d\xi d\eta=$$

$$=-\oint_{\partial K_\rho}\partial/\partial x\frac{\partial}{\partial n}G_\rho u(\xi+x_0,\eta+y_0)ds.$$

Из полученного равенства имеем

$$|\partial u(x_0,y_0)/\partial x|\leqslant C_1\max_{(\xi,\eta)\in K_\rho}F[u(\xi+x_0,\eta+y_0)]d\xi d\eta+C_2\max_{(\xi,\eta)\in K_\rho}u(\xi+x_0,\eta+y_0)],$$

где постоянные C_1, C_2 завият лишь от ρ. Из этой оценки и аналогичной оценки для $\partial u/\partial y$ и равенства $a_*=0$ получим справедливость равенства (14). Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теорем 3, 4.

Пусть функция $F(u)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$|F(v_1)-F(v_2)|\leqslant M|v_1-v_2|^\alpha, 0<\alpha<1$$

на отрезке $[0,\bar\varphi]$. Пусть $u(x,y)$ - ограниченное неотрицательное решение задачи (1). Для произвольной точки $(x_0,y_0), y_0>0$ частные производные $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ ограниченны на круге $K_\rho(x_0,y_0)=\{(x,y): r_0\leqslant\rho\},\quad 0<\rho<y_0,$. Поэтому функция $f(x,y)=F[u(x,y)]$ удовлетворяет условию Гельдера в круге $K_\rho(x_0,y_0)$ с центром в точке (x_0,y_0) радиуса $\rho>0$. Следовательно, согласно теореме о гладкости решения эллиптического уравнения [2], решение $u(x,y)$ имеет непрерывные по Гёльдеру частные производные второго порядка и поэтому оно является классическим решением. Теорема 3 доказана.

Для доказательства теоремы единственности 4 предположим, что задача (1) имеет два решения u_1 u_2 удовлетворяющие условиям

$$0\leqslant u_1(x,y),u_2(x,y)\leqslant u_0(x,y), D=\{(x,y): u_1(x,y)\neq u_2(x,y)\}\neq\emptyset.$$

Обозначим $w(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$. Пусть для определенности существует такая точка (x_0,y_0), что $w(x_0,y_0)>0$. В силу ограниченности функций $u_1(x,y),u_2(x,y)$ имеем $0<\bar w\equiv\sup_{y\geq 0}w(x,y)<\infty$. Выберем последовательность (x_k,y_k) такую, что $w(x_k,y_k)\to\bar w$ при $k\to\infty$. В силу теоремы 2 последовательность y_k ограниченна и поэтому, без ограничения общности можно предполагать, что она сходится к некоторому пределу $\bar y$ при $k\to\infty$. В силу равномерной непрерывности функции φ последовательности $\varphi(x+x_k)$ и $u_1(x+x_k,y),u_2(x+x_k,y)$ равностепенно непрерывны соответственно на прямой и замкнутой полуплоскости $y\geq 0$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что существуют пределы

$$\tilde\varphi(x)=\lim_{k\to\infty}\varphi(x+x_k),\tilde u_1(x,y)=\lim_{k\to\infty}u_1(x+x_k,y),\tilde u_2(x,y)=\lim_{k\to\infty}u_2(x+x_k,y)$$

равномерно на каждоом ограниченном множестве. Не трудно видеть, что функции $\tilde u_1(x,y),\tilde u_2(x,y)$ являются решением краевой задачи

$$\Delta u=F(u),\quad y>0,\quad u(x,0)=\tilde\varphi(x),\quad x\in R,$$

причем функция $\tilde{w}(x,y) = \tilde{u}_1(x,y) - \tilde{u}_2(x,y)$ удовлетворяет условию $\tilde{w}(0,\bar{y}) = \max \tilde{w}(x,y), y \geq 0 = \bar{w} > 0$. Функцию $\tilde{w}(x,y)$ представим в виде

$$\tilde{w}(x,y+\bar{y}) + \int\int_{K_\rho} G_\rho(x,y;\xi,\eta)\{F[\tilde{u}_1(\xi,\eta+\bar{y})] - F[\tilde{u}_2(\xi,\eta+\bar{y})]\}d\xi d\eta =$$

$$= -\oint_{\partial K_\rho} \frac{\partial}{\partial n} G_\rho(x,y;\xi,\eta)\tilde{w}(\xi,\eta+\bar{y})ds, \qquad (15)$$

где радиус ρ круга K_ρ выбран из условия, что $\min \tilde{w}(x,y+y_0) = 0, x^2+y^2 \leqslant \rho^2$. Из равенства (15) в силу свойства функции Грина, полагая $x = y = 0$ получим, что

$$\int\int_{K_\rho} G_\rho(0,0;\xi,\eta)\{F[\tilde{u}_1(\xi,\eta+\bar{y})] - F[\tilde{u}_2(\xi,\eta+\bar{y})]\}d\xi d\eta < 0.$$

Но это неравенство противоречит выбору ρ и условию монотонности функции F. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. Теорема 4 доказана.

Литература.

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения элиптического типа. Наука, 1964.
2. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Мир, 1966, 351 с.
3. Тихонов А. Н.,Самарский А. А. Уравнения математической физики. Наука, 1977, 736 с.

Дербушев А.В.

Приложение к исследованию дифференциальных операторов с потенциалом с нелокальным краевым условием

§1 Исследование дифференциального оператора $\mathcal{D}$ с нелокальным краевым условием $\alpha x(0) = \beta x(1) + \int\limits_0^1 a(s)x(s)ds$.

Исследуем спектральные свойства линейного дифференциального оператора:

$$\mathcal{D}x = i\dot{x}$$

действующего в $L_2(0,1)$ с областью определения $D(\mathcal{D})$, задаваемой краевыми условиями вида

$$\alpha x(0) = \beta x(1) + \int\limits_0^1 a(s)x(s)ds,$$

где $a \in L_2(0,1)$. Таким образом,

$$D(\mathcal{D}) = \{x \in W_2^1(0,1) : \alpha x(0) = \beta x(1) + \int\limits_0^1 a(s)x(s)ds\}.$$

Найдем собственные функции и собственные значения оператора D.

$$Dx = \lambda x$$

$$\alpha x(0) = \beta x(1).$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = ce^{\frac{\lambda}{i}t},$$

где c можно считать равным единице. Подставляя решение в краевое условие получим :

$$\alpha e^{\frac{\lambda}{i}0} = \beta e^{\frac{\lambda}{i}1}.$$

Если $\alpha \cdot \beta = 0$, то спектр $\sigma(D)$ оператора D пуст. Далее рассматриваются α и β со свойством $\alpha \cdot \beta \neq 0$). Обозначим $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma \neq 0$. Тогда

$$\gamma \cdot 1 = e^{\frac{\lambda}{i}},$$

и, следовательно,

$$\lambda_n = i \ln \gamma - 2\pi n,$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Собственные функции оператора D имеют вид : $e_n = e^{(i \ln \gamma - 2\pi n)t}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1.1. Оператор $\mathcal{D}$ замкнут, область определения $D(\mathcal{D})$ плотна в $L_2(0,1)$.[1]

Введем в рассмотрение оператор

$$U : L_2(0,1) \to L_2(0,1),$$

для которого

$$UD(\mathcal{D}) \subset D(F),$$

где $D(F) = \{x \in W_2^1(0,1) : x(0) = x(1) + \int\limits_0^1 a(s)x(s)ds\}$

$$Ux(t) = e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t).$$

Покажем , что выполнено равенство $\mathcal{D}U = UF$, где оператор $F = i\dot{x}(t) + qx(t)$, $D(F) = \{x \in W_2^1(0,1) : x(0) = x(1) + \int\limits_0^1 a(s)x(s)ds\}$,$p = (\ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta})$, т.е. операторы $\mathcal{D}$ и F подобны. Действительно,

$$\mathcal{D}Ux(t) = i(e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t))' =$$

$$ix'(t)e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)} + (\ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta})e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t),$$

$$U^{-1}x(t) = e^{(\ln\frac{1}{\alpha}t - \ln\frac{1}{\beta}(1-t))}x(t),$$

$$U^{-1}\mathcal{D}Ux(t) =$$

$$e^{-(\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t))}(ix'(t)e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)} + (\ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta})e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t)) =$$

$$ix'(t) + (\ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta})x(t) = ix'(t) + px(t),$$

где $p = (\ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta})$.

Возьмем $x \in D(\mathcal{D})$ и тогда

$$y(t) = Ux(t) = e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t),$$

$$y(0) - y(1) = e^{\ln\frac{1}{\alpha}\cdot 0 + \ln\frac{1}{\beta}\cdot 1}x(0) - e^{\ln\frac{1}{\alpha}\cdot 1 + \ln\frac{1}{\beta}\cdot 0}x(1) = \frac{1}{\alpha\beta}(\alpha x(0) - \beta x(1)) =$$

$$\int\limits_0^1 \tilde{a}(s)e^{\ln\frac{1}{\alpha}s + \ln\frac{1}{\beta}(1-s)}x(s)ds = \int\limits_0^1 \tilde{a}(s)y(s)ds,$$

где $\tilde{a}(s) = e^{-(\ln\frac{1}{\alpha}s + \ln\frac{1}{\beta}(1-s))}\frac{a(s)}{\alpha\beta}$. Заметим , что оператор F можно записать в виде

$$F = \mathcal{A} + qI,$$

где $\mathcal{A}x(t) = ix'(t)$ (спектральные свойства оператора $\mathcal{A}$ были изучены выше ;см. теоремы 1.2)[1], $Ix(t) = x(t)$. Таким образом , из доказанного следует

Лемма 1.2. Справедливо равенство $\sigma(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{A}) + q$.

Следующая теорема является обобщением полученных результатов для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$.

Теорема 1.1.. Существует такое $m \in \mathbb{N}$, что оператор $\mathcal{D} = i\frac{d}{dt} : D(\mathcal{D}) \subset L_2 \to L_2$ подобен оператору вида $A - J_m X_0 - qI$, где $X_0 \in \sigma_2(L_2)$ и его можно найти как решение нелинейного уравнения (см.теорему 1.1). Спектр оператора $\mathcal{D}$ состоит из собственных значений $\lambda_n + p, n \geq 1$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n\geq 1} |\lambda_n + q - 2\pi n|^2 < \infty,$$

где $q = (\ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta})$.

Исследование дифференциального оператора $\tilde{\mathcal{C}}$ с потенциалом с нелокальным краевым условием $\alpha x(0) = \beta x(1) + \int\limits_0^1 a(s)x(s)ds$.

Изучим спектральные свойства линейного дифференциального оператора:

$$\tilde{\mathcal{C}}x = ix'(t) + c(t)x(t)$$

действующего в L_2 с областью определения $D(\tilde{\mathcal{C}})$ $(c \in L_2(0,1))$, задаваемой краевым условием вида

$$\alpha x(0) = \beta x(1) + \int_0^1 a(s)x(s)ds.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$U : L_2(0,1) \to L_2(0,1),$$

для которого

$$UD(\tilde{\mathcal{C}}) \subset D(C),$$

$$Ux(t) = e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}Ux(t) = i(e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t))' + c(t)e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t) =$$

$$ix'(t)e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)} + (\ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta})e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t) + c(t)e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t) =$$

$$ix'(t)e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)} + \tilde{c}(t)e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t),$$

где $\tilde{c}(t) = \ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta} + c(t)$.

$$U^{-1}x(t) = e^{-(\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t))}x(t),$$

$$U^{-1}\tilde{\mathcal{C}}Ux(t) = e^{-(\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t))}(ix'(t)e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)} + \tilde{c}(t)e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t)) =$$

$$ix(t)' + \tilde{c}(t)x(t)$$

Возьмем $x \in D(\tilde{C})$

$$y(t) = Ux(t) = e^{\ln\frac{1}{\alpha}t + \ln\frac{1}{\beta}(1-t)}x(t)$$

$$y(0) - y(1) = e^{\ln\frac{1}{\alpha}\cdot 0 + \ln\frac{1}{\beta}\cdot 1}x(0) - e^{\ln\frac{1}{\alpha}\cdot 1 + \ln\frac{1}{\beta}\cdot 0}x(1) =$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}(\alpha x(0) - \beta x(1)) = \int\limits_0^1 \tilde{a}(s)e^{\ln\frac{1}{\alpha}s + \ln\frac{1}{\beta}(1-s)}x(s)ds = \int\limits_0^1 \tilde{a}(s)y(s)ds,$$

где $\tilde{a}(s) = e^{-(\ln\frac{1}{\alpha}s + \ln\frac{1}{\beta}(1-s))}\frac{a(s)}{\alpha\beta}$.

Таким образом оператор $\tilde{\mathcal{C}}$ подобен оператору $\mathcal{C} = i\frac{d}{dt} + \tilde{c}(t)$[2]. Поскольку подобные операторы имеют одинаковый спектр, то из доказаного следует

Лемма 1.3. $\sigma(\tilde{\mathcal{C}}) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(A) + \tilde{p}$, где $\tilde{p} = \int_0^1 \tilde{c}(\tau)d\tau = \int_0^1 c(\tau)d\tau + \ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta}$.

Следующая теорема является обобщением полученных результатов для операторов $\tilde{\mathcal{C}}$ и $\mathcal{C}$.

Теорема 1.2. Существует такое $m \in \mathbb{N}$, что оператор $\tilde{\mathcal{C}} = i\frac{d}{dt} + c(t) : D(\tilde{\mathcal{C}}) \subset L_2 \to L_2)$ подобен оператору вида $A - J_m X_0 - \tilde{p}I$, где $X_0 \in \sigma_2(L_2)$ и его можно найти как решение нелинейного уравнения (см.теорему 1.1)[1]. Спектр оператора $\tilde{\mathcal{C}}$ состоит из собственных значений $\lambda_n + \tilde{p}, n \geq 1$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n\geq 1}|\lambda_n + \tilde{p} - 2\pi n|^2 < \infty,$$

где $\tilde{p} = \int_0^1 \tilde{c}(\tau)d\tau = \int_0^1 c(\tau)d\tau + \ln\frac{1}{\alpha} - \ln\frac{1}{\beta}$.

Литература.

1. Дербушев А.В. Спектральные свойства одного класса дифференциальных операторов нелокальным краевым условием/ А.В.Дербушев //Вестник ВГУ. - 2007. -№ 1. - С.143-147.

2. Дербушев А.В. Спектральные свойства классов дифференциальных операторов и дифференциальных операторов с потенциалом с нелокальным краевым условием/ А.В.Дербушев //Труды математического факультета ВГУ. - 2007. -выпуск 11(новая серия). - С.77-87.

3.Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов: Учеб. пособие / А.Г. Баскаков. - Воронеж :Изд-во Воронеж. ун- та, 1987. - 164 с.

Диденко В.Б.

К спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов на конечномерных пространствах

О представлениях линейных отношений на конечномерных пространствах

Пусть X - конечномерное линейное пространство. Любое линейное подпространство $\Gamma \subseteq X \times X$ называется *линейным отношением* на пространстве X. Множество всех линейных отношений на X будем обозначать $LR(X)$. Каждое линейное отношение $\Gamma \in LR(X)$ является графиком некоторого многозначного отображения. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ Γ. Символом $EndX$ будем обозначать множество всех линейных операторов, определенных на всем X. Используемые далее понятия из теории линейных отношений(многозначных линейных операторов) можно найти в монографиях [1, 2] и в статье [1].

Областью определения $D(\Gamma)$ отношения $\Gamma \in LR(X)$ называется множество вида $D(\Gamma) = \{x : \exists y : (x, y) \in \Gamma\}$.

Для отношения $\Gamma \in LR(X)$ и множества $M \subset X$ определим множество вида $\Gamma(M) = \{y : \exists x \in M \cap D(\Gamma), (x, y) \in \Gamma\}$, называемое *образом* множества M. В частности, множество $\Gamma 0$ имеет вид $\Gamma 0 = \{y : (0, y) \in \Gamma\}$.

Отметим, что множества $D(\Gamma)$ и $\Gamma 0$ являются линейными подпространствами из X.

Пусть Γ - произвольное отношение из $LR(X)$. Тогда для любого элемента $x \in D(\Gamma)$ справедливо равенство $\Gamma x = y + \Gamma 0$, где y некоторый элемент из X, такой что $(x, y) \in \Gamma$.

Обратным к линейному отношению $\Gamma \in LR(X)$ называется линейное отношение $\Gamma^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \ : \ (x, y) \in \Gamma\}$.

Произведением линейных отношений $\Gamma_1, \Gamma_2 \in LR(X)$ называется линейное отношение вида $\Gamma_1\Gamma_2 = \{(x, z) : \exists y \in D(\Gamma_1) : (x, y) \in \Gamma_2,\ (y, z) \in \Gamma_1\}$.

Пусть Γ произвольное линейное отношение из $LR(X)$. Поскольку $\Gamma 0$ линейное подпространство из X , то найдётся такое подпространство X_Γ, что $X = X_\Gamma \oplus \Gamma 0$.

Определим линейный оператор $A_\Gamma : D(A_\Gamma) \subset X \to X$, с областью определения $D(A_\Gamma) = D(\Gamma)$. Пусть $\Gamma x = y + \Gamma 0$. Поскольку $X = X_\Gamma \oplus \Gamma 0$, то y представим в виде $y = y_\Gamma + y_{\Gamma 0}$, где $y_\Gamma \in X_\Gamma$, $y_{\Gamma 0} \in \Gamma 0$. Тогда $\Gamma x = y_\Gamma + \Gamma 0$. Положим

$$A_\Gamma x = y_\Gamma.$$

Оператор A_Γ называется *сечением* отношения Γ.

Пусть даны линейные операторы $A, B \in EndX$. Рассмотрим следующие линейные отношения :

$$\Gamma_1 = \{(Ax, Bx), x \in X\} = BA^{-1} \in LR(X), \tag{1}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : Ax = By\} = B^{-1}A \in LR(X). \tag{2}$$

Теорема 1 *Для того, чтобы произвольное отношение $\Gamma \in LR(X)$ было представимо в виде 1, для некоторых операторов $A, B \in EndX$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$dimD(\Gamma) + dim\Gamma 0 \leqslant dimX.$$

Теорема 2 *Для того, чтобы произвольное отношение $\Gamma \in LR(X)$ было представимо в виде 2, для некоторых операторов $A, B \in EndX$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$dimD(\Gamma) + dim\Gamma 0 \geq dimX.$$

Следствие 1 *Для любого отношения $\Gamma \in LR(X)$ существуют операторы $A, B \in EndX$ такие, что выполнено одно из представлений 1 или 2.*

Замечание 1 *Если выполнено условие утверждения 1, то оператор A можно выбрать проектором на $D(\Gamma)$, а если утверждения 2, то оператор B - проектором с ядром $KerB = \Gamma 0$. Так построенные представления для Γ назовем* каноническими*(хотя они определяются неоднозначно).*

Об условии непустоты резольвентного множества упорядоченной пары операторов

Пусть даны два линейных оператора A, B из $EndX$. Далее символом (A, B) будем обозначать упорядоченную пару линейных операторов.

К *резольвентному множеству* $\rho(A, B)$ упорядоченной пары операторов (A, B), где A, B из $EndX$, отнесем все числа λ из $\mathbb{K}$, для которых оператор $A - \lambda B$ обратим. Множество $\sigma(A, B) = \mathbb{K} \backslash \rho(A, B)$ назовем *спектром этой пары.*

Пусть $e_1, .., e_n$ - произвольный базис в пространстве X. Рассмотрим упорядоченную пару линейных операторов (A, B), где $A, B \in EndX$. Через $S_{e_1,..,e_n}(A, B)$ обозначим набор векторов, состоящий из максимального числа линейно независимых векторов из набора $\{Ae_1, .., Ae_n, Be_1, .., Be_n\}$, такой, что, если вектор Ae_i попал в набор, то Be_i в него не вошел. Число векторов, вошедших в $S_{e_1,..,e_n}(A, B)$, назовем сбалансированным рангом упорядоченной пары (A, B) относительно выбранного базиса $e_1, .., e_n$ и будем обозначать $Srang_{e_1,..,e_n}(A, B)$.

В следующем примере мы покажем, что сбалансированный ранг зависит от выбора базиса.

Пример 1 *Пусть X - двумерное линейное пространство с базисом e_1, e_2. Рассмотрим два оператора $A, B \in EndX$, определенные по правилу : $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1$, $Be_1 = e_2$, $Be_2 = e_2$. Очевидно, что в качестве $S_{e_1,e_2}(A, B)$ можно взять набор $\{Ae_1, Be_2\}$, а значит $Srang_{e_1,e_2}(A, B) = 2$.*

Теперь в качестве базиса в X возьмем набор $\{e'_1, e'_2\}$, где $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 - e_2$. Тогда $Ae'_1 = e_1$, $Ae'_2 = 0$, $Be'_1 = e_2$, $Be'_2 = 0$. Очевидно, что $Srang_{e'_1,e'_2} = 1$. Таким образом мы показали, что сбалансированный ранг зависит от выбора базиса.

Теорема 3 *Пусть A, B из $EndX$. Для того, чтобы резольвентное множество упорядоченной пары (A, B) было непусто, необходимо и достаточно, чтобы сбалансированный ранг упорядоченной пары был равен размерности пространства X при любом выборе базиса.*

Замечание 2 *Для проверки на пустоту резольвентного множества упорядоченной пары (A, B), достаточно найти сбалансированный ранг относительно базиса построенного следующим образом.*

Рассмотрим линейное отношение вида $\Gamma = A^{-1}B$. Через m обозначим такое натуральное число, что $\Gamma^{m-1}0 \neq \Gamma^m 0$, $\Gamma^m 0 = \Gamma^{m+1}0$. Тогда пространство X можно разложить в прямую сумму вида $X = E_1 \oplus ... \oplus E_m \oplus X_1$, где $E_1 = \Gamma 0$, $E_1 \oplus E_2 = \Gamma^2 0$, $E_1 \oplus ... \oplus E_m = \Gamma^m 0$. Выберем базис в X следующим образом : $e_1^1, .., e_{k_1}^1$ - базис в E_1,$e_1^2, .., e_{k_2}^2$ - базис в E_2,..,$e_1^m, .., e_{k_m}^m$ - базис в E_m, $e_1, .., e_k$ - базис в X_1.

Тогда, если вектора $Be_1^1, .., Be_{k_1}^1, .., Be_1^m, .., Be_{k_m}^m$ линейно независимы, то резольвентное множество упорядоченной пары (A, B) будет непусто. Если же вектора будут линейно зависимы, то сбалансированный ранг пары (A, B) относительно выбранного базиса будет меньше размерности пространства, а значит резольвентное множество упорядоченной пары (A, B) будет пусто.

Литература

[1] Favini A., Yagi A. Degenerate evolution equations in Banach spaces. New York: M. Dekker, 1998.

[2] Cross R. Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.

[3] Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. Математ. сборник. 2002. Т. 193, № 11. С. 3–42.

Здобнова С.В.

Абстрактная стохастическая задача Коши с мультипликативным шумом с генератором K-конволюционной полугруппы [3]

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с заданной на нем фильтрацией $\{\mathcal{F}_t |\ t \geq 0\}$, U, H — сепарабельные гильбертовы пространства.

Рассматриваем абстрактную стохастическую задачу Коши с мультипликативным шумом, записываемую интегральным уравнением

$$X(t) = \xi + \int_0^t AX(s)\ ds + \int_0^t f(s)\ ds + \int_0^t B(X(s))\ dW(s),\ \ t \in [0, T], \quad (1)$$

где оператор $A : D(A) \subset H \to H$ плотно определен и является генератором K-конволюционной полугруппы операторов в H $\{S_K(t) \mid t \in [0, \tau)\}$, $\tau > T$, f — предсказуемый процесс с локально непрерывными траекториями, оператор $B : D(B) \subset H \to L_{GS}(U, H)$ — линейный, случайная функция $W(t)$ — U-значный Q-винеровский процесс относительно фильтрации, $\xi = X(0)$ — H-значная $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина.

В этой работе под стохастическим интегралом по Q-винеровскому процессу понимаем интеграл от предсказуемого операторнозначного процесса $\Phi(t)$, для траекторий которого $P_{\text{п.н.}}$ выполняется условие $\int_0^T \|\Phi(s)Q^{1/2}\|^2_{GS}\ ds < \infty$, где $\|\Phi(s)Q^{1/2}\|^2_{GS} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi(s)Q^{1/2}e_j\|^2$, а $\{e_j\}$ — ортонормированный базис в U.

Определение 1 *Слабым K-конволюционным решением задачи (1) называется процесс $X(t)$, для любого $y \in D(A^*)$ и некоторой непрерывной скалярной функции $K(\cdot)$ потраекторно $P_{п.н}$ удовлетворяющий на $[0, T]$ уравнению*

$$\langle X(t), y\rangle = \langle \int_0^t K(s)\xi\ ds, y\rangle + \langle \int_0^t X(s)\ ds, A^*y\rangle +$$
$$+ \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr\ f(s)\ ds, y\rangle + \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr\ B(X(s))\ dW(s), y\rangle. \quad (2)$$

Определение 2 *Мягким K-конволюционным решением задачи (1) называется процесс $X(t)$ с интегрируемыми $P_{п.н.}$ траекториями, удовлетворяющий на $[0, T]$ уравнению*

$$X(t) = S_K(t)\xi + \int_0^t S_K(t-s)f(s)\ ds + \int_0^t S_K(t-s)B(X(s))\ dW(s). \quad (3)$$

[3] при поддержке РФФИ, грант 06-01-00148

Докажем справедливость следующей теоремы о взаимосвязи слабого и мягкого K-конволюционных решений задачи (1).

Теорема 1 *(I). Слабое K-конволюционное решение $X(t)$ задачи (1) единственно и удовлетворяет равенству*

$$X(t) = S_K(t)\xi + \int_0^t S_K(t-s)f(s)\ ds + Z(t),$$

где $Z(t)$ — такой процесс, что для всякого $t \in [0,T]$

$$\int_0^t K(t-s)Z(s)ds = \int_0^t S_K(t-s)\int_0^{t-s} K(r)dr\ B(X(s))\ dW(s).$$

(II). Процесс $X(t)$, удовлетворяющий условию $E\int_0^T \|B(X(s))Q^{1/2}\|_{GS}^2\ ds < \infty$, является мягким K-конволюционным решением задачи (1) тогда и только тогда, когда он является слабым K-конволюционным решением этой задачи.

Доказательство

(I). Пусть процесс $X(t)$ является слабым K-конволюционным решением задачи (1).

По определению слабого решения для любого $y \in D(A^*)$ и некоторой непрерывной скалярной функции $K(\cdot)$ $P_{\text{п.н}}$ при $t \in [0,T]$ справедливо потраекторное равенство

$$\langle X(t), y\rangle = \langle \int_0^t K(s)\xi\ ds, y\rangle + \langle \int_0^t X(s)\ ds, A^*y\rangle + \\ + \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr\ f(s)\ ds, y\rangle + \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr\ B(X(s))\ dW(s), y\rangle. \quad (4)$$

В работе [3] было доказано, что на $[0,T]$ для любого $y \in D(A^*)$ $P_{\text{п.н}}$ справедливы потраекторные равенства

$$\langle S_K(t)\xi, y\rangle = \langle \int_0^t K(s)\xi\ ds, y\rangle + \langle \int_0^t S_K(s)\xi\ ds, A^*y\rangle, \quad (5)$$

$$\langle \int_0^t S_K(t-s)f(s)ds, y\rangle = \\ = \langle \int_0^t \int_0^s S_K(s-r)f(r)dr\ ds, A^*y\rangle + \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr\ f(s)\ ds, y\rangle. \quad (6)$$

Почленно вычитая равенства (5) и (6) из равенства (4), для каждого $y \in D(A^*)$ $P_{\text{п.н}}$ получаем следующее справедливое на $[0,T]$ равенство

$$\langle X(t) - S_K(t)\xi - \int_0^t S_K(t-s)f(s)ds, y\rangle = \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr\, B(X(s))\, dW(s), y\rangle + \\ + \langle \int_0^t \Big(X(s) - S_K(s)\xi - \int_0^s S_K(s-r)f(r)dr\Big)\ ds, A^*y\rangle. \quad (7)$$

Чтобы продолжить рассуждения, докажем лемму.

Лемма 1 *Пусть оператор A является генератором K-конволюционной полугруппы операторов $S_K(t)$, процесс $Z(t)$ на $[0,T]$ для каждого $y \in D(A^*)$ удовлетворяет равенству*

$$\langle Z(t), y\rangle = \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr\ \Phi(s)\ dW(s), y\rangle + \langle \int_0^t Z(s)\ ds, A^*y\rangle. \tag{8}$$

$$\text{\textit{Тогда}} \int_0^t K(t-s)Z(s)ds = \int_0^t S_K(t-s)\int_0^{t-s} K(r)dr\ \Phi(s)\ dW(s).$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим функцию вида $y(s) = y_0 g(s)$, $s \in [0,T]$, где $y_0 \in D(A^*)$, $g \in C^1([0,T])$. Обозначим

$$F_{y_0}(t) := \langle Z(t), y_0\rangle = \langle \int_0^t Z(s)ds, A^*y_0\rangle + \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr\ \Phi(s)\ dW(s), y_0\rangle.$$

Применяя формулу Ито к процессу $F_{y_0}(s)g(s)$, получим

$$d[F_{y_0}(s)g(s)] = g(s)dF_{y_0}(s) + g'(s)F_{y_0}(s)ds,$$

откуда

$$F_{y_0}(t)g(t) = \int_0^t g'(s)F_{y_0}(s)ds + \int_0^t g(s)dF_{y_0}(s) = \int_0^t g'(s)\langle Z(s), y_0\rangle ds +$$
$$+ \int_0^t g(s)\langle Z(s)ds, A^*y_0\rangle + \int_0^t g(s)\langle \int_0^{t-s} K(r)dr\ \Phi(s)\ dW(s), y_0\rangle =$$
$$= \int_0^t \langle Z(s), y'(s) + A^*y(s)\rangle ds + \int_0^t \langle \int_0^{t-s} K(r)dr\ \Phi(s)\ dW(s), y(s)\rangle.$$

Таким образом, приходим к тому, что для всякой функции вида $y(s) = y_0 g(s)$, $s \in [0,T]$, а следовательно, и для любой непрерывно дифференцируемой функции со значениями в $D(A^*)$ справедливо равенство

$$\langle Z(t), y(t)\rangle = \int_0^t \langle Z(s), y'(s) + A^*y(s)\rangle ds + \int_0^t \langle \int_0^{t-s} K(r)dr\ \Phi(s)\ dW(s), y(s)\rangle. \tag{9}$$

Теперь введем в рассмотрение функцию $y(s) = S_K^*(t-s)y_0$, где $y_0 \in D(A^*)$, $s \in [0,t]$. Так как семейство $\{S_K^*(t) |\ t \in [0,\tau)\}$ — K-конволюционная полугруппа ([3]), то для всех $t \in [0,\tau)$ функция $y(s)$ непрерывно дифференцируема на $[0,t]$ и принимает значения в $D(A^*)$, тогда для скалярного произведения функции $y(s)$ и процесса $Z(t)$ верно соотношение (9). Свойства K-конволюционной полугруппы позволяют переписать соотношение (9) в виде

$$\langle Z(t), S_K^*(t-t)y_0\rangle = \int_0^t \langle Z(s), -A^*S_K^*(t-s)y_0 - K(t-s)y_0 + A^*S_K^*(t-s)y_0\rangle ds +$$
$$+ \int_0^t \langle \int_0^{t-s} K(r)dr\ \Phi(s)\ dW(s), S_K^*(t-s)y_0\rangle,$$

откуда следует справедливость для любого $y_0 \in D(A^*)$ равенства

$$\langle \int_0^t K(t-s)Z(s)ds - \int_0^t S_K(t-s) \int_0^{t-s} K(r)dr \ \Phi(s) \ dW(s), y_0 \rangle = 0.$$

Так как $\overline{D(A^*)} = H^*$, то из последнего получаем

$$\int_0^t K(t-s)Z(s)ds = \int_0^t S_K(t-s) \int_0^{t-s} K(r)dr \ \Phi(s) \ dW(s).$$

Лемма 1 доказана.

Применяя лемму 1 к процессу $Z(t) = X(t) - S_K(t)\xi - \int_0^t S_K(t-s)f(s)\ ds$, получаем соотношение части (I) теоремы.

Для доказательства единственности слабого решения воспользуемся леммой 1 еще раз. Для случая $\Phi(s) \equiv 0$ ее заключение принимает вид $\int_0^t K(t-s)Z(s)\ ds = 0$, откуда следует, что $Z(t) \equiv 0$. Таким образом, уравнение (8) при $\Phi(s) \equiv 0$ имеет только нулевое решение, а значит, при $\Phi(s) \neq 0$ не может быть двух различных решений. Тогда и процесс $X(t) = Z(t) + S_K(t)\xi + \int_0^t S_K(t-s)f(s)ds$ — слабое конволюционное решение задачи (1) — определяется однозначно.

(II). Доказательство тождественности понятий слабого и мягкого конволюционных решений при выполнении условия $E\int_0^T \|B(X(s))Q^{1/2}\|_{GS}^2\ ds < \infty$ проведем с помощью следующей леммы.

Лемма 2 *Пусть процесс* $\mathbb{W}_K^\Phi(t) = \int_0^t S_K(t-s)\Phi(s)\ dW(s), \quad t \in [0,T]$, *где* $\Phi(t)$ *— предсказуемый процесс такой, что* $E\int_0^T \|\Phi(s)Q^{1/2}\|_{GS}^2\ ds < \infty$. *Тогда процесс* $\mathbb{W}_K^\Phi(t)$ *на* $[0,T]$ *при всяком* $y \in D(A^*)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\langle \mathbb{W}_K^\Phi(t), y \rangle \ = \ \langle \int_0^t \mathbb{W}_K^\Phi(s)\ \ ds, A^*y \rangle + \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr \ \ \Phi(s)\ \ dW(s), y \rangle. \quad (10)$$

Доказательство леммы 2. Процесс $\mathbb{W}_K^\Phi(t)$ является предсказуемым процессом с интегрируемыми траекториями. Доказательство существования предсказуемых версий процесса повторяет соответствующее доказательство, приведенное в [2] для процесса $\int_0^t S(t-s)\Phi(s)\ dW(s)$, где $S(t)$ — полугруппа операторов класса C_0. Применяя стохастическую теорему Фубини, а затем свойства K-конволюционной полугруппы, получим

$$\langle \int_0^t \mathbb{W}_K^\Phi(s)\ ds, A^*y \rangle = \langle \int_0^t \int_0^s S_K(s-r)\Phi(r)\ dW(r)\ ds, A^*y \rangle =$$

$$\langle \int_0^t \int_r^t S_K(s-r)\ ds\ \Phi(r)\ dW(r), A^*y \rangle = \int_0^t \langle \int_0^{t-r} S_K(s)\ ds\ \Phi(r)\ dW(r), A^*y \rangle =$$

$$= \int_0^t \langle \Big(S_K(t-r) - \int_0^{t-r} K(s)\ ds \Big)\ \Phi(r)\ dW(r), y \rangle =$$

$$= \langle \mathbb{W}_K^\Phi(t), y \rangle - \langle \int_0^t \int_0^{t-r} K(s)\ ds\ \Phi(r)\ dW(r), y \rangle,$$

откуда и следует равенство (10). Лемма 2 доказана.

Пусть процесс $X(t)$ является слабым K-конволюционным решением задачи (1) и $E\int_0^T \|B(X(s))Q^{1/2}\|_{GS}^2\, ds < \infty$. Применяя доказанное в лемме 2 свойство "стохастической свертки" с $\Phi(s) = B(X(s))$, из равенства (2) определения слабого конволюционного решения получаем справедливое равенство

$$\langle X(t) - \mathbb{W}_K^{\Phi}(t), y\rangle = \langle \int_0^t K(s)\xi\, ds, y\rangle + \langle \int_0^t \Big(X(s) - \mathbb{W}_K^{\Phi}(s) \Big)\, ds, A^* y\rangle + \\ + \langle \int_0^t \int_0^{t-s} K(r)dr\ f(s)\, ds, y\rangle,\ t \in [0,T].$$

Из последнего следует, что процесс $Y(t) = X(t) - \mathbb{W}_K^{\Phi}(t)$ является слабым K-конволюционным решением задачи

$$Y(t) = \xi + \int_0^t AY(s)\, ds + \int_0^t f(s)\, ds,\ \ t \in [0,T],$$

значит, как было доказано в [3], он может быть представлен в виде $Y(t) = S_K(t)\xi + \int_0^t S_K(t-s)f(s)\, ds$. Из равенства

$$X(t) - \int_0^t S_K(t-s)B(X(S))\, dW(s) = S_K(t)\xi + \int_0^t S_K(t-s)f(s)\, ds, \quad t \in [0,T],$$

получаем требуемое равенство (3) определения мягкого конволюционного решения задачи.

Обратно, из справедливости равенства (3) с помощью леммы 2 устанавливается справедливость равенства (2). Таким образом, часть (II) теоремы доказана.

Теорема доказана полностью.

Литература

[1] Здобнова С. В. *Абстрактная стохастическая задача Коши с генератором полугруппы класса $(1, A)$ и с генератором K-конволюционной полугруппы.* Дисс. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2007. – 100 с.

[2] Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Pisa-Warsaw, 1992.(Encycl. Math. and Appl. 44)

IV Ануфриева У.А., Мельникова И.В. *Особенности и регуляризация некорректных задач Коши с дифференциальными операторами.* // Итоги науки: Современная математика. Фундаментальные направления. Дифференциальные уравнения и теория полугрупп. – М.: Изд-во РУДН, 2005. – Т. 14 – С. 3–156.

[3] Здобнова С.В. *Функция вида $u(t) = U(t)x + (U * f)(t)$ как решение абстрактной задачи Коши с генератором полугруппы класса $(1, A)$ или K-конволюционной полугруппы.* // XXVIII Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова: Сб. докладов. – М.: Изд-во ЦПИ МГУ, 2006. – С. 69–75.

[4] Здобнова С.В. *Абстрактная стохастическая задача Коши с генератором полугруппы класса $(1, A)$ и с генератором K-конволюционной полугруппы.* // Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 2007. – 100 с.

Ипатова В.М., Пыркова О.А.

Разрешимость задачи о фиксированной точке минимума

Различные методики обработки данных наблюдений широко применяются в науке и практике как для уточнения наименее известных параметров математических моделей, так и для исправления самих наблюдаемых полей, обычно неполных и зашумлённых. Общий подход к решению задач идентификации и вариационной ассимиляции данных состоит в том, что за критерий оптимальности берётся минимум целевого функционала стоимости. Можно предположить, что в определённых ситуациях будут полезны и некоторые другие критерии оптимальности, поэтому представляет интерес исследование следующей задачи о фиксированной точке минимума.

Пусть точно известно начальное состояние системы u_0, а распределённое внешнее силовое воздействие f требуется опрелелить с помощью функционала $S(u)$, характеризующего расхождение между модельным решением $u = u(u_0, f)$ и данными наблюдений. При поиске неизвестной функции f мы будем руководствоваться следующими соображениями:
1) потребуем, чтобы при данном фиксированном f функционал $S(u)$ нельзя было уменьшить, выбирая вместо u_0 какое-либо другое начальное состояние. Иначе говоря, u_0 является предписанной заранее точкой минимума и нам подходят только те функции f, для которых этот минимум имеет место;
2) среди всех f, удовлетворяющих условию 1), мы выберем ту функцию, на которой $S(u)$ принимает своё наименьшее возможное значение.

Разумеется, функционал $S(u)$ можно было бы уменьшить, если отказаться от требования 1) и провести оптимизацию по всему пространству. Поэтому рассматриваемый здесь алгоритм характеризует ситуацию, в которой информация о начальном состоянии u_0 считается гораздо более достоверной, чем содержащаяся в $S(u)$ информация о данных наблюдений. К тому же сам функционал $S(u)$ обычно включает в себя регуляризующие добавки, которые никак не связаны с наблюдаемыми полями, но позволяют корректно поставить задачу и эффективно организовать вычисления. В этом случае становится очевидным, что наименьшее значение функционала ещё не означает наилучшего согласования с наблюдениями, и кажется вполне разумным требование о существовании предписанной точки минимума.

В настоящей работе исследуются вопросы существования и единственности решения задачи 1) - 2). Метод доказательства состоит в том, что непосредственно вычисляются собственные значения оператора, входящего в уравнение для управления.

Теперь перейдём к точной формулировке нашей задачи.

Пусть A – не зависящий от времени линейный замкнутый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H с областью определения, плотной в H. Будем предполагать, что A – неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор в H, имеющий вполне непрерывный обратный.

Обозначим: $[\cdot,\cdot]$ – скалярное произведение в ; $X^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$ гильбертовы пространства со скалярным произведением $[u,v]_\alpha = [A^\alpha u, A^\alpha v]$; $Y^\alpha = L_2(0,T;X^\alpha)$, где $T < +\infty$, $Y = Y^0 = L_2(0,T;H)$; $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ – скалярное произведение и норма в Y; $(\cdot,\cdot)_\alpha$, $\|\cdot\|_\alpha$ – скалярное произведение и норма в Y^α;

$W = \{u \in Y^{\alpha+1/2}, \frac{du}{dt} \in Y^{\alpha-1/2}\}$; W^* – сопряженное с W пространство при отождествлении Y со своим сопряженным.

Рассмотрим эволюционную задачу

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad t \in (0,T); \quad u(0) = u_0,$$

ее разрешающий оператор $G : X^\alpha \times Y^{\alpha-1/2} \to W$ определим равенством $u = G(u_0; f) \quad \forall u_0 \in X^\alpha \quad \forall f \in Y^{\alpha-1/2}$.

Пусть $Q_0 : X^\alpha \to W$ и $Q : Y^{\alpha-1/2} \to W$ есть сужения G на множества $X^\alpha \times \{0\}$ и $\{0\} \times Y^{\alpha-1/2}$ соответственно. Сопряженные операторы $Q_0^* : W^* \to X^\alpha$ и $Q^* : W^* \to Y^{1/2-\alpha}$ определим сооотношениями

$$(Q_0 y, g) = [y, Q_0^* g]_\alpha \quad \forall y \in X^\alpha \quad \forall g \in W^*,$$

$$(Qf, g) = (f, Q^* g) \quad \forall f \in Y^{\alpha-1/2} \quad \forall g \in W^*.$$

Пусть на W задан функционал

$$S(u) = \frac{\gamma}{2}\|u_t + Au\|^2_{\alpha-1/2} + \frac{\sigma}{2}\|u\|^2_{\alpha+1/2} + \frac{1}{2}\|u - \hat{u}\|^2_\beta,$$

где $\gamma > 0$, $\sigma \geq 0$, $\beta \leq \alpha + 1/2$.

При заданных $u_0 \in X^\alpha$ и $\hat{u} \in Y^\beta$ введём множество всех функций $g \in Y^{\alpha-1/2}$, для которых $S(G(u_0;g)) \leq S(G(v_0;g)) \quad \forall v_0 \in X^\alpha$, и рассмотрим задачу об отыскании функции f такой, что:

(i) $f \in F$;

(ii) $S(G(u_0;f)) \leq S(G(u_0;g)) \quad \forall g \in F$.

Пусть $\{w_n\}$ – полная ортонормированная система в H, составленная из собственных функций $A : Aw_n = \lambda_n w_n$, $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Справедлива

Теорема 1. Если $\gamma > 0$ и $\sigma > 0$, $\beta \leq \alpha + 1/2$ или $\sigma \geq 0$, $\beta = \alpha + 1/2$, то задача (i)-(ii) имеет единственное решение при всех $u_0 \in X^\alpha$, $\hat{u} \in Y^\beta$.

Доказательство. Покажем, что множество F не пусто. Функция $f \in F$, если первая вариация $S(u)$ равна нулю на $u = G(u_0; f)$ и всех $v \in Q_0 X^\alpha$.

Возьмём $v = v_n = Q_0 w_n = e^{-\lambda_n t} w_n$, тогда

$$\delta S(u) v_n = \sigma(u, \lambda_n^{2\alpha+1} v_n) + (u - \hat{u}, \lambda_n^{2\beta} v_n) = 0.$$

Обозначим через $\psi_n(t) = e^{-\lambda_n t} - e^{\lambda_n(t-2T)}$, $c_n = \int_0^T \psi_n^2(t)dt = \frac{1}{2\lambda_n}(1 - e^{-4\lambda_n T}) - 2Te^{-2\lambda_n T}$, $m_n = \frac{1}{2}(\sigma\lambda_n^{2\alpha} + \lambda^{2\beta-1})$.

Из уравнения $-q_t + Aq = v_n$, $q(T) = 0$, находим $q = q_n = \frac{1}{2\lambda_n}\psi_n(t)w_n$. Используя равенство $(u, v_n) = (f, q_n) + \frac{1}{2\lambda_n}(1 - e^{-2\lambda_n T})[u_0, w_n]$, имеем

$$\delta S(u)v_n = m_n \int_0^T \psi_n(t)[f, w_n]dt + m_n(1 - e^{-2\lambda_n T})[u_0, w_n] - \lambda_n^{2\beta}(\hat{u}, v_n) = 0,$$

то есть

$$\int_0^T \psi_n(t)[f, w_n]dt \frac{\lambda_n^{2\beta}}{m_n}(\hat{u}, v_n) - (1 - e^{-2\lambda_n T})[u_0, w_n].$$

Следовательно, минимальное по норме $L_2(0,T)$ значение $[f, w_n]$ равно

$$\hat{f}_n(t)dt = \frac{1}{c_n}\left(\frac{\lambda_n^{2\beta}}{m_n}\int_0^T e^{-2\lambda_n t}[\hat{u}, w_n]dt - (1 - e^{-2\lambda_n T})[u_0, w_n]\right)\psi_n(t).$$

Нетрудно проверить, что функция $\hat{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n(t)w_n$ принадлежит $Y^{\alpha-1/2}$ и по построению $\hat{f} \in F$. Теперь осталось заметить, что линейное многообразие F слабо замкнуто в $Y^{\alpha-1/2}$, функционал $J(f) = S(G(u_0; f))$, $f \in F$, является строго выпуклым и слабо полунепрерывным снизу в $Y^{\alpha-1/2}$, а любая его минимизирующая последовательность ограничена, из чего следует, что $J(f)$ имеет на F точку минимума и эта точка минимума единственна.

Обозначим через $B = \sigma A^{2\alpha+1} + A^{2\beta}$, $D = \gamma A^{2\alpha-1} + Q^*BQ$. Условия (i)-(ii) можно записать в виде
$Q_0^*BQf = Q_0^*(A^{2\beta}\hat{u} - BQ_0u_0)$,
$Df - Q^*A^{2\beta}\hat{u} = Q^*BQ_0r_0, \quad r_0 \in X^\alpha$.
Исключая из этой системы f, получаем для r_0 уравнение $Mr_0 = \eta$, где
$M = Q_0^*BQD^{-1}Q^*BQ_0$, $\eta = Q_0^*(A^{2\beta}\hat{u} - BQ_0u_0) - Q_0^*BQD^{-1}Q^*A^{2\beta}\hat{u}$.

Теорема 2. Оператор M имеет собственные функции w_n, соответствующие собственным значениям

$$\mu_n = \frac{1}{2}(\sigma + \lambda_n^{2\beta-2\alpha-1})(1 - e^{-2\lambda_n T}) - \frac{\lambda_n(\sigma + \lambda_n^{2\beta-2\alpha-1})}{a_n + \lambda_n + (a_n - \lambda_n)e^{-2a_n T}}(1 - e^{-2\lambda_n T}),$$

где $a_n = \lambda_n\sqrt{1 + (\sigma + \lambda_n^{2\beta-2\alpha-1})/\gamma}$.

Если выполнены условия теоремы 1, то решением задачи (i)-(ii) является

$$f = D^{-1}Q^*A^{2\beta}\hat{u} + \frac{1}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\mu_n}\left(e^{-a_n t}e^{a_n(t-2T)}\right)w_n,$$

где

$$f_n = \frac{\lambda_n^2}{\rho_n}(\sigma + \lambda_n^{2\beta-2\alpha-1})\left(\frac{\lambda_n^{2\beta-2\alpha}}{\rho_n}\int_0^T h_n(t)[\hat{u}, w_n]dt - \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(\sigma + \lambda_n^{2\beta-2\alpha-1})(1 - e^{-2\lambda_n T})[u_0, w_n]\right),$$

$h_n(t) = (a_n + \lambda_n)e^{-a_n t} + (a_n - \lambda_n)e^{a_n(t-2T)}$, $\rho_n = h_n(0)$.

Доказательство. Пусть w – собственная функция A, $Aw = \lambda w$, тогда

$$Q^* B Q_0 w = \frac{b}{2\lambda}\psi(t)w, \quad \text{где} \quad b = \sigma\lambda^{2\alpha+1} + \lambda^{2\beta}, \quad \psi(t) = e^{-\lambda t} - e^{\lambda(t-2T)}.$$

Для $\xi = D^{-1}Q^* B Q_0 w$ имеем $\xi = y(t)w$,

$$\gamma\lambda^{2\alpha-1}\xi + bQ^*Q\xi\frac{b}{2\lambda}\psi(t)w,$$

из чего находим $y(T) = 0$, $\gamma\lambda^{2\alpha-1}(-y' + \lambda y)w + bQ\xi be^{-\lambda t}w$. Следовательно,

$$-y'(0) + \lambda y(0) = b\lambda^{1-2\alpha}/\gamma, \qquad \gamma\lambda^{2\alpha-1}(-y'' + \lambda^2 y) + by = 0,$$

то есть $y'' = a^2 y$, где $a = \sqrt{\lambda^2 + b\lambda^{1-2\alpha}/\gamma}$. Таким образом,

$$y(t) = \frac{b(e^{-at} - e^{a(t-2T)})}{\gamma\lambda^{2\alpha-1}(\lambda + a + (a-\lambda)e^{-2aT})}.$$

Далее рассмотрим уравнение $-q_t + Aq = bQy(t)w$, $q(T) = 0$. Его решением будет $q = z(t)w$, где

$$-z'' + \lambda^2 z = by(t), \qquad z(T) = 0, \qquad -z'(0) + \lambda z(0) = 0,$$

то есть

$$z(t) = \frac{1}{2}\lambda^{2\alpha}(\sigma + \lambda^{2\beta-2\alpha-1})(e^{-\lambda t} - e^{\lambda(t-2T)}) -$$
$$\frac{\lambda^{2\alpha+1}(\sigma + \lambda^{2\beta-2\alpha-1})(e^{-at} - e^{a(t-2T)})}{\lambda + a + (a-\lambda)e^{-2aT}}.$$

Заметив, что $Mw = \lambda^{-2\alpha}z(0)w$, получаем собственные значения M.

Для того, чтобы построить разложение $\eta = \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n w_n$, вычислим

$$[\eta, w] = [\eta, \lambda^{-2\alpha}w]_\alpha = \lambda^{2\beta-2\alpha}(\hat{u}, Q_0 w - Qy(t)w) - b\lambda^{-2\alpha}(Q_0 u_0, Q_0 w) =$$
$$\frac{\lambda^{2\beta-2\alpha}}{h(0)}\int_0^T h(t)[\hat{u}, w]dt - \frac{1}{2}(\sigma + \lambda^{2\beta-2\alpha-1})(1 - e^{-2\lambda T})[u_0, w],$$

где $h(t) = (\lambda + a)e^{-at} + (a-\lambda)e^{a(t-2T)}$.
Далее воспользуемся равенствами $r_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n w_n/\mu_n$ и $D^{-1}Q^*BQ_0 w = y(t)w$ для вычисления $f = D^{-1}(Q^*A^{2\beta}\hat{u} + Q^*BQ_0 r_0)$.

В рассмотренном нами функционале $S(u)$ функция $\hat{u}$ представляет собой некоторые данные наблюдений, в то время как первые два члена введены из чисто технических соображений и служат для регуляризации задачи. Интересно отметить, что при использовании для этой цели эквивалентных норм, могут возникать ситуации, когда исследуемая задача не имеет решения. Введём функционал

$$S(u) = \frac{\gamma}{2}\|u_t\|^2_{\alpha-1/2} + \frac{\sigma}{2}\|u\|^2_{\alpha+1/2} + \frac{1}{2}\|u - \hat{u}\|^2_\beta \tag{1}$$

и для него вновь будем рассматривать задачу (i)-(ii).

Теорема 3. Если $\gamma > 0$ и $\sigma > 0$, $\beta < \alpha+1/2$, $\sigma \neq \gamma$, или $\sigma \geq 0$, $\beta = \alpha+1/2$, $\sigma \neq \gamma - 1$, то задача (i)-(ii) для функционала $S(u)$, заданного в (1), имеет единственное решение при всех $u_0 \in X^\alpha$, $\hat{u} \in Y^\beta$.

Доказательство. Достаточно показать, что множество F не пусто. Функция $f \in F$, если для $u = G(u_0; f)$ и всех $v \in Q_0 X^\alpha$ имеет место равенство.

$$\delta S(u)v = \gamma(u_t, A^{2\alpha-1}v_t) + \sigma(Au, A^{2\alpha}v) + (u - \hat{u}, A^{2\beta}v) = 0.$$

Возьмём $v = v_n = Q_0 w_n = e^{-\lambda_n t} w_n$. Используя соотношения $u_t = f - Au$,

$$(u, v_n) = (f, q_n) + \frac{1}{2\lambda_n}(1 - e^{-2\lambda_n T})[u_0, w_n],\ q_n = \frac{1}{2\lambda_n}(e^{-\lambda_n t} - e^{\lambda_n(t-2T)})w_n\,,$$

находим

$$\begin{aligned}
&\delta S(u)v_n = \gamma(f, -\lambda_n^{2\alpha}v_n) + \Big((\gamma+\sigma)\lambda_n^{2\alpha+1} + \lambda_n^{2\beta}\Big)(u, v_n) - \lambda_n^{2\beta}(\hat{u}, v_n)\\
&\frac{1}{2}\int_0^T \psi_n(t)[f, w_n]dt + \frac{1}{2}m_n(1 - e^{-2\lambda_n T})[u_0, w_n] - \lambda_n^{2\beta}(\hat{u}, v_n) = 0,
\end{aligned}$$

где $\psi_n(t) = p_n e^{-\lambda_n t} - m_n e^{\lambda_n(t-2T)}$, $p_n = (\sigma - \gamma)\lambda_n^{2\alpha} + \lambda^{2\beta-1}$, $m_n = (\sigma+\gamma)\lambda_n^{2\alpha} + \lambda^{2\beta-1}$.

Минимальное по норме $L_2(0, T)$ значение $[f, w_n]$ равно

$$\hat{f}_n(t)dt = \frac{1}{c_n}\left(2\lambda_n^{2\beta}\int_0^T e^{-\lambda_n t}[\hat{u}, w_n]dt - m_n(1 - e^{-2\lambda_n T})[u_0, w_n]\right)\psi_n(t),$$

где

$$c_n = \int_0^T \psi_n^2(t)dt = \frac{p_n^2}{2\lambda_n}(1 - e^{-2\lambda_n T}) - 2p_n m_n T e^{-2\lambda_n T} + \frac{m_n^2}{2\lambda_n}e^{-2\lambda_n T}(1 - e^{-2\lambda_n T})\,.$$

В условиях нашей теоремы функция $\hat{f} = \sum_{n=1}^\infty \hat{f}_n(t)w_n$ принадлежит $Y^{\alpha-1/2}$ и по построению $\hat{f} \in F$.

Из доказательства теоремы 3 следует, что при $\sigma = \gamma$, $\beta < \alpha + 1/2$ или $\sigma = \gamma - 1$, $\beta = \alpha + 1/2$, ряд для функции $\hat{f}$ может расходиться в $Y^{\alpha-1/2}$, то есть множество F может быть пустым для заданных $u_0 \in X^\alpha$ и $\hat{u} \in Y^\beta$. Таким образом, применённый в (1) способ регуляризации гарантирует только ограниченность минимизирующих последовательностей, но не гарантирует существование хотя бы одного элемента f такого, что на u_0 реализуется минимум функционала $I(v_0) = S(G(v_0; f))$, $\quad v_0 \in X^\alpha$.

В заключение отметим, что результаты этой работы могут быть использованы на практике для вариационной ассимиляции данных наблюдений в линейных моделях и в моделях с малой нелинейностью.

Калитвин А.С.

О фредгольмовости многомерных интегральных уравнений Романовского

В 1932 году В.И. Романовский рассмотрел в работе [1] цепи Маркова, в которых вероятности различных значений случайной величины X в каком—нибудь опыте зависят от значений X в двух предыдущих опытах. Такие цепи были названы им двусвязными, а их изучение приводит к однородному интегральному уравнению

$$u(x,y) = \lambda \int_a^b \varphi(t,x,y)u(t,x)dt. \tag{1}$$

Уравнение (1) и неоднородное интегральное уравнение

$$u(x,y) = \lambda \int_a^b \varphi(t,x,y)u(t,x)dt + f(x,y) \tag{2}$$

были исследованы В.И. Романовским в работе [1] (см. также [2]) методом, аналогичным методу определителей Фредгольма, в предположении непрерывности заданных функций $\varphi(t,x,y)$ и $f(x,y)$. Характерная особенность уравнений (1) и (2) связана с перестановкой переменных у неизвестной функции под знаком интеграла и интегрированием ее по одной из двух переменных. При более общих предположениях эти и другие классы уравнений подобного типа изучались в [3].

Естественным обобщением двусвязных цепей Маркова являются многосвязные цепи Маркова. В этом случае рассматривается непрерывная случайная переменная X со значениями в конечном интервале (a,b). Опытам с этой переменной присваиваются номера $1,2,\ldots$. Опыты $1,2,\ldots,n$ образуют начальное звено №0, опыты $2,3,\ldots,n+1$ — звено №1 и так далее. Бесконечная последовательность этих звеньев составляет многосвязную цепь Маркова [1,2], если выполняются следующие условия.

Значения $x_1,x_2,\ldots,x_n$ переменной X в начальном звене удовлетворяют дифференциальному закону теории вероятностей $p_0(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — начальному закону. Дифференциальный закон равенства $X = x_n$ в каком-нибудь опыте дается функцией $\varphi(t,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ при условии, что в n предыдущих опытах

$$X = t, \quad X = x_1, \ldots, \quad X = x_{n-1}.$$

При этом должно выполняться равенство

$$\int_a^b \varphi(t,x_1,\ldots,x_n)dx_n = 1.$$

Пусть $p_k(x_1,...,x_n)$ — дифференциальный закон вероятностей того, что в звене №k $\quad X=x_1,...,X=x_n$, а о результатах других опытов ничего не известно. Тогда

$$p_{k+1}(x_1,...,x_n)=\int\limits_a^b p_k(t,x_1,...,x_{n-1})\varphi(t,x_1,...,x_n)dt. \tag{3}$$

Если теперь $p_k(x)$ — дифференциальный закон вероятностей равенства $X=x$ в k — ом опыте при условии, что результаты других опытов неизвестны, то

$$p_k(x)=\int\limits_a^b...\int\limits_a^b p_{k-n-1}(t_1,...,t_n)\varphi(t_1,...,t_n,x)dt_1...dt_n.$$

Полагая в (3) $p_k(x_1,...,x_n) = \lambda^{-k}u(x_1,...,x_n)$, получим, что функция $u(x_1,...,x_n)$ удовлетворяет многомерному однородному интегральному уравнению

$$u(x_1,...,x_n)=\lambda\int\limits_a^b\varphi(t,x_1,...,x_n)u(t,x_1,...,x_{n-1})dt. \tag{4}$$

Уравнение (4) и неоднородное интегральное уравнение

$$u(x_1,...,x_n)=\lambda\int\limits_a^b\varphi(t,x_1,...,x_n)u(t,x_1,...,x_{n-1})dt+f(x_1,...,x_n) \tag{5}$$

изучалось В.И. Романовским при условии непрерывности заданных функций $\varphi(t,x_1,...,x_n)$ и $f(x_1,...,x_n)$ [1,2]. В данной работе эти уравнения изучаются при более общих предположениях. Характерной особенностью уравнений (4) и (5) является циклическая перестановка $(x_1,\ldots,x_{n-1},t)\to(t,x_1,\ldots,x_{n-1})$ переменных у неизвестной функции под знаком интеграла и последующее интегрирование по одной из n переменнных.

Пусть $T=[a,b]$, $D=T^n$, $C=C(D)$ — пространство непрерывных на D функций, $L_k=L^1(T^k)$ и $C(L_k)$ — пространство непрерывных вектор-функций со значениями в L_k $\ (k=1,...,n)$. $C(L_k)$ состоит из функций $a(t_1,...,t_k,x_1,...,x_n)$, для которых

$$\sup_D\int\limits_{T^k}|a(t_1,...,t_k,x_1,...,x_n)|dt_1...dt_k<\infty \tag{6}$$

(здесь и далее интегралы понимаются в смысле Лебега) и

$$\int\limits_{T^k}|a(t_1,...,t_k,x_1,...,x_n)-a(t_1,...,t_k,\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)|dt_1...dt_k\to 0 \tag{7}$$

при $x_1 \to \bar{x}_1, ..., x_n \to \bar{x}_n$. $C(L_k)$ $(k = 1, ..., n)$ — банахово пространство относительно нормы

$$||a||_{C(L^k)} = \sup_D \int\limits_{T^k} |a(t_1, ..., t_k, x_1, ..., x_n)| dt_1 ... dt_k.$$

Через Φ обозначим линейный оператор, определяемый равенством

$$\Phi u(x_1, ..., x_n) = \int\limits_T \varphi(t, x_1, ..., x_n) u(t, x_1, ..., x_{n-1}) dt, \tag{8}$$

где $\varphi \in C(L_1)$, а $u \in C(D)$. Оператор Φ действует в пространстве $C(D)$ и непрерывен.

Действительно, так как $\varphi \in C(L_1)$, а $u \in C(D)$, то подынтегральная функция в (8) принадлежит $C(L_1)$. По теореме о непрерывной зависимости интеграла от параметра [4, с. 242] функция Φu непрерывна, т.е. оператор (8) действует в $C(D)$. Ограниченность оператора Φ вытекает из оценки

$$||\Phi u||_C = \max_D \left| \int\limits_D \varphi(t, x_1, ..., x_n) u(t, x_1, ..., x_{n-1}) dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_D \int\limits_D |\varphi(t, x_1, ..., x_n)| \max_D |u(t, x_1, ..., x_{n-1})| dt = ||\varphi||_{C(L_1)} \cdot ||u||_C.$$

Таким образом, оператор Φ действует в $C(D)$, непрерывен и $||\Phi|| \leqslant ||\varphi||_{C(L_1)}$.

Поэтому уравнения (4) и (5) с ядром φ из $C(L_1)$ естественно рассматривать в $C(D)$ как операторные уравнения $u = \lambda \Phi u$ и

$$u = \lambda \Phi u + f, \quad f \in C(D), \tag{9}$$

в которых Φ не является компактным оператором в $C(D)$, если он не совпадает с нулевым оператором. Следовательно, к уравнениям (5) и (9) непосредственно не применима теория Фредгольма. Следующая теорема показывает, что основные результаты этой теории, тем не менее, распространяются на уравнения (5) и (9) в $C(D)$.

Теорема. *Пусть $\varphi \in C(L_1)$ и $f \in C(D)$. Тогда для уравнений (5) и (9) в $C(D)$ справедлива альтернатива Фредгольма.*

Доказательство. Достаточно проверить компактность оператора Φ^n в $C(D)$, так как компактность оператора Φ^m при некотором натуральном m влечет справедливость альтернативы Фредгольма для оператора $I - \Phi$ [5, с. 511].

Докажем компактность в $C(D)$ оператора Φ^n. С применением теоремы Фубини и равенства (8) имеем

$$\Phi^1 u(x_1, ..., x_n) = \int\limits_T \varphi(t_1, x_1, x_2, ..., x_n) u(t_1, x_1, ..., x_{n-1}) dt_1,$$

$$\Phi^2 u(x_1,...,x_n) = \int\limits_{T^2}\int \varphi(t_2,x_1,x_2,...,x_n)\varphi(t_1,t_2,x_1,...,x_{n-1})\times$$
$$\times u(t_1,t_2,x_1,...,x_{n-2})dt_1dt_2,$$

....

$$\Phi^n u(x_1,...,x_n) = \int\limits_{D}...\int \varphi(t_n,x_1,x_2,...,x_n)\varphi(t_{n-1},t_n,x_1,...,x_{n-1})\times ...$$
$$\times\varphi(t_1,t_2,...,t_n,x_1)u(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n,$$

где u — произвольная функция из $C(D)$. Ядро оператора $\Phi^1 = \Phi$ — функция $\varphi(t,x_1,...,x_n)$ — принадлежит пространству $C(L_1)$. Покажем, что ядро оператора Φ^2 принадлежит $C(L_2)$, то есть удовлетворяет условиям (6) и (7) при $k=2$. Имеем

$$\int\limits_{T^2}\int |\varphi(t_2,x_1,...,x_n)\varphi(t_1,t_2,x_1,...,x_{n-1})|dt_1dt_2 =$$

$$= \int\limits_T \left[|\varphi(t_2,x_1,...,x_n)|\int\limits_T |\varphi(t_1,t_2,x_1,...,x_{n-1})|dt_1\right]dt_2 \leqslant ||\varphi||^2_{C(L_1)}.$$

Следовательно, ядро оператора Φ^2 удовлетворяет условию (6), а справедливость условия (7) для этого ядра вытекает из выполнения условия (7) для функции φ и из оценки

$$\int\limits_{T^2}\int |\varphi(t_2,x_1,x_2,...,x_n)\varphi(t_1,t_2,x_1,...,x_{n-1})-$$

$$-\varphi(t_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)\varphi(t_1,t_2,\bar{x}_1,...,\bar{x}_{n-1})|dt_1dt_2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{T^2}\int |\varphi(t_2,x_1,...,x_n)-\varphi(t_2,\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)||\varphi(t_1,t_2,x_1,...,x_{n-1})|dt_1dt_2+$$

$$+\int\limits_{T^2}\int |\varphi(t_2,\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)||\varphi(t_1,t_2,x_1,...,x_{n-1})-\varphi(t_1,t_2,\bar{x}_1,...,\bar{x}_{n-1})|dt_1dt_2 \leqslant$$

$$\leqslant ||\varphi||_{C(L_1)}\left[\int\limits_T |\varphi(t_2,x_1,...,x_n)-\varphi(t_2,\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)|dt_2+\right.$$

$$\left.+\int\limits_T\left(\int\limits_T |\varphi(t_1,t_2,x_1,...,x_{n-1})-\varphi(t_1,t_2,\bar{x}_1,...,\bar{x}_{n-1})|dt_1\right)dt_2\right].$$

Аналогично показывается, что ядро оператора Φ^k принадлежит $C(L_k)$ при других k.

Таким образом, ядро интегрального оператора Φ^n принадлежит пространству $C(L_n)$. В силу критерия компактности интегрального оператора в $C(D)$ [6, с. 101] оператор Φ^n компактен в $C(D)$. Теорема доказана.

Отметим, что если φ – непрерывная функция, то она принадлежит $C(L_1)$. Поэтому утверждение теоремы справедливо для многомерных интегральных уравнений Романовского с непрерывными ядрами. Утверждение теоремы справедливо, если φ – ограниченная измеримая функция, имеющая разрывы только вдоль конечного числа поверхностей $t = \gamma(x_1, \ldots, x_n)$ с непрерывной функцией γ; более того, оно справедливо, если ограниченность функции φ заменить неравенством $||\varphi(\cdot, x_1, \ldots, x_n)||_{L^p} \leqslant c < \infty \quad (1 < p < \infty)$, так как при этих условиях $\varphi \in C(L_1)$ [7, с. 40-41]. Так же, как и в [7, с. 90-92], доказывается, что ядра типа потенциала

$$\varphi(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\psi(t, x_1, \ldots, x_n)}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k |x_k - t|^{\gamma_k}},$$

где ψ – непрерывная функция, $0 < \gamma_k < 1$ и a_k $(k = 1, \ldots, n)$ – неотрицательные числа, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, принадлежит пространству $C(L_1)$. Тогда утверждение теоремы справедливо для многомерного интегрального уравнения Романовского с ядром типа потенциала.

Литература

[1] Romanovskij V. Sur une classe d'équations intégrales linéares // Acta Mathematica. 1932. V. 59. – P. 99–208.

[2] Романовский В.И. Избранные труды. Т. 2: Теория вероятностей, статистика и анализ. Ташкент: Наука. 1964. – 390 с.

[3] Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ. 2007. – 195 с.

[4] Акилов Г.П., Макаров Б.М., Хавин В.П. Элементарное введение в теорию интеграла. Л.: ЛГУ. 1969. – 350 с.

[5] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1984. – 752 с.

[6] Забрейко П.П. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. – 448 с.

[7] Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. C– теория. Липецк: ЛГПУ. 2004. –195 с.

Калитвин А.С., Карлова М.Ю.

О матричных операторах потенциала и типа потенциала с частными интегралами

В заметке приводятся условия действия матричных операторах потенциала и типа потенциала, логарифмического потенциала и типа логарифмического потенциала с частными интегралами в пространствах вектор - функций. Рассматриваются операторы вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{gathered}(A_{ij}y)(t,s) = c_{ij}(t,s)y(t,s) + \mathcal{D}\int_T l_{ij}(t,s,\tau)y(\tau,s)d\tau + \\ + \mathcal{D}\int_S m_{ij}(t,s,\sigma)y(t,\sigma)d\sigma + \mathcal{D}\iint_D n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)y(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\end{gathered} \qquad (1)$$

— операторы с частными интегралами, T и S — компактные множества в конечномерных пространствах R^p и R^q с мерой Лебега, $t \in T$, $s \in S$, $D = T \times S$, $y : D \to R$, ядра $l_{ij} : D \times T \to R$, $m_{ij} : D \times S \to R$, $n_{ij} : D \times D \to R$ — измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега, $i, j = 1, \dots, n$.

Обозначим через $C(D)$ пространство непрерывных на D функций, а через U — пространство непрерывных на D вектор - функций со значениями в R^n. Элементами пространства U являются вектор - функции $u(t,s) = (u_1(t,s), \dots, u_n(t,s))$, где $u_i \in C(D)$ $(i = 1, \dots, n)$. U — банахово пространство с нормой

$$\|u\|_U = \Big\| \|u_i\|_{C(D)} \Big\|_{R^n}.$$

Пусть V — пространство вектор - функций $v(t,s) = (v_1(t,s), \dots, v_n(t,s)\ )$, где $v_i \in L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty,\ i = 1, \dots, n)$. V — банахово пространство относительно любой из следующих норм:

$$\|v\|_V = \Big\| \|v_i\|_{L^p(D)} \Big\|_{R^n},\ \|v\|_V = \| \|v(t,s)\|_{R^n} \|_{L^p(D)}.$$

Теорема 1. *Оператор A действует в пространстве U (в пространстве V) точно тогда, когда операторы A_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ действуют в $C(D)$ (в $L^p(D)$). При этом оператор A непрерывны.*

Доказательство теоремы проведем для случая пространства V. В случае пространства U оно аналогично.

Необходимость. Пусть оператор A действует в пространстве V. Пространство V представим в виде прямой суммы $V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \dots \oplus V^{(n)}$, где подпространства $V^{(1)}, V^{(2)}, ..., V^{(n)}$ состоят из вектор - функций $v^{(1)}(t,s) = (y(t,s), 0, \dots, 0)$, $v^{(2)}(t,s) = (0, y(t,s), 0, \dots, 0)$, $\dots$, $v^{(n)}(t,s) = (0, \dots, 0, y(t,s))$ соответственно, а $y \in L^p(D)$. Тогда $v = v^{(1)} + v^{(2)} + \dots + v^{(n)}$ и $Av = Av^{(1)} + Av^{(2)} + \dots + Av^{(n)}$. При этом, очевидно,

$$Av^{(1)} = \begin{pmatrix} A_{11}y \\ A_{21}y \\ \dots \\ A_{n1}y \end{pmatrix},\ Av^{(2)} = \begin{pmatrix} A_{12}y \\ A_{22}y \\ \dots \\ A_{n2}y \end{pmatrix},\ \dots,\ Av^{(n)} = \begin{pmatrix} A_{1n}y \\ A_{2n}y \\ \dots \\ A_{nn}y \end{pmatrix}.$$

По условию оператор A действует в V. Так как $V^{(1)} \subset V$, то $Av^{(1)} \in V$, что равносильно включениям $A_{i1}y \in L^p(D)$ $(i = 1, \dots, n)$, где y — произвольная функция из $L^p(D)$. Последние включения означают, что операторы $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$ действуют в $L^p(D)$. Аналогично доказывается действие в $L^p(D)$ операторов A_{ij} $(i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, n)$. Так как действующие в $L^p(D)$ операторы A_{ij} непрерывны [1,2], то отсюда вытекает непрерывность в V оператора A. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть линейные операторы A_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ действуют в пространстве $L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Тогда они непрерывны [1,2]. Следовательно, оператор A_i, определяемый при каждом $i = 1, \dots, n$ равенством $A_i v = \sum_{j=1}^n A_{ij} v_j$, действует из V в $L^p(D)$ и непрерывен. Тогда оператор

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix},$$

где $A_1 = (A_{11}, \dots, A_{1n}), \dots, A_n = (A_{n1}, \dots, A_{nn})$, очевидно, действует в V и непрерывен. Теорема доказана.

Операторами потенциала с частными интегралами называют операторы вида (1) с ядрами

$$\begin{gathered} l_{ij}(t,s,\tau) = |t-\tau|^{-\alpha_{ij}},\ m_{ij}(t,s,\sigma) = |s-\sigma|^{-\beta_{ij}}, \\ n_{ij}(t,s,\tau,\sigma) = |(t,s)-(\tau,\sigma)|^{-\gamma_{ij}}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $0 < \alpha_{ij} < p$, $0 < \beta_{ij} < q$, $0 < \gamma_{ij} < p+q$ $(i, j = 1, \dots, n)$, $|\cdot - \cdot|$ — расстояние в одном из пространств R^p, R^q, R^{p+q}, а логарифмическими потенциалами с частными интегралами — операторы (1) с ядрами

$$\begin{gathered} l_{ij}(t,s,\tau) = |\ ln\,|t-\tau||^{-\alpha_{ij}},\ m_{ij}(t,s,\sigma) = |ln\,|s-\sigma||^{-\beta_{ij}}, \\ n_{ij}(t,s,\tau,\sigma) = |ln\,|(t,s)-(\tau,\sigma)||^{-\gamma_{ij}}, i, j = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{3}$$

Оператор (1) с ядрами (2) назовем матричным потенциалом с частными интегралами, а с ядрами (3) — матричным логарифмическим потенциалом с частными интегралами.

Так как операторы потенциала и логарифмического потенциала с частными интегралами действуют в $C(D)$ и в $L^p(D)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ [1,3], то отсюда и из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Матричный потенциал и матричный логарифмический потенциал с частными интегралами действуют в пространствах U и V и непрерывен.*

Операторами типа потенциала и типа логарифмического потенциала с частными интегралами называют операторы вида (1) с ядрами

$$l_{ij}(t,s,\tau)=a_{ij}(t,s,\tau)\,|t-\tau|^{-\alpha_{ij}}\,,\ m_{ij}(t,s,\sigma)=b_{ij}(t,s,\sigma)\,|s-\sigma|^{-\beta_{ij}}\,,\\ n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)=c_{ij}(t,s,\tau,\sigma)\,|(t,s)-(\tau,\sigma)|^{-\gamma_{ij}} \tag{4}$$

и

$$l_{ij}(t,s,\tau)=a_{ij}(t,s,\tau)\,|\,ln\,|t-\tau||^{-\alpha_{ij}}\,,\\ m_{ij}(t,s,\sigma)=b_{ij}(t,s,\sigma)\,|\,ln\,|s-\sigma||^{-\beta_{ij}}\,,\\ n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)=c_{ij}(t,s,\tau,\sigma)\,|\,ln\,|(t,s)-(\tau,\sigma)||^{-\gamma_{ij}}\,, \tag{5}$$

где $0<\alpha_{ij}<p$, $0<\beta_{ij}<q$, $0<\gamma_{ij}<p+q$ $(i,j=1,\dots,n)$, а $|\cdot-\cdot|$ — расстояние в одном из пространств R^p, R^q, R^{p+q}.

Матричным оператором типа потенциала и типа логарифмического потенциала с частными интегралами назовем оператор (1) с ядрами (4) и (5) соответственно.

Операторы типа потенциала и типа логарифмического потенциала с частными интегралами и ограниченными измеримыми (непрерывными) функциями a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$ действуют в пространстве $L^p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ (в пространстве $C(D)$) [1,3]. В силу теоремы 1 справедлива

Теорема 3. *Матричный оператор типа потенциала и типа логарифмического потенциала с частными интегралами и ограниченными измеримыми (непрерывными) функциями a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$ действуют в пространстве V (в пространстве U) и непрерывны.*

Аналогичные утверждения имеют место для матричных операторов с частными интегралами, ядра которых допускают представления (4) и (5).

Литература. 1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с. 2. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.p. 3. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. С — теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.

Карабутова Т.В.

Пространство кусочно-постоянных функций

1. Введение. В работе строится метрическое пространство $\mathbb{P}_\tau$ кусочно-постоянных функций $x(t)$, $t \in [0,\tau]$, $\tau > 0$, имеющих на компакте $[0,\tau]$, $\tau > 0$, только лишь конечное множество скачков. Метрика d_τ в пространстве $\mathbb{P}_\tau$ вводится таким образом, что это пространство оказывается сепарабельным. Построение функционального пространства $\mathbb{P}_\tau$ производится нами с целью изучения слабо компактных относительно метрики d_τ множеств $\mathfrak{P}$ распределений вероятностей P, определённых на $\mathbb{P}_\tau$. При этом неполнота пространства $\mathbb{P}_\tau$ оказывается несущественной [4]. Слабая компактность любого множества $\mathfrak{P}$ вероятностных мер P на $\mathbb{P}_\tau$ может быть интерпретирована как слабая компактность соответствующего множества случайных процессов $\tilde{x}$ с кусочно-постоянными траекториями, принадлежащими $\mathbb{P}_\tau$. Именно по этой причине, свойство сепарабельности пространства $\mathbb{P}_\tau$ оказывается очень важным, так как вероятностные меры случайных процессов должны быть непрерывны в топологии этого пространства, с одной стороны, а, с другой стороны, они должны строиться на счётно-порождённой σ-алгебре подмножеств пространства $\mathbb{P}_\tau$. Поэтому, в частности, кажущийся естественным подход к решению этой задачи - конструирование вероятностных мер на подходящем линейном нормированном пространстве, содержащем очень широкий запас функций $x(t)$, $t \in [0,\tau]$, например, на линейном пространстве функций $x(t)$ на $[0,\tau]$, обладающих ограниченной вариацией, не является адекватным. Это связано с тем, что пространство функций ограниченной вариации, снабжённое топологией, определяемой нормой $||x(t)|| = |x(0)| + \mathrm{Var}\{x(t); t \in [0,\tau]\}$ функций $x(t)$, не является сепарабельным.

Предлагаемая нами конструкция метрики является видоизменением для пространства $\mathbb{P}_\tau$ метрики пространства Скорохода [4], состоящего из более широкого множества функций на $[0,\tau]$, а именно тех, которые не имеют разрывов второго рода. Необходимость специального изучения вводимого нами пространства $\mathbb{P}_\tau$ объясняется, с одной стороны, тем, что его метрика более удобна с точки зрения приложений – конструирования случайных процессов с кусочно-постоянными траекториями, а, с другой стороны, такого рода процессы, естественным образом, появляются в задачах математической физики [2]. Простейшими примерами таких процессов являются марковские (и полумарковские) цепи с непрерывным временем. Точки разрывов траекторий этих процессов составляют ординарные случайные потоки [3].

2. Пространство $\mathbb{P}_\tau$. Рассмотрим линейное многообразие $\mathbb{P}_\tau$ *кусочно-постоянных функций* со значениями в $\mathbb{R}$, определённых на $[0,\tau]$. Каждая функция $x(t)$ из $\mathbb{P}_\tau$ полностью определяется числом $a_0 \in \mathbb{R}$ и парой конечных числовых последовательностей $\mathsf{a} = \langle a_k \neq 0; k = 1 \div m\rangle$, $\mathsf{t} = \langle t_k > 0; k = 1 \div m\rangle$

одинаковой длины $m \in \mathbb{N}$, где m – число скачков этой функции. При этом функция $x(t)$ определяется формулой

$$x(t) = a_0 + \sum_{k:\sum_{j=1}^{k} t_j \le t} a_k \,. \tag{1}$$

Точки

$$\tau_k = \sum_{j=1}^{k} t_j \,, \quad k = 1 \div m$$

являются точками разрыва этой функции. Поэтому, ввиду ограничения $\tau_m < \tau$, компоненты последовательности t удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{m} t_k < \tau \,.$$

Компоненты a_k последовательности a являются скачками функции $x(t)$ в точках τ_k. Согласно (1), функции $x(t)$ являются непрерывными справа.

Нашей целью является введение на многообразии $\mathbb{P}_\tau$ метрики, в которой это многообразие превратилось бы в сепарабельное метрическое пространство, обладающее тем свойством, что минимальная $\sigma-$ алгебра, содержащая все цилиндрические множества

$$\Lambda[t_1, x_1; ...; t_n, x_n] = \{x(t) : x(t_1) < x_1, ..., x(t_n) < x_n\} \,, \quad n \in \mathbb{N} \,,$$

совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств этого пространства. При этом необходимо позаботиться о том, чтобы метрика была достаточно "сильной". Это обеспечит наличие не очень широкого класса сходящихся последовательностей. В частности, пополнение $\mathbb{P}_\tau$ на основе этой метрики не будет очень богатым. Присоединяемые к $\mathbb{P}_\tau$, при таком пополнении, функции будут похожими на кусочно-постоянные функции вида (1).

Обозначим посредством U_τ множество всех непрерывных монотонно возрастающих на $[0,\tau]$ функций $u(x)$, для которых $u(0) = 0$, $u(\tau) = \tau$, то есть $u(x)$ является биекцией $u : [0,\tau] \mapsto [0,\tau]$ и $u \in \mathbb{C}[0,\tau]$. Множество U_τ является группой относительно операции композиции функций, а именно, для каждой пары функций u_1 и u_2 из U_τ определена функция $(u_1 * u_2)(x) = u_1(u_2(x))$, получаемая такой композицией, которая также принадлежит U_τ. При этом функция $u(x) = x$ является единицей группы U_τ и для каждой функции $v \in U_\tau$ определена обратная функция v^{-1}, которая также принадлежит U_τ и которая является обратным элементом в группе U_τ по отношению к v, так как $(v^{-1} * v)(x) = (v * v^{-1})(x) = x$.

Каждая функция $x(t)$ из $\mathbb{P}_\tau$ имеет конечную вариацию

$$\mathrm{Var}\{x(t); t \in [0,\tau]\} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{l} |x(s_i) - x(s_{i-1})|; \langle s_1, s_2, ..., s_l \rangle \in (0,\tau)^l, l \in \mathbb{N} \right\} \,,$$

где $s_0 = 0$, $s_1 < s_2 < ... < s_l$, которая равна

$$\mathrm{Var}\{x(t)\} = \sum_{k=1}^{m} |a_k| \,. \tag{2}$$

Определим, для каждой пары функций $x(t)$ и $y(t)$ из $\mathbb{P}_\tau$, значение функционала

$$d_\tau[x(t), y(t)] = |a_0 - b_0| + \inf_{u \in U_\tau} \left[\mathrm{Var}\{x(t) - y(u(t))\} + \max|t - u(t)|\right], \tag{3}$$

где функция $x(t)$ определяется числом a_0 и последовательностями a, t, согласно формуле (1), а функция $y(t)$, соответственно, числом b_0 и последовательностями $\mathsf{b} = \langle b_k; k = 1 \div n\rangle$, $\mathsf{s} = \langle s_k; k = 1 \div n\rangle$ по формуле

$$y(t) = b_0 + \sum_{k : \sum_{j=1}^{k} s_j \le t} b_k \,. \tag{4}$$

Докажем, что функционал d_τ определяет метрику в $\mathbb{P}_\tau$.

Теорема 1 *Для каждой пары функций $x(t)$ и $y(t)$ из $\mathbb{P}_\tau$ имеют место следующие соотношения:*

1). $d_\tau[x(t), x(t)] = 0$ и равенство $d_\tau[x(t), y(t)] = 0$ влечёт $x(t) = y(t)$;

2). $d_\tau[x(t), y(t)] = d_\tau[y(t), x(t)]$;

3). $d_\tau[x(t), y(t)] \le d_\tau[x(t), z(t)] + d_\tau[z(t), y(t)]$ для любой функции $z(t) \in \mathbb{P}_\tau$.

□ Для доказательства первой части утверждения п.1), достаточно положить в (3) $y(t) = x(t)$ и $u(x) = x$. Наоборот, из равенства $d_\tau[x(t), y(t)] = 0$ следует $u(x) = x$ и, следовательно, $\mathrm{Var}\{x(t) - y(t)\} = 0$. Это влечёт $x(t) = y(t) = $const, что, вместе с равенством $a_0 = b_0$, даёт $x(t) = y(t)$.

Утверждение п.2) вытекает из соотношения

$$d_\tau[x(t), y(t)] = |a_0 - b_0| + \inf_{u \in U_\tau} \left[\mathrm{Var}\{x(t) - y(u(t))\} + \max|t - u(t)|\right] =$$

$$= |a_0 - b_0| + \inf_{u^{-1} \in U_\tau} \left[\mathrm{Var}\{x(u^{-1}(t)) - y(t)\} + \max|u^{-1}(t) - t|\right] = d_\tau[y(t), x(t)] \,.$$

Докажем утверждение п.3). Пусть $x(t), y(t)$ и $z(t)$ – некоторые функции из $\mathbb{P}_\tau$. Для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$, для которых выполняются соотношения Тогда

$$d_\tau[x(t), y(t)] \le |a_0 - b_0| + \mathrm{Var}\{x(t) - y(u_2(u_1(t)))\} + \max|t - u_2(u_1(t))| \le$$

$$\le |a_0 - c_0| + \mathrm{Var}\{x(t) - z(u_1(t))\} + \max|t - u_1(t)| +$$

$$+ |c_0 - b_0| + \mathrm{Var}\{z(u_1(t)) - y(u_2(u_1(t)))\} + \max|u_1(t) - u_2(u_1(t))| =$$

$$= |a_0 - c_0| + \mathrm{Var}\{x(t) - z(u_1(t))\} + \max|t - u_1(t)| +$$

$$+ |c_0 - b_0| + \mathrm{Var}\{z(t) - y(u_2(t))\} + \max|t - u_2(t)| \,,$$

так как $u_1(t)$ является биекцией отрезка $[0, \tau]$ в себя. Учитывая неравенства (5), получаем

$$d_\tau[x(t), y(t)] \le d_\tau[x(t), z(t)] + d_\tau[z(t), y(t)] + 2\varepsilon\,.$$

Откуда, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, и вытекает неравенство п.3). ■

3. Свойство сепарабельности. Таким образом, мы построили метрическое пространство $\mathbb{P}_\tau$. Это пространство, очевидным образом, неполно. Например, рассмотрим последовательность $\langle x_n(t); n \in \mathbb{N}\rangle$ функций $x_m(t)$, для каждой из которых $a_0 = 0$, точки разрыва $\mathsf{t} = \langle t_1, ..., t_m\rangle$ и скачки $\mathsf{a} = \langle a_1, ..., a_m\rangle$ определяются как начальные упорядоченные наборы длиной m соответствующих бесконечных последовательностей $\langle t_k; k \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle a_k; k \in \mathbb{N}\rangle$, где

$$t_k = \frac{1}{k+1}\,, \quad a_k = \frac{1}{2^k}\,.$$

Тогда, эта последовательность функций фундаментальна в метрике d_τ, так как при $l > m$

$$d_\tau[x(t), y(t)] = \inf_{u \in U_\tau} \left[\mathrm{Var}\{x_m(t) - x_l(u(t))\} + \max|t - u(t)|\right] \le$$

$$\le \sum_{k=m+1}^{l} a_k < \frac{1}{2^m} \to 0$$

при $m \to \infty$, где в правой части положено $u(t) = t$. Однако, эта последовательность не сходится к кусочно-постоянной функции, так как предельная функция имеет бесконечно много скачков.

Тем не менее, полнота не является необходимым свойством метрического функционального пространства $\mathbb{P}_\tau$ для его применимости к изучению слабой сходимости случайных процессов, типичные траектории которых являются его элементами. По этой причине, мы отложим изучение пополнения пространства $\mathbb{P}_\tau$ и установим, прежде всего, его сепарабельность и опишем его предкомпактные подмножества. Докажем вспомогательное утверждение.

множество функций из $\mathbb{P}_\tau$, имеющих в точности n точек разрыва. Тогда для каждой пары функций $x(t)$ и $y(t)$ из H_n, определяемых по формуле (1), соответственно, числами $a_0 = x(0)$ и $b_0 = y(0)$, а также последовательностями $\mathsf{a} = \langle a_1, ..., a_n\rangle$, $\mathsf{t} = \langle t_1, ..., t_n\rangle$ и $\mathsf{b} = \langle b_1, ..., b_n\rangle$, $\mathsf{s} = \langle s_1, ..., s_n\rangle$, имеет место неравенство

$$d_\tau[x(t), y(t)] \le |a_0 - b_0| + \sum_{j=1}^{n} \left(|a_j - b_j| + |t_j - s_j|\right)\,. \tag{6}$$

□ Определим линейные функции

$$u_1(t) = \frac{t_1}{s_1}\,t\,; u_j(t) = \tau_j + \frac{t_j}{s_j}(t - \sigma_j)\,, \quad j = 2 \div n\,; u_{n+1}(t) = \tau + \frac{\tau - \tau_n}{\tau - \sigma_n}(t - \tau)\,, \tag{7}$$

Эти функции удовлетворяют условиям $u_1(0) = 0$, $u_1(\sigma_1) = \tau_1$; $u_j(\sigma_{j-1}) = \tau_{j-1}$, $u_j(\sigma_j) = \tau_j$ при $j = 2 \div n$; $u_{n+1}(\sigma_n) = \tau_n$, $u_{n+1}(\tau) = \tau$. Положим $u(t) = u_1(t)$ при $t \in [0, s_1]$; $u(t) = u_j(t)$ при $t \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ и $u(t) = u_{n+1}(t)$ при $t \in [\sigma_n, \tau]$. Тогда кусочно-линейная функция $u(t)$ непрерывна. Она обращается в нуль при $t = 0$ и равна τ при $t = \tau$. Так как $\langle \tau_i < \tau; i = 1 \div n \rangle$ – монотонно возрастающая последовательность, то функция $u(t)$ монотонно возрастает. Следовательно, $u(t) \in U_\tau$.

Оценим по модулю разность $(t - u(t))$. Так как функция $u(t)$ кусочно-линейна, то

$$\max |t - u(t)| = \max_{j=1,\dots,n+1} \max\{|t - u_j(t)| \, ; t \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\} .$$

Максимальное значение для линейных функций $(t - u_j(t))$ достигается на концах разрешённого, для каждой из них, интервала изменения аргумента. Тогда,

$$\max\{|t - u_j(t)| \, ; t \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\} = \max\{|\sigma_{j-1} - \tau_{j-1}|, |\sigma_j - \tau_j|\} .$$

Следовательно,

$$\max |t - u(t)| = \max_{j=1 \div n} \left| \sum_{i=1}^{j} (t_i - s_i) \right| \le \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i| . \tag{8}$$

Теперь, оценим сверху расстояние $d_\tau[x(t), y(t)]$, положив в определении (3), в качестве функции $u(t) \in U_\tau$, построенную выше кусочно-линейную функцию и применим оценку (8),

$$d_\tau[x(t), y(t)] \le |a_0 - b_0| + \mathrm{Var}\{x(u(t)) - y(t)\} + \sum_{i=1}^{n} |t_i - s_i| . \tag{9}$$

Наконец, заметив, что точками разрыва функции $(x(u(t)) - y(t))$ являются точки σ_j, в которых она претерпевает скачки, равные, соответственно, $(a_j - b_j)$, , $j = 1 \div n$, получим, что

$$\mathrm{Var}\{x(u(t)) - y(t)\} = \sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j| .$$

Подставляя это выражение в (9), получаем неравенство (6). ■

□ Если некоторые из чисел a_j, $j = 1 \div n$, либо t_j, $j = 1 \div n$ обращаются в нуль, то доказательство леммы остаётся в силе. Кусочно-линейная функция $u(t)$ при этом остаётся непрерывной и монотонно неубывающей. Однако, у неё остаётся m полуинтервалов линейного изменения, так как те из них, у которых $t_j = 0$, вырождаются в точку. ■

Докажем теперь основное утверждение этого пункта.

□ Установим наличие в $\mathbb{P}_\tau$ счётного всюду плотного множества. Пусть $\mathfrak{S}$ – множество функций $x(t)$ из $\mathbb{P}_\tau$, каждая из которых имеет рациональное число $a_0 = x(0)$ и все компоненты в определяющих их, согласно формуле (1), последовательностях a и t также рациональны. Тогда, множество $\mathfrak{S}_n$ функций из $\mathfrak{S}$, имеющих ровно n точек разрыва, равномощно некоторому подмножеству в $\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q}^n \times (\mathbb{Q} \cap (0,\tau))^n)$, где первый сомножитель представляет значения $a_0 = x(0)$, сомножитель $\mathbb{Q}^n$ представляет значения последовательностей a длины n, и сомножитель $(\mathbb{Q} \cap (0,\tau))^n$ содержит значения последовательности t, на компоненты которой наложено дополнительное условие $\sum\limits_{j=1}^{n} t_j < \tau$. Множество $\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q}^n \times (\mathbb{Q} \cap (0,\tau))^n)$ счётно. Следовательно, $\mathfrak{S}_n$ счётное множество функций и, поэтому, множество $\mathfrak{S} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n$ также счётно.

Пусть $y(t)$ – произвольная функция из $\mathfrak{S}$. Пусть также она имеет $n \in \mathbb{N}$ точек разрыва и определяется числом $b_0 = y(0)$ и последовательностями скачков $\mathsf{b} = \langle b_1, ..., b_n \rangle$ и расстояний $\mathsf{s} = \langle s_1, ..., s_n \rangle$ между точками разрыва. Для данного фиксированного числа $\varepsilon > 0$ подберём рациональное число $a_0 \in \mathbb{Q}$ так, чтобы $|a_0 - b_0| < \varepsilon/2$ и рациональные числа $a_i \in \mathbb{Q}$, $t_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1 \div n$ так, чтобы имели место неравенства $|t_i - s_i| < \varepsilon/4n$, $|a_i - b_i| < \varepsilon/4n$, $i = 1 \div n$. По найденным числам $a_0, a_1, ..., a_n$ и $t_1, ..., t_n$ построим функцию $x(t)$, согласно формуле (1). Эта функция принадлежит $\mathfrak{S}_n$. Воспользовавшись неравенством (6), получим верхнюю оценку для её расстояния от функции $y(t)$,

$$d_\tau[x(t), y(t)] \le \varepsilon/2 + \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon/4n + \varepsilon/4n) = \varepsilon\,. \quad \blacksquare$$

4. Предкомпактные множества в $\mathbb{P}_\tau$. Достаточный критерий предкомпактности множеств функций в пространстве $\mathbb{P}_\tau$ даётся следующим утверждением.

□ Покажем, что любая последовательность функций в любом из множеств $H(n, M)$ содержит фундаментальную последовательность, которая сходится к функции из этого множества. Пусть имеется последовательность $\langle x_l(t) \in H(n, M); l \in \mathbb{N} \rangle$. Построим на основе функций этой последовательности числовую последовательность $\langle x_l(0) = a_{0,l}; l \in \mathbb{N} \rangle$. Так как $|a_{0,l}| \le M$, то из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\langle x_{l_k^{(0)}}(0) = a_{0,l_k^{(0)}}; k \in \mathbb{N} \rangle$. Предел этой подпоследовательности обозначим символом a_0, $|a_0| \le M$.

На основе подпоследовательности номеров $\langle l_k^{(0)}; k \in \mathbb{N} \rangle$, выберем подпоследовательность $\langle x_{l_k^{(0)}}(t) \in H(n, M); l \in \mathbb{N} \rangle$ функций, у которых последовательность значений в $t = 0$ сходится к a_0.

Далее, выберем из числовой последовательности $\langle t_{1,l_k^{(0)}} \in [0,\tau]; k \in \mathbb{N} \rangle$, определяемой указанной подпоследовательностью функций, сходящуюся числовую подпоследовательность $\langle t_{1,l_k^{(1)}}; k \in \mathbb{N} \rangle$ с предельной точкой

$t_1 \in [0, \tau]$. Последовательность номеров $\langle l_k^{(1)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ является подпоследовательностью последовательности номеров $\langle l_k^{(0)}; k \in \mathbb{N} \rangle$. На её основе, выберем подпоследовательность $\langle x_{l_k^{(1)}}(t) \in H(n, M); l \in \mathbb{N} \rangle$ функций, у которых последовательности их значений в $t = 0$ и величин их первых точек разрыва сходятся, соответственно, к a_0 и t_1.

Далее, из числовой последовательности $\langle a_{1,l_k^{(1)}}; k \in \mathbb{N} \rangle$, определяемой этой последовательностью функций, выберем сходящуюся числовую подпоследовательность $\langle a_{1,l_k^{(1,1)}}; k \in \mathbb{N} \rangle$, что возможно, ввиду $|a_{1,l_k^{(1,1)}}| \leq M$. Предел этой последовательности обозначим a_1, $|a_1| \leq M$. При этом последовательность соответствующих номеров $\langle l_k^{(1,1)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ является подпоследовательностью последовательности номеров $\langle l_k^{(1)}; k \in \mathbb{N} \rangle$. На её основе, выберем подпоследовательность $\langle x_{l_k^{(1,1)}}(t) \in H(n, M); l \in \mathbb{N} \rangle$ функций, у которых последовательности их значений в $t = 0$ и величин их первых точек разрыва, вместе с величинами первых скачков, сходятся.

Затем, поступая таким же образом, шаг за шагом, построим подпоследовательности функций $\langle x_{l_k^{(2)}}(t); k \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle x_{l_k^{(2,1)}}(t); k \in \mathbb{N} \rangle$, ..., $\langle x_{l_k^{(n)}}(t); k \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle x_{l_k^{(n,1)}}(t); k \in \mathbb{N} \rangle$, у которых сходятся $t_{2,l_k^{(2)}}$, $a_{2,l_k^{(2,1)}}$; ...; $t_{n,l_k^{(n)}}$, $a_{n,l_k^{(n,1)}}$, соответственно, к t_2, a_2; ... ; t_n, a_n, где $\max\{|a_2|, ..., |a_n|\} \leq M$ и $t_1 \leq t_2 \leq ..., \leq t_n \leq \tau$. При этом некоторые из величин a_1, ..., a_n могут обратиться в нуль, что приведёт к уменьшению числа скачков. Точно также некоторые из чисел t_j могут оказаться равными нулю, либо полная их сумма $\sum_{j=1}^{n} t_j$ может оказаться равной τ. В обоих случаях, функция $x(t)$ также будет иметь число точек разрыва, меньшее n. Если $t_j = 0$, то эту величину можно выбросить из последовательности t, но при этом последовательность a также должна быть уменьшена на единицу так, что скачок a_{j-1} заменится на сумму $(a_{j-1} + a_j)$.

В результате процесса выбора, мы получим на последнем шаге подпоследовательность функций $\langle x_{l_k^{(n,1)}}(t); k \in \mathbb{N} \rangle$, у которых начальные значения $x_{l_k^{(n,1)}}(0)$ сходятся к a_0, а все скачки

$$a_{j,l_k^{(n,1)}} = x_{l_k^{(n,1)}}\left(t_{j,l_k^{(n,1)}}\right) - x_{l_k^{(n,1)}}\left(t_{j,l_k^{(n,1)}} - 0\right), \quad j = 1 \div n$$

и разности между точками разрыва $t_{j,l_k^{(n,1)}}$, $j = 1 \div n$ сходятся к величинам $a_1, ..., a_n$ и $t_1, ..., t_n$, соответственно. При этом сами точки разрыва

$$\tau_{j,l_k^{(n,1)}} = \sum_{i=1}^{j} t_{i,l_k^{(n,1)}}, \quad j = 1 \div n$$

сходятся, соответственно, к точкам $\tau_1, ..., \tau_n$. Следовательно, подпоследовательность $\langle x_{l_k^{(n,1)}}(t); k \in \mathbb{N} \rangle$ сходится поточечно к кусочно-постоянной на $[0, \tau]$ функции $x(t)$ с $x(0) = a_0$, у которой имеется не более чем n точек разрыва, которые являются компонентами последовательности $\langle \tau_i; i = 1 \div n \rangle$, а скачками в этих точках разрыва служат соответствующие компоненты последовательности $\langle a_i; i = 1 \div n \rangle$. Причём, начальное значение $x(0)$ этой функции и все её скачки не превосходят по модулю величины M.

Докажем, что последовательность $\langle x_{l_k^{(n,1)}}(t); k \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики d_τ. Если число точек разрыва функции $x(t)$ равно n, то воспользуемся формулой (6). В более общей ситуации, если число точек разрыва у функции $x(t)$ меньше чем число точек разрыва у функций $x_{l_k^{(n,1)}}(t)$, то, воспользуемся следствием доказанной леммы, добавляя нулевые компоненты на одноименных местах в обе последовательности a и t, которые определяют функцию $x(t)$. Тогда, можно считать, что число точек разрыва у предельной функции $x(t)$, в любом случае, равно n. Тогда, применяя снова формулу (6), используя указанное следствие, запишем верхнюю оценку для расстояния между функциями $x(t)$ и $x_{l_k^{(n,1)}}(t)$,

$$d_\tau[x(t), x_{l_k^{(n,1)}}(t)] \le |a_0 - a_{l_k^{(0)}}| + \sum_{j=1}^{n} \left(|a_j - a_{j,l_k^{(n,1)}}| + |t_j - t_{j,l_k^{(n,1)}}| \right) ,$$

где положено $b_j = a_{j,l_k^{(n,1)}}$, $t_j = t_{j,l_k^{(n,1)}}$, $j = 1 \div n$, $b_0 = a_{l_k^{(0)}}$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в обеих частях этого неравенства, получим, что $d_\tau[x(t), x_{l_k^{(n,1)}}(t)] \to 0$ при $k \to \infty$. ■

Литература

[1] Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука. 1977. – 567с.

[2] Вирченко Ю.П., Карабутова Т.В. Слабая сходимость случайных процессов и разрешимость уравнения Больцмана // Дифференциальные уравнения. Известия Российской академии естественных наук. – Рязань. 2006. 11. – С. 57-62.

[3] Гнеденко Б.В., Курс теории вероятностей.– М.: Наука, изд. 5-е, 1969. – 400с.

Каримов Р.Х.

Поведение при $t \to \infty$ первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n,\ n \geq 2$, лежащая в полупространстве $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid x_1 > 0\}$ такая, что при любом $r > 0$ сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_1 = r\} \neq \varnothing$ и ограничено.

В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для квазилинейного параболического уравнения рассматривается первая смешанная задача

$$u_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(t, \mathbf{x}, u, \nabla u))_{x_\alpha}; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{\{t>0\}\times\partial\Omega} = 0; \tag{2}$$

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega). \tag{3}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(t, \mathbf{x}, s, \xi)$, $\alpha = \overline{1, n}$, непрерывны по $(s, \xi) \in \mathbb{R}_{n+1}$, измеримы по $(t, \mathbf{x}) \in D$ и для всех $(s, \xi) \in \mathbb{R}_{n+1}$ для п.в. $(t, \mathbf{x}) \in D$ существуют положительные постоянные $\overline{a}$, $\widehat{a}$ такие, что справедливы неравенства

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(t, \mathbf{x}, s, \xi) - a_\alpha(t, \mathbf{x}, s, \eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq \overline{a}|\xi - \eta|^{m+1}, \quad m \geq 1;$$

$$|a_\alpha(t, \mathbf{x}, s, \xi) - a_\alpha(t, \mathbf{x}, s, \eta)| \leqslant \widehat{a}|\xi - \eta|(|\xi| + |\eta|)^{m-1}, \quad \alpha = \overline{1, n};$$

$$a_\alpha(t, \mathbf{x}, s, \mathbf{0}) = 0.$$

Изучается зависимость поведения при больших значениях времени $L_2(\Omega)$-нормы решения задачи (1)–(3) с финитной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$ от геометрии неограниченной области Ω. Полученные оценки формулируются в терминах геометрической характеристики, введенной ранее Л.М.Кожевниковой, Ф.Х.Мукминовым для линейных уравнений высокого порядка [2].

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ назовем λ—последовательностью задачи (1)–(3), если существует число $\theta > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leqslant \theta\lambda(z_N, z_{N+1})(z_{N+1} - z_N)^{m+1},\ N = \overline{0, \infty}. \tag{4}$$

Здесь и ниже используются обозначения $\Omega_{r_1}^{r_2} = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \Omega : r_1 < x_1 < r_2\}$;

$$\lambda(r_1, r_2) = \inf\left\{ \|\nabla g\|^{m+1}_{L_{m+1}(\Omega_{r_1}^{r_2})} \,\middle|\, g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|^{m+1}_{L_{m+1}(\Omega_{r_1}^{r_2})} = 1 \right\}. \qquad (5)$$

Необходимым и достаточным условием существования λ—последовательности является:

при любом $r_1 > 0$ найдется $r_2 > r_1$ такое, что $\lambda(r_1, r_2) > 0$.

Будем считать, что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega_0^{z_0}.$$

Определим невозрастающую функцию дискретного аргумента

$$\lambda(N) = \min\{\lambda(0, z_0), \lambda(z_0, z_1), ..., \lambda(z_{N-1}, z_N)\},\ N = \overline{1, \infty}$$

и функцию $N^*(t)$

$$N^*(t) = \max\left\{ N \in \mathbb{N} \mid \frac{N}{\lambda(N)} < \frac{t}{(\operatorname{mes}\Omega_0^{z_N})^{\frac{m-1}{2}}} \right\}.$$

При $t \in [0, 1/\lambda(1)]$ считаем, что $N^*(t) \equiv 0$.

Теорема 1. *Пусть $\{z_N\}_{N=0}^\infty$ – некоторая λ–последовательность. Тогда существует положительные числа $M, M^*(m, \overline{a}, \widehat{a}, \theta, \|\varphi\|)$, $\kappa(n, \theta, \overline{a}, \widehat{a})$ такие, что решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (1)–(3) для $t > 2(\operatorname{mes}\Omega_0^{z_2})^{\frac{m-1}{2}}/\lambda(2)$* при $m > 1$ *подчиняется неравенству*

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant M^* \left(N^*(t)\right)^{-1/(m-1)},$$

а при $m = 1$

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant M \exp(-\kappa N^*(t)).$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 в работе [3].

Рассмотрим трубчатую область вида

$$\Omega(f) = \{(x_1, \mathbf{x}') \in \mathbb{R}_n \mid x_1 > 0, \ \ |\mathbf{x}'| < f(x_1)\} \qquad (6)$$

с функцией $f(x)$, $x > 0$, удовлетворяющей условию:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{f(x)} = \infty. \qquad (7)$$

Пусть $P(\rho, z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 \mid z \leqslant x < z + \rho,\ 0 < y < \rho\}$ — прямоугольник ширины ρ с левой нижней вершиной в точке z оси абсцисс. Через $\Gamma_a^b(f)$ обозначим криволинейную трапецию

$$\Gamma_a^b(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 \mid a < x < b,\ 0 < y < f(x)\}, \quad a \geq 0.$$

Пусть $\rho_*(r)$ — ширина наибольшего прямоугольника $P(\rho_*,\, r_*)$, содержащегося в $\Gamma_1^r(f)$. Определим функцию $r^*(t),\ t \geq 0$, равенством

$$\int\limits_1^r \frac{dx}{f(x)} = \frac{t}{\rho_*^2(r)\,(\mathrm{mes}\ \Omega_0^r)^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Следствием теоремы 1 для трубчатых областей вида (6) является следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует положительные числа $\widetilde{M}^*$, $\widetilde{M}$, $\widetilde{\kappa}$ такие что, для решения $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)–(3) в цилиндрической области $D(f) = (0,\infty)\times\Omega(f)$ с функцией $f(x)$, удовлетворяющей условию (7), для $t > \widetilde{T}$ при $m > 1$ справедливо неравенство*

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega(f))} \leqslant \widetilde{M}^* \left(\int\limits_1^{r^*(t)} \frac{dx}{f(x)}\right)^{-1/(m-1)}, \tag{8}$$

а при $m = 1$

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega(f))} \leqslant \widetilde{M} \exp\left(-\widetilde{\kappa} \int\limits_1^{r^*(t)} \frac{dx}{f(x)}\right). \tag{9}$$

В области $\Omega(f_a)$ с функцией $f_a(x) = x^a,\ 0 < a < 1,\ x > 0$, для решения задачи (1)–(3) оценки (8), (9), соответственно, принимают вид

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega(f))} \leqslant \widetilde{M}_a t^{-\frac{2(1-a)}{(m-1)(2(1+a)+(n-1)(m-1)a+m-1}}, \quad m > 1;$$
$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega(f))} \leqslant \widetilde{M}_a^* \exp\left(-\widetilde{\kappa}_a t^{\frac{1-a}{1+a}}\right), \quad m = 1.$$

2. Существование λ–последовательности

Здесь докажем существование λ - последовательности для областей имеющих один выход на бесконечность. Для этого рассмотрим конкретную ось Ox_1 вдоль которой область Ω уходит на бесконечность.

Лемма 1. Пусть z, a, b, c — такие действительные числа, что $0 < z \leqslant a < b \leqslant c$, $\ \triangle = (z,a)\cup(b,c)$, $\ |\triangle| = a - z + c - b$. Тогда для любой функции $g \in C^\infty[0,c]$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\triangle |g(x)|^{m+1}dx \leqslant \frac{2^{m+1}(c-z)}{b-a}\int\limits_a^b |g(x)|^{m+1}dx + 2^{m+1}(c-z)^{m+1}\int\limits_z^c |g'(x)|^{m+1}dx, \tag{10}$$

где $C = 2^{m+1}$.

Доказательство. Возведя неравенство

$$|g(x)| \leqslant |g(y)| + \int\limits_y^x |g'(t)|dt, \quad y < x$$

в $m+1$ степень, получим

$$|g(x)|^{m+1} \leqslant \sum_{i=0}^{m+1} C_{m+1}^{i} |g(y)|^{m+1-i} \left[\int\limits_{y}^{x} |g'(t)| dt \right]^{i}, \quad y < x. \tag{11}$$

Применив неравенство Юнга, установим

$$|g(x)|^{m+1} \leqslant 2^{m+1} |g(y)|^{m+1} + 2^{m+1} \left[\int\limits_{y}^{x} |g'(t)| dt \right]^{m+1}. \tag{12}$$

Используя неравенство Гельдера, оценим интеграл стоящий в правой части неравенства (12)

$$\left[\int\limits_{y}^{x} 1 \cdot |g'(t)| dt \right]^{m+1} \leqslant (x-y)^{m} \int\limits_{y}^{x} |g'(t)|^{m+1} dt,$$

тогда неравенство (31) можем записать в виде

$$|g(x)|^{m+1} \leqslant 2^{m+1} |g(y)|^{m+1} + 2^{m+1} (x-y)^{m} \int\limits_{y}^{x} |g'(t)|^{m+1} dt. \tag{13}$$

После интегрирования неравенства (13) по $x \in [b,c]$ и $y \in [a,b]$ будем иметь

$$(b-a) \int\limits_{b}^{c} |g(x)|^{m+1} dx \leqslant 2^{m+1} (c-b) \int\limits_{a}^{b} |g(y)|^{m+1} dy +$$

$$+ 2^{m+1} (c-b)(c-a)^{m} (b-a) \int\limits_{a}^{c} |g'(t)|^{m+1} dt. \tag{14}$$

Аналогично устанавливается справедливость неравенства

$$(b-a) \int\limits_{z}^{a} |g(x)|^{m+1} dx \leqslant 2^{m+1} (a-z) \int\limits_{a}^{b} |g(y)|^{m+1} dy +$$

$$+ 2^{m+1} (a-z)(b-z)^{m} (b-a) \int\limits_{z}^{b} |g'(t)|^{m+1} dt. \tag{15}$$

Объединив неравенства (14) и (15) можем записать

$$(b-a) \int\limits_{\Delta} |g(x)|^{m+1} dx \leqslant 2^{m+1} |\Delta| \int\limits_{a}^{b} |g(y)|^{m+1} dy +$$

$$+2^{m+1}|\Delta|(c-z)^m(b-a)\int\limits_z^c |g'(t)|^{m+1}dt. \tag{16}$$

Учитывая что, $|\triangle| < c-z$, из (16) получим справедливость неравенства (10).

Утверждение 1. Пусть $0 < z \leqslant a < b \leqslant c$. Тогда

$$\lambda^{-1}(z,c) \leqslant \left(\frac{2^{m+1}(c-z)}{b-a}+1\right)\lambda^{-1}(a,b) + 2^{m+1}(c-z)^{m+1}. \tag{17}$$

Если дополнительно выполнено условие

$$2 \leqslant \lambda(a,b)(b-a)(c-z)^m, \tag{18}$$

то

$$1 \leqslant 2^{m+2}(c-z)^{m+1}\lambda(z,c). \tag{19}$$

Доказательство. Применим неравенство (10) к интервалам $(a,b) \subset (z,c)$ и функции $g(x_1,\mathbf{x}') \in C_0^\infty(\Omega)$, продолженной нулем вне Ω, в следующем виде

$$\int\limits_\Delta |g(x_1,\mathbf{x}')|^{m+1}dx_1 \leqslant \frac{2^{m+1}(c-z)}{b-a}\int\limits_a^b |g(x_1,\mathbf{x}')|^{m+1}dx_1 +$$

$$+2^{m+1}(c-z)^{m+1}\int\limits_z^c |D_{x_1}g(x_1,\mathbf{x}')|^{m+1}dx_1, \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}_{n-1}.$$

После интегрирования по $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}_{n-1}$ находим, что

$$\int\limits_{\Omega_z^c} |g(\mathbf{x})|^{m+1}d\mathbf{x} \leqslant \left(\frac{2^{m+1}(c-z)}{b-a}+1\right)\int\limits_{\Omega_a^b} |g(\mathbf{x})|^{m+1}d\mathbf{x} +$$

$$+2^{m+1}(c-z)^{m+1}\int\limits_{\Omega_z^c} |\nabla g(\mathbf{x})|^{m+1}d\mathbf{x}.$$

Применив определение λ последовательности (4), получим неравенство (17).

Учитывая что $c-z > b-a$, из (17) имеем

$$\lambda^{-1}(z,c) \leqslant (2^{m+1}+1)\frac{c-z}{b-a}\lambda^{-1}(a,b) + 2^{m+1}(c-z)^{m+1}$$

или

$$\lambda^{-1}(z,c) \leqslant \left[\frac{2\lambda^{-1}(a,b)}{(b-a)(c-z)^m}+1\right]2^{m+1}(c-z)^{m+1}.$$

Из последнего неравенства и условия (18) следует справедливость неравенства (19).

Следствие. Если при любом $r_1 > 0$ найдется $r_2 > r_1$ такое, что $\lambda(r_1, r_2) > 0$, то λ - последовательность существует при произвольном $x_0 > 0$ с числом $\theta \geq 2^{m+2}$.

Доказательство. Пусть уже построен элемент λ - последовательности x_j с числом $\theta \geq 2^{m+2}$, и по предположению $\lambda(x_j, x_*) \neq 0$. В качестве следующего элемента λ - последовательности, можно взять произвольное $x_{j+1} \geq x_*$, удовлетворяющее неравенству $2 \leqslant \lambda(x_j, x_*)(x_* - x_j)(x_{j+1} - x_j)^m$. Тогда соотношение (4) следует из утверждения 2 при $a = z = x_j,\ b = x_*,\ c = x_{j+1}$.

Построим специальную $\overline{\lambda}$ - последовательность с числом $\theta \geq 2^{m+2}$ и покажем, что она является оптимальной. Для этого сначала докажем справедливость неравенства

$$\overline{\lim_{r \to r_2}} \lambda(r_1, r) \leqslant \lambda(r_1, r_2). \tag{20}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем ненулевую функцию $f \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что

$$(\lambda(r_1, r_2) + \varepsilon) \int\limits_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |f(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \geq \int\limits_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |\nabla f(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x}.$$

Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, нетрудно установить существование такого числа $\delta > 0$, что

$$(\lambda(r_1, r_2) + 2\varepsilon) \int\limits_{\Omega_{r_1}^{r}} |f(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x} \geq \int\limits_{\Omega_{r_1}^{r}} |\nabla f(\mathbf{x})|^{m+1} d\mathbf{x}$$

при всех r таких, что $|r - r_2| < \delta$. Отсюда следует неравенство

$$\lambda(r_1, r) \leqslant \lambda(r_1, r_2) + 2\varepsilon.$$

Таким образом, неравенство (20) установлено.

Пусть построен элемент $\overline{x}_\nu$. Положим

$$\overline{x}_{\nu+1} = \inf\{x > \overline{x}_\nu \ : \ 1 \leqslant \overline{\theta}\lambda(\overline{x}_\nu, x)(x - \overline{x}_\nu)^{m+1}\}.$$

Непустота множества под знаком inf при $\overline{\theta} \geq 2^{m+2}$ вытекает из следствия. Благодаря (20) будем иметь неравенство

$$1 \leqslant \overline{\theta}\lambda(\overline{x}_\nu, \overline{x}_{\nu+1})(\overline{x}_{\nu+1} - \overline{x}_\nu)^{m+1}.$$

Кроме того, при любом $c \in (\overline{x}_\nu, \overline{x}_{\nu+1})$ выполнено противоположное неравенство

$$1 > \overline{\theta}\lambda(\overline{x}_\nu, c)(c - \overline{x}_\nu)^{m+1}.$$

Утверждение 2. Пусть $\{x_j\}_{j=0}^\infty$—произвольная λ—последовательность. Пусть $\{\overline{x}_\nu\}_{j=0}^\infty$—специальная $\overline{\lambda}$—последовательность. Тогда найдется число $D > 1$ такое, что справедлива импликация

$$(x_L \leqslant \overline{x}_N) \Rightarrow (L \leqslant (D+1)N). \tag{21}$$

Доказательство. Достаточно установить неравенство

$$\overline{x}_{\nu+1} - \overline{x}_\nu \leqslant D(x_{j+1} - x_j) \tag{22}$$

для вложенных отрезков $[x_j, x_{j+1}] \subset [\overline{x}_\nu, \overline{x}_{\nu+1})$. Действительно, на промежутке $[\overline{x}_\nu, \overline{x}_{\nu+1})$ можно расположить не более D целых отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ и, возможно, два нецелых отрезка на концах. Тогда отрезок $[\overline{x}_0, \overline{x}_N]$ будет содержать не более $(D+1)N$ отрезков $[x_j, x_{j+1}]$, поэтому справедливо (21). Для доказательства неравенства (22) покажем справедливость неравенства

$$(c - \overline{x}_\nu) \leqslant D(x_{j+1} - x_j) \tag{23}$$

при некотором $c \geq \overline{x}_{\nu+1}$.

Применим утверждение 2 к числам $z = \overline{x}_\nu$, $a = x_j$, $b = x_{j+1}$, число c выберем ниже. Положим $D = (2\theta)^{\frac{1}{m}}$, выберем число c_1 из равенства

$$\frac{c_1 - \overline{x}_\nu}{x_{j+1} - x_j} = D, \tag{24}$$

обеспечивающего (23). Возможны два случая: если $c_1 - \overline{x}_\nu < 1$, то $x_{j+1} - x_j < 1$. В таком случае

$$\frac{(c_1 - \overline{x}_\nu)^m}{\theta(x_{j+1} - x_j)^m} \geq 2 \geq \frac{2}{\theta\lambda(x_j, x_{j+1})(x_{j+1} - x_j)^{m+1}}$$

и условие (18) выполнено. Положим $c = \max(c_1, x_{j+1})$. Тогда из (19) следует, что точка $\overline{x}_{\nu+1}$ специальной λ—последовательности должна удовлетворять неравенству $\overline{x}_{\nu+1} \leqslant c$. Поскольку $x_{j+1} < \overline{x}_{\nu+1}$, то $c = c_1$ и (23) справедливо. Если же $c_1 - \overline{x}_\nu \geq 1$, то из (24) следует, что $D(x_{j+1} - x_j) \geq 1$. Выберем c_2 из (18), считая его равенством. Тогда

$$\frac{(c_2 - \overline{x}_\nu)^m}{(x_{j+1} - x_j)^m} = \frac{2}{\lambda(x_{j+1}, x_j)(x_{j+1} - x_j)^{m+1}} \leqslant 2\theta.$$

Для $c = \max(c_2, x_{j+1})$ соотношение (18) выполненным. Применяя утверждение 2, из (19) получаем, что $\overline{x}_{\nu+1} \leqslant c$ и $c = c_2$, следовательно справедливо неравенство (23). Утверждение доказано.

3. Примеры

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{z_N\}_{N=0}^{\infty}$ назовем Π – последовательностью функции $f(x)$, если справедливы равенства

$$z_{N+1} = \sup\left\{ r > z_N \;\middle|\; \inf_{[z_N, r]} f(x) \geq r - z_N \right\}, \quad N = \overline{0, \infty}. \tag{25}$$

Π – последовательность можно построить всегда, начиная с произвольной точки $z_0 > 0$.

Для каждого $s=\overline{2,n}$, рассмотрим область типа слоя

$$\Omega[f,s]=\{(x_1,\mathbf{x}')\in\mathbb{R}_n\mid x_1>0,\ |x_s|<f(x_1)\},\tag{26}$$

с положительной функцией $f(x_1)$.

Лемма 2. Рассмотрим область $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}_2\mid 0<x<r,\ y>0\}$ и функцию $g(x,y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}_2)$, равную нулю в окрестности луча $\{(x,y)\in\mathbb{R}_2\mid x=0,\ y>h\}$. Справедливо обобщенное неравенство Фридрихса-Стеклова

$$\int\limits_Q |g(x,y)|^{m+1}dxdy\leqslant C_m\left\{r^{m+1}\int\limits_Q |D_xg|^{m+1}dxdy+h^{m+1}\int\limits_Q |D_yg|^{m+1}dxdy\right\},\tag{27}$$

C_m — положительная постоянная, зависящая от m.

Доказательство. Ввиду того, что $g(0,y)=0$ при $y>h$, применяя неравенство (13) запишем неравенство

$$|g(x,y)|^{m+1}\leqslant Cr^m\int\limits_0^r |D_xg(x,y)|^{m+1}dx.$$

Интегрируя последнее неравенство по $y,\ y>h$ и по $x,\ x\in[0,r]$ получим:

$$\int\limits_0^r\int\limits_{y>h} |g(x,y)|^{m+1}dxdy\leqslant r^{m+1}\int\limits_0^r\int\limits_{y>h} |D_xg(x,y)|^{m+1}dxdy.\tag{28}$$

Далее, при каждом $x,\ 0<x<r$, из неравенства (28) при $z=0,\ a=h,\ b=c=2h$ получим

$$\int\limits_0^h |g(x,y)|^{m+1}dy\leqslant 2^{m+2}\int\limits_h^{2h} |g(x,y)|^{m+1}dy+4^{m+1}h^{m+1}\int\limits_0^{2h} |D_yg(x,y)|^{m+1}dy.$$

Проинтегрировав последнее по $x\in[0,r]$, выводим

$$\int\limits_0^r\int\limits_0^h |g(x,y)|^{m+1}dxdy\leqslant 2^{m+2}\int\limits_0^r\int\limits_h^{2h} |g(x,y)|^{m+1}dxdy+$$

$$+4^{m+1}h^{m+1}\int\limits_0^r\int\limits_0^{2h} |D_yg(x,y)|^{m+1}dxdy.\tag{29}$$

Объединяя неравенства (28) и (29) установим справедливость неравенства (27).

Утверждение 3. Пусть положительная функция $f(x)$, и возрастающая последовательность чисел $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$, удовлетворяют условию с константой $\omega_1 \geq 1$

$$\inf_{[z_j, z_{j+1}]} f(x) \leqslant \omega_1 \Delta_j, \ j = \overline{0, \infty}. \tag{30}$$

Тогда последовательность $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ является λ—последовательностью для области $\Omega \subset \Omega[f, s], \ s = \overline{2, n}$.

Доказательство. Функцию $g(x_1, \mathbf{x}') \in C_0^{\infty}(\Omega[f, s])$ продолжим на все $\mathbb{R}_{n+1}$ нулем за пределы $\Omega[f, s]$. Пусть точка $\widehat{z}_j \in [z_j, z_{j+1}]$ такая, что $\inf\limits_{[z_j, z_{j+1}]} f(z) = f(\widehat{z}_j)$. Тогда из (30), имеем

$$f(\widehat{z}_j) \leqslant \omega_1 \Delta_j. \tag{31}$$

Рассмотрим область $Q = \{(x_1, x_s) \in \mathbb{R}_2 \mid z_j < x_1 < z_{j+1}, \ |x_s| < f(x_1)\}$. Положим

$$Q_1^{\pm} = \{(x_1, x_s) \in \mathbb{R}_2 \mid z_j < x_1 < \widehat{z}_j, \ \pm x_s > 0\},$$
$$Q_2^{\pm} = \{(x_1, x_s) \in \mathbb{R}_2 \mid \widehat{z}_j < x_1 < z_{j+1}, \ \pm x_s > 0\}.$$

Воспользовавшись неравенством (27) для полуполосы Q_1^+, получим

$$\int\limits_{Q_1^+} |g(x_1, \mathbf{x}')|^{m+1} dx_1 dx_s \leqslant$$

$$\leqslant C_m \left\{ \Delta_j^{m+1} \int\limits_{Q_1^+} |D_{x_1} g|^{m+1} dx_1 dx_s + f^{m+1}(\widehat{z}_j) \int\limits_{Q_1^+} |D_{x_s} g|^{m+1} dx_1 dx_s \right\}.$$

Установив аналогичные неравенства для областей $Q_1^-, \ Q_2^+, \ Q_2^-$, сложив эти четыре неравенства и воспользовавшись (32), получим

$$\int\limits_{Q} |g(x_1, \mathbf{x}')|^{m+1} dx_1 dx_s \leqslant \omega_1^{m+1} C_m \Delta_j^{m+1} \int\limits_{Q} \left\{ |D_{x_1} g|^{m+1} + |D_{x_s} g|^{m+1} \right\} dx_1 dx_s.$$

Проинтегрируем последнее по $x'' = (x_2, ..., x_{s-1}, x_{s+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}_{n-2}$:

$$\int\limits_{\Omega_{z_j}^{z_{j+1}}[f,s]} |g(x_1, \mathbf{x}')|^{m+1} dx_1 d\mathbf{x}' \leqslant C_m' \Delta_j^{m+1} \int\limits_{\Omega_{z_j}^{z_{j+1}}[f,s]} \left\{ |D_{x_1} g|^{m+1} + |D_{x_s} g|^{m+1} \right\} dx_1 d\mathbf{x}'.$$

Из последнего неравенства следует оценка:

$$1 \leqslant C_m' \Delta_j^{m+1} \lambda(z_j, z_{j+1}; \Omega[f, s]). \tag{32}$$

Если $Q \subset \Omega$, то $\lambda(a, b; \Omega) \leqslant \lambda(a, b; Q)$. Это следует из того, что для Q сужается множество, по которому берется инфимум в (5). Утверждение доказано.

Следствие. Π — последовательность удовлетворяет условию (30) с $\omega_1 = 1$. Ввиду вложения $\Omega(f) \subset \Omega[f, s]$, согласно утверждению 4, Π — последовательность функции f является λ—последовательностью области $\Omega(f)$.

Литература

[1] Кожевникова Л. М. Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения // Матем. сб. 2005. Т. 196. №7. С. 67–100.

[2] Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. Убывание решения первой смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка с младшими членами // ФМП. 2006. Т. 12. В. 4 - С. 113–132.

[3] Каримов Р.Х. Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка

[4] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Карюк А.И., Редькина Т.В.

Частные случаи нелинейных уравнений, обладающих оператором рассеяния третьего порядка

Вывод нелинейных уравнений в частных производных

Операторное уравнение Лакса [1] имеет вид

$$L_t = [L, A] = LA - AL, \tag{1}$$

где операторы могут быть различной природы (дифференциальные, интегральные, матрицы, проектирующие и др.). Идея, лежащая в основе работы Лакса, заключается в том, что нелинейное операторное уравнение (1.1) эквивалентно системе линейных уравнений:

$$L\varphi = \mu\varphi, \quad \varphi_t = -A\varphi,$$

где для оператора L поставлена спектральная задача (φ - собственная функция, μ- собственное значение оператора L), оператор A определяет эволюцию собственных функций по времени.

Рассмотрим частный случай, когда L, A- дифференциальные операторы первого порядка, заданные на некотором пространстве непрерывных и дифференцируемых функций и имеющие вид

$$L = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + u, \qquad A = \beta\frac{\partial}{\partial x} + v, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_{ij}),\ \ \beta = (\beta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3$ - постоянные матрицы 3×3, $u(x, t) = (u_{ij}), \quad v(x, t) = (v_{ij})$ - матрицы 3×3 с функциями $u_{ij}(x, t),\ \ v_{ij}(x, t), \quad i, j = 1, 2, 3$.

Лемма 1. *Правая часть уравнения Лакса (1.1) представляет собой дифференциальный оператор второго порядка вида:*

$$[L, A] = [\alpha, \beta]\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ([u, \beta] + [v, \alpha])\frac{\partial}{\partial x} + ([u, v] + (\alpha v_x - \beta u_x)).$$

Доказательство. Действуя коммутатором на произвольную функцию φ, получим:

$$\begin{aligned}&[L, A]\,\varphi = \left(\alpha\tfrac{\partial}{\partial x} + u\right)\left(\beta\tfrac{\partial}{\partial x} + v\right)\varphi - \left(\beta\tfrac{\partial}{\partial x} + v\right)\left(\alpha\tfrac{\partial}{\partial x} + u\right)\varphi = \\ &= \left(\alpha\tfrac{\partial}{\partial x} + u\right)(\beta\varphi_x + v\varphi) - \left(\beta\tfrac{\partial}{\partial x} + v\right)(\alpha\varphi_x + u\varphi)\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые и приведем подобные при φ_{xx}, φ_x, φ , учитывая, что α, β, $\nu\, u$ являются матрицами и не обладают коммутационными свойствами

$\alpha\beta\varphi_{xx} + u\beta\varphi_x + \alpha\frac{\partial}{\partial x}(v\varphi) + uv\varphi - \beta\alpha\varphi_{xx} - v\alpha\varphi_x - \beta\frac{\partial}{\partial x}(u\varphi) - vu\varphi =$
$= \alpha\beta\varphi_{xx} + u\beta\varphi_x + \alpha v_x\varphi + \alpha v\varphi_x + uv\varphi - \beta\alpha\varphi_{xx} - v\alpha\varphi_x - \beta u\varphi_x - \beta u_x\varphi - vu\varphi =$
$= (\alpha\beta - \beta\alpha)\varphi_{xx} + (u\beta + \alpha v - v\alpha - \beta u)\varphi_x + (\alpha v_x + uv - \beta u_x - vu)\varphi$

Так как функция φ - произвольная, то, опуская ее коммутатор операторов L, A, будет представлять собой дифференциальный оператор второго порядка с матричными коэффициентами

$$[L, A] = [\alpha, \beta]\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ([u, \beta] + [v, \alpha])\frac{\partial}{\partial x} + ([u, v] + (\alpha v_x - \beta u_x))$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если матрицы* α, β, v, *и удовлетворяют следующим условиям*

$$[\alpha, \beta] = 0, \quad [u, \beta] + [\alpha, v] = 0, \tag{3}$$

то коммутатор $[L, A]$ *представляет собой оператор умножения*

$$[L, A] = [u, v] + (\alpha v_x - \beta u_x)\,..$$

Лемма 2. *Условия (1.3) выполняются тогда и только тогда, когда имеют место равенства:*

$$\sum_{k=1}^{3}(\alpha_{jk}\beta_{kj} - \beta_{jk}\alpha_{kj}) = 0, \quad \sum_{k=1}^{3}(u_{jk}\beta_{kj} - \beta_{jk}u_{kj} + \alpha_{jk}v_{kj} - v_{jk}\alpha_{kj}) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3}(\alpha_{jk}\beta_{km} - \beta_{jk}\alpha_{km}) = 0, \quad \sum_{k=1}^{3}(u_{mk}\beta_{kj} - \beta_{mk}u_{kj} + \alpha_{mk}v_{kj} - v_{mk}\alpha_{kj}) = 0,$$

гдеj,=1,2,3, $j \quad \neq$.

Замечание. При условии выполнения лемм 1 и 2 уравнение Лакса эквивалентно следующей системе:

$$u_{ijt} = \sum_{k=1}^{3}(u_{ik}v_{kj} - v_{ik}u_{kj}) + \sum^{(\alpha_{ik}v_{kjx} - \beta_{ik}u_{kjx})}, \quad i,\ j = 1, 2, 3.$$

Теорема 1. Операторное уравнение Лакса $L_t = LA - AL$ эквивалентно нелинейному уравнению в частных производных

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}}\right)u_z - \frac{k}{2}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right)u_x + \frac{1}{k}(\ln u)_{zz} - \alpha_{11}^2 k(\ln u)_{xx} -$$
$$- \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}u_z \ln u = 0, \tag{4}$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = 2k\alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$, $u_{13} = u\,(x,\, t)$ и операторы $L = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + u$, $A = \beta\frac{\partial}{\partial x} + v$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{11} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 3k\alpha_{11} & 0 & 0 \\ k\alpha_{21} & k\alpha_{11} & 0 \\ k\alpha_{31} & k\alpha_{32} & k\alpha_{11} \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{22} + \frac{2}{k}v_{11} \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & ku_{12} & ku_{13} \\ ku_{21} + \frac{\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right) & -v_{11} & ku_{23} \\ ku_{31} + \frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right) & ku_{32} + \frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right) & v_{11} \end{pmatrix},$$

где $\alpha = (\alpha_{ij})$, $\beta = (\beta_{ij})$ - постоянные матрицы 3×3, $u(x,t) = (u_{ij})$, $v(x,t) = (v_{ij})$ - матрицы 3×3 с функциями $u_{ij}(x,t)$, $v_{ij}(x,t)$, $i,j = 1,2,3$, k – некоторый параметр.

Доказательство. Вид коэффициентов операторов (1.2) дает выполнение лемм 1,2, следствия 1 и выше упомянутого замечания. Следовательно, уравнение Лакса эквивалентно системе дифференциальных уравнений (для компактной записи введено обозначение $2k\alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}$):

$$u_{11z} + k\alpha_{11}u_{11x} - \alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x}v_{11} = \frac{1}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right)\left(\alpha_{21}u_{12} + \alpha_{31}u_{13}\right), \quad (5)$$

$$u_{12z} = \left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right)\left(u_{13}\frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}} - u_{12}\right), \quad (6)$$

$$u_{13z} = -u_{13}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right), \quad (7)$$

$$u_{21z} = (2v_{11} + k((u_{22} - u_{11}))\left(\frac{\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\left(u_{22} - u_{11}\right) + u_{23}\frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}} + u_{21}\right) - \\ -\frac{k}{2}\alpha_{21}\left(u_{22} + u_{11}\right)_x, \quad (8)$$

$$u_{22z} - k\alpha_{11}u_{22x} - \alpha_{11}\frac{\partial}{\partial x}v_{11} = \frac{1}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right)\left(\alpha_{32}u_{23} - \alpha_{21}u_{12}\right), \quad (9)$$

$$u_{23z} = -u_{13}\frac{\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right), \quad (10)$$

$$u_{31z} = \tfrac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right)_x - \tfrac{k}{2}\alpha_{31}\left(u_{22} + u_{11}\right)_x + \\ + \left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right)\left[\tfrac{1}{2\alpha_{11}}\left(\alpha_{21}u_{32} - \alpha_{32}u_{21}\right) + \tfrac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}\left(u_{22} - u_{11} + \tfrac{2}{k}v_{11}\right) + u_{31}\right], \quad (11)$$

$$u_{32z} = \left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right)\left(v_{11}\frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}} - u_{12}\frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}}\right) + \alpha_{32}\left(v_{11} - \frac{k}{2}\left(u_{11} + u_{22}\right)\right)_x, \tag{12}$$

$$\frac{2}{k}v_{11z} + u_{22z} - k\alpha_{11}u_{22x} - \alpha_{11}v_{11x} = -\frac{1}{2\alpha_{11}}\left(2v_{11} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right)\left(\alpha_{31}u_{13} + \alpha_{32}u_{23}\right), \tag{13}$$

Покажем, что данную систему можно свести к одному нелинейному уравнению в частных производных. Функцию $u_{13}(x,t)$ будем считать отличной от нуля и постараемся выразить остальные неизвестные функции через нее. Из уравнения (1.7) системы путем деления на $u_{13}(x,t)$ получаем функцию $v_{11}(x,t)$:

$$v_{11} = \frac{k}{2}\left(u_{11} - u_{22}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln u_{13}\right)_z .$$

В результате подстановки найденного значения в систему уравнение (1.10) интегрируется, и функция $u_{23}(x,t)$ явно выражается через функцию $u_{13}(x,t)$, а уравнение (1.6) представляет собой линейное уравнение, решая которое, определяется вид функции $u_{12}(x,t)$, поэтому

$$u_{23} = \frac{\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}u_{13}, \quad u_{12} = -\frac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}u_{13}\ln u_{13}.$$

Находя разность уравнений (1.5) и (1.6), можно выразить сумму $\alpha_{11}k(u_{11}+u_{22})_x$, в результате чего система сводится к такому виду, что интегрирование по переменной zуравнений (1.5) и (1.9) становится возможным, следовательно, ранее неизвестные функции $u_{11}(x,t)$ и $u_{22}(x,t)$ определяются в явном виде:

$$u_{11} = \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2}u_{13}\ln u_{13} + \frac{1}{2k}\left(\ln u_{13}\right)_z - \frac{\alpha_{11}}{2}\left(\ln u_{13}\right)_x .$$

$$u_{22} = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2}u_{13}\ln u_{13} - \frac{1}{2k}\left(\ln u_{13}\right)_z - \frac{\alpha_{11}}{2}\left(\ln u_{13}\right)_x - \left(\frac{\alpha_{31}}{2\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\right)u_{13}.$$

После подстановки найденных функций последнее равенство системы будет содержать только одну функцию $u_{13}(x,t)$

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}}\right)u_{13z} - \frac{k}{2}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right)u_{13x} + \frac{1}{k}\left(\ln u_{13}\right)_{zz} -$$
$$-\alpha_{11}^2 k\left(\ln u_{13}\right)_{xx} - \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}u_{13z}\ln u_{13} = 0,$$

поэтому все прочие уравнения должны определять остальные неизвестные функции и это действительно так.

В уравнении (1.12) выражается производная функции u_{32z}. В результате интегрирования по переменной z имеем:

$$u_{32} = \tfrac{\alpha_{32}}{4\alpha_{11}^2}\left(\alpha_{31} + \tfrac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}}k\right) u_{13}\left(1 - \ln u_{13}\right) - \tfrac{\alpha_{32}}{8\alpha_{11}^2}k\left(\alpha_{31} + \tfrac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right) u_{13} +$$
$$+ \tfrac{\alpha_{32}^2\alpha_{21}}{8\alpha_{11}^2}k\int u_{13x}\ln u_{13}dz + \tfrac{\alpha_{11}\alpha_{32}}{2}k\int\left(\ln u_{13}\right)_{xx}dz +$$
$$+ \tfrac{\alpha_{32}k}{8\alpha_{11}^2}\left(4\alpha_{11}\alpha_{31} + 3\alpha_{32}\alpha_{21}\right)\int u_{13x}dz.$$

Четвертое уравнение системы, полученной после предыдущей замены, становится линейным первого порядка относительно функции u_{21}, интегрируя которое находим ее явный вид:

$$u_{21} = \frac{\alpha_{21}}{2k\alpha_{11}}\left(\ln u_{13}\right)_z + \frac{\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right) u_{13}.$$

В результате подстановки выше найденных функций седьмое равенство системы приводится к линейному уравнению первого порядка на функцию u_{31}, решая которое, находим искомую функцию:

$$u_{31} = \tfrac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4k\alpha_{11}^2}\tfrac{1}{u_{13}}\int u_{13z}\left(\ln\, u_{13}\right)_z dz - \tfrac{\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\tfrac{1}{u_{13}}\int u_{13}\left(\ln\, u_{13}\right)_{xz}dz + \tfrac{\alpha_{31}}{2k\alpha_{11}}\left(\ln\, u_{13}\right)_z +$$
$$+ \tfrac{1}{4\alpha_{11}^2}\left\{\tfrac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4\alpha_{11}}\left(\alpha_{31} + \tfrac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{2\alpha_{11}}\right) + \alpha_{31}\left(\alpha_{31} + k\tfrac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{8\alpha_{11}}\right)\right\} u_{13} +$$
$$+ k\tfrac{\alpha_{21}^2\alpha_{32}^2}{64\alpha_{11}^4}u_{13}\left(\ln u_{13} - \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{\alpha_{32}C}{2\alpha_{11}}\tfrac{\ln\, u_{13}}{u_{13}} - k\tfrac{\alpha_{32}^2\alpha_{21}^2}{16\alpha_{11}^3}\tfrac{1}{u_{13}}\int u_{13z}\int u_{13x}\ln u_{13}dzdz -$$
$$- \tfrac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{4}\tfrac{k}{u_{13}}\int u_{13z}\int\left(\ln u_{13}\right)_{xx}dzdz - k\tfrac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{16\alpha_{11}^3}\left(4\alpha_{11}\alpha_{31} + 3\alpha_{32}\alpha_{21}\right)\tfrac{1}{u_{13}}\int u_{13z}\int u_{13x}dzdz.$$

Таким образом, найдены восемь неизвестных функций: $v_{11}(x,t)$, $u_{11}(x,t)$, $u_{12}(x,t)$, $u_{21}(x,t)$, $u_{22}\,(x,\,t)$, $u_{23}\,(x,\,t)$, $u_{31}\,(x,\,t)$, $u_{32}\,(x,\,t)$ и система из девяти уравнений свелась к одному:

$$\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}}\right) u_z - \frac{k}{2}\left(\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{2\alpha_{11}}\right) u_x + \frac{1}{k}\left(\ln u\right)_{zz} - \alpha_{11}^2 k\left(\ln u\right)_{xx} -$$
$$- \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{4\alpha_{11}^2}u_z\ln u = 0,$$

где α_{ij}- постоянные элементы матрицы 3×3, функция $u = u_{13} \neq 0$, $u_{13z} \neq 0$, $u_{13x} \neq 0$. Теорема доказана.

Следствие. Уравнение (4) является квазилинейным уравнением гиперболического типа и с помощью следующей замены переменных: $\tilde{x} = -\alpha_{11}kz + x$, $\tilde{z} = \alpha_{11}kz + x$, $u\left(\tilde{x},\,\tilde{z}\right) = e^{w\left(\tilde{x},\,\tilde{z}\right)}$ приводится к виду

$$w_{\tilde{x}\tilde{z}} = e^w\left[\frac{\alpha_{31}}{8\alpha_{11}^2}w_{\tilde{z}} - \frac{1}{8\alpha_{11}^2}\left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{11}}\right) w_{\tilde{x}} + \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{16\alpha_{11}^3}\left(w_{\tilde{x}} - w_{\tilde{z}}\right) w\right]. \quad (14)$$

Теорема 2. *Если операторы (1.2) имеют вид*

$$L=\alpha_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}\alpha_{11}\left(s+(\ln\frac{c_1}{u_{12}})\right)_x & u_{12} & \sigma\\ \frac{c_1}{u_{12}} & \alpha_{11}s & c_3u_{12}\\ c_2\sigma & \frac{1}{u_{12}} & \alpha_{11}\left(s-(\ln u_{12})_x\right)\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}\beta_{11}&0&0\\0&\beta_{22}&0\\0&0&\beta_{22}\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}\frac{1}{u_{12}} & \delta u_{12} & \delta\tilde{\sigma}\\ \delta\frac{c_1}{u_{12}} & \left(\ln\frac{c_1}{u_{12}}\right)_z+\frac{1}{u_{12}} & c_3\delta u_{12}\\ c_2\delta\sigma & \frac{\delta}{u_{12}} & u_{12}\end{pmatrix},$$

где ${}_i-$ const, $i=1,2,3$, $\delta=\frac{\beta_{11}-\beta_{22}}{2\alpha_{11}}$, $\frac{\partial}{\partial\rho}=\delta\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}$, $s=\ln c_3u_{12}-\int u_{12x}dz$, $\sigma=\exp\left[-\delta\alpha_{11}\int\left((\ln c_3u_{12}^2)_x+u_{12}-\frac{1}{u_{12}}\right)d\rho\right]$, $\tilde{\sigma}=\exp\left[\delta\alpha_{11}\int\left((\ln c_3u_{12}^2)_x+u_{12}-\frac{1}{u_{12}}\right)d\rho\right]$, *то операторное уравнение Лакса эквивалентно нелинейному уравнению с частными производными:*

$$(u_{12})_y+\left(\frac{1}{u_{12}}\right)_z=2\left(\ln\ u_{12}\right)_{yz}, \tag{15}$$

где $\frac{\partial}{\partial y}=\beta_{11}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial z}=\beta_{22}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}$.

Теорема 3. *Уравнение (1.15) имеет операторное представление в виде уравнения нулевой кривизны* $P_t-Q_x=QP-PQ$,

$$P=\lambda\cdot\frac{1}{\alpha_{11}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_2\end{pmatrix}+$$
$$+\frac{1}{\alpha_{11}}\begin{pmatrix}-\alpha_{11}\left(s+\left(\ln\ \frac{c_1}{u_{12}}\right)_x\right) & -\frac{c_1^2}{u_{12}} & -c_2^2\sigma\\ \frac{c_1}{u_{12}} & \alpha_{11}s & c_3u_{12}\\ c_2\sigma & \frac{1}{u_{12}} & \alpha_{11}\left(s-(\ln\ u_{12})_x\right)\end{pmatrix},$$

$$Q=-\lambda\cdot\frac{1}{\alpha_{11}}\begin{pmatrix}\beta_{11}&0&0\\0&-\beta_{22}&0\\0&0&-\beta_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_2\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}\beta_{11}\left(s+\left(\ln\ \frac{c_1}{u_{12}}\right)_x\right)+\frac{1}{u_{12}} & \delta u_{12}-c_1^2\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}}\frac{1}{u_{12}} & \delta\tilde{\sigma}-c_2^2\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}}\sigma\\ c_1\varepsilon\frac{1}{u_{12}} & \beta_{22}s+\left(\ln\ \frac{c_1}{u_{12}}\right)_z+\frac{1}{u_{12}} & c_3\left(\delta-\frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}}\right)u_{12}\\ c_2\varepsilon\sigma & \varepsilon\frac{1}{u_{12}} & \beta_{22}\left(s+(\ln\ u_{12})_x\right)+u_{12}\end{pmatrix},$$

где ${}_i-$ const, $i=1,2,3$, $\delta=\frac{\beta_{11}-\beta_{22}}{2\alpha_{11}}$, $\frac{\partial}{\partial\rho}=\delta\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial z}=\beta_{22}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}$, $s=\ln c_3u_{12}-\int u_{12x}dz$,$\sigma=\exp\left[-\delta\alpha_{11}\int\left((\ln c_3u_{12}^2)_x+u_{12}-\frac{1}{u_{12}}\right)d\rho\right]$, $\varepsilon=\frac{\beta_{22}}{\alpha_{11}}+\delta$, $\tilde{\sigma}=\exp\left[\delta\alpha_{11}\int\left((\ln c_3u_{12}^2)_x+u_{12}-\frac{1}{u_{12}}\right)d\rho\right]$.

Некоторые частные решения

Решение специального вида.

Теорема 4. Уравнение (1.14) имеет решение в виде функции $w = f(\xi)$, где $\xi = \alpha_{31}\tilde{x} + \left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)\tilde{z}$, а f определяется из обращения интеграла $\int \frac{df}{C_1 + e^f(1-f)} = \frac{1}{m}\left[\alpha_{31}\tilde{x} + \left(3\alpha_{31} + \frac{\alpha_{32}\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)\tilde{z}\right] + C_2$,
$m = 16\frac{\alpha_{11}^3\alpha_{31}}{\alpha_{32}\alpha_{21}}\left(1 + \frac{\alpha_{31}\alpha_{11}}{2\alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{21}}\right)$, C_1, C_2 – произвольные постоянные

Решение в виде бегущей волны.

Теорема 5. Уравнение (1.14) имеет решение, записанное в квадратурах $\int \frac{e^{-w}dw}{(1-\lambda)w + B(\lambda-3) + C_1 e^{-w}} = \frac{1}{A\lambda}\tilde{x} + \frac{1}{A}\tilde{z} + C_2$, где $A = \frac{16\alpha_{11}^3}{\alpha_{32}\alpha_{21}}$, $B = 1 + \frac{2\alpha_{11}\alpha_{31}}{\alpha_{32}\alpha_{21}}$, $_1$, $_2$-произвольные постоянные.

Преобразование Беклунда.

Уравнение (1.14) представимо в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(A\left(w_{\tilde{x}} - w_y\right) + 2Be^w\right) = \frac{\partial}{\partial y}e^w\left(w - B\right), \text{где} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}} - \frac{\partial}{\partial\tilde{z}},$$

которое является условием совместности для существования функции f , такой что:

$$\begin{cases} f_y = A\left(w_{\tilde{x}} - w_y\right) + 2Be^w, \\ f_{\tilde{x}} = e^w\left(w - B\right). \end{cases}$$

Литература

[1] Карюк А.И., Редькина Т.В. Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка. Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции, г.Орел. Т. 1. Издат.: ОГУ, 2006г. – С.70-75.

[2] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Кирин Н.А.

Гамильтоновы системы и топологические инварианты малых порядков[4]

Введение

В данной работе рассматриваются гамильтоновы системы, отвечающие инвариантам Васильева, заданных с помощью итерированных интегралов Чена от логарифмических дифференциальных форм. Показано, что гамильтоновы системы, порожденные инвариантами Васильева первого порядка связаны с классической задачей о движении вихрей на плоскости.

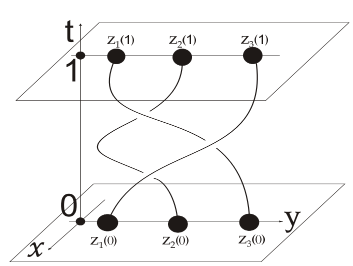
Построены возмущениями гамильтоновых систем, для классической задачи n вихрей на плоскости, с помощью инвариантов Васильева второго порядка. Рассмотрены некоторый динамические свойства этих систем.

1. Инварианты Васильева для геометрических кос

Нашей целью является рассмотрение свойств гамильтоновых систем, отвечающих инвариантам Васильева. Основной задачей здесь является определение влияния динамики таких систем на топологию косы, которая представляет пространственно-временную диаграмму движения точечных вихрей на плоскости. В частности, открытым остается вопрос о том, можно ли изменяя инвариант Васильева и начальные условия получать все возможные косы с заданным числом нитей.

Сформулируем основные определения, связанные с инвариантами Васильева для геометрических кос.

Геометрическая коса представляет собой набор из n восходящих нитей натянутых между двумя параллельными плоскостями в пространстве $\mathbb{R}^3$. Нити начинаются в точках $(0,1,0),\dots(0,n,0)$ и заканчиваются в точках $(0,1,1),\dots(0,n,1)$.



Две геометрические косы являются эквивалентными, если существует изотопия, действующая в пространстве между плоскостями, которая переводит одну косу в другую.

[4]Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00085

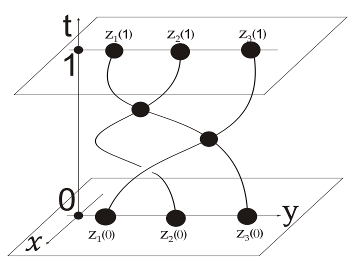
Трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ можно представить как $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Обозначив вертикальное направление за t, будем интерпретировать его как время. Тогда нити косы β определяются графиками функций $z_k = z_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, такими что, $\forall t \in [0;1]$, $z_i(t) \neq z_j(t)$. Таким образом, косе β соответствует движение набора точек $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ по плоскости, при котором точки не сталкиваются друг с другом, а множество точек в начальный момент $z_1(0), \ldots, z_n(0)$ совпадает с множеством точек в конечный момент $z_1(1), \ldots, z_n(1)$. Это движение соответствует пути

$$\gamma : [0;1] \to X_n, \quad \gamma(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t)), \quad t \in [0,1]$$

в конфигурационном пространстве $X_n = \mathbb{C}^n \setminus (\cup_{i<j} H_{ij})$, где H_{ij} - диагональная гиперплоскость определяемая уравнением $z_i - z_j = 0$. Причем, эквивалентным косам соответствуют гомотопные пути с закрепленными концами.

Далее мы будем рассматривать пути в конфигурационном пространстве с произвольными началом в плоскости $\mathbb{C} \times \{0\}$ и концом в плоскости $\mathbb{C} \times \{1\}$. Таким путям соответствуют плетения специального вида в $\mathbb{C} \times [0;1]$, у которых нити должны быть восходящими. То есть, наши плетения специального вида являются косами с подвижными началом и концом. Такие плетения мы также будем называть геометрическими косами или просто косами.

Можно определить сингулярные геометрические косы, то есть косы нити которых могут трансверсально пересекаться друг с другом. Таким косам будут соответствовать пути в пространстве $\mathbb{C}^n$, пересекающие диагональные гиперплоскости H_{ij}.



Сингулярные точки геометрических кос можно развести двумя способами, так как одна из нитей может обойти другую либо с одной, либо с другой стороны. Выберем одну из пересекающихся нитей и в сингулярной точке проведем к ней касательный вектор, направленный по ходу движения соответствующей точки вдоль нити.

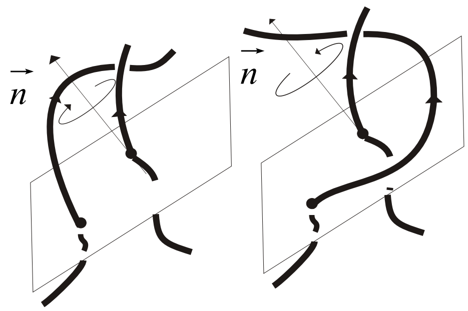


рис. 1

Полуобход второй нити, вокруг первой нити около выбранной точки, который при наблюдении из конца проведенного касательного вектора представляется обходом против часовой стрелки назовем переходом (рис. 1 справа). Второй способ полуобхода будем называть проходом (рис. 1 слева).

Диаграмма косы представляет проекцию косы на некоторую вертикальную плоскость в $\mathbb{R}^3$. Всегда можно подобрать такое направление проектирования, чтобы проекция удовлетворяла следующим требованиям:

1. Проекциями всех касательных к косе являются прямые, то есть исключается случай, когда проекция касательной является точкой.

2. Полный прообраз любой точки проекции косы должен содержать не более двух точек.

3. Если в некоторую точку проецируется две различные точки, то проекции касательных к косе в этих точках не должны совпадать.

Рассмотрим семейство непересекающихся двумерных шаров $B_1, \ldots, B_n \subset \mathbb{R}^3$, таких что проекцию пересечения каждого из этих шаров с данной косой, возможно, после некоторой деформации, неподвижной на границе шара, можно представить одним из вариантов изображенных на рис.2.

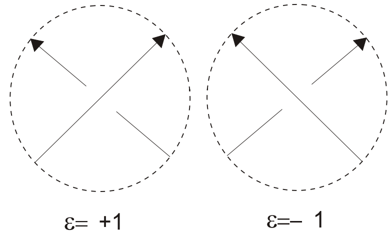


рис. 2

Обозначим каждый из таких перекрестков, полученный в пересечении косы с шаром B_k числами $\varepsilon_k = +1$ или $\varepsilon_k = -1$, как это изображено на рисунке. Знак "плюс"соответствует переходу, знак "минус"соответствует проходу.

Определение 1 *Функция I, определенная на классах изотопий геометрических кос, называется топологическим инвариантом для геометрических кос.*

Топологический инвариант можно распространить на множество сингулярных кос, используя соотношение Васильева

$$I(K^{sing,m+1}) = I(K_+^{sing,m}) - I(K_-^{sing,m}),$$

где $K_+^{sing,m}$ и $K_-^{sing,m}$ - косы с m сингулярными точками, полученные из первоначальной косы заменой одной из сингулярных точек, соответственно, переходом и проходом.

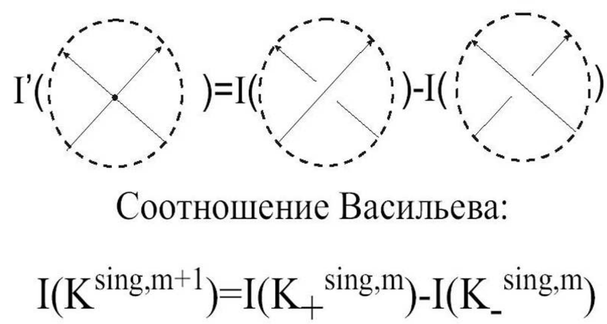


рис. 3

Определение 2 *Инвариант $I : [B_n] \to A$ называется инвариантом Васильева порядка не выше n, если его продолжение по Васильеву на множество сингулярных кос с $n+1$ сингулярной точкой тождественно равен нулю.*

Определение 3 *Инвариант Васильева порядка не выше n называется инвариантом Васильева порядка n, если он не является инвариантом Васильева порядка не выше $n-1$.*

Инварианты Васильева порядка $\leqslant n$ образует линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, которое принято обозначать $V_{\leqslant n}$. Линейное пространство инвариантов Васильева порядка в точности равного n обозначим V_n

Нетрудно видеть, что

$$V_0 \subset V_{\leqslant 1} \subset V_{\leqslant 2} \subset \ldots \subset V_{\leqslant n} \subset \ldots.$$

Очевидно, что $V_n = V_{\leqslant n}/V_{\leqslant n-1}$.

Хордовые диаграммы сингулярных кос, содержащих n нитей, которые имеют точки пересечения, представляют собой набор из n параллельных вертикальных прямых, пронумерованных по порядку слева направо. Пары таких прямых соединяют горизонтальные отрезки, конечные точки которых соответствуют двойным точкам косы. Причем на каждом уровне может располагаться не более одной хорды, отвечающей двойной точке.

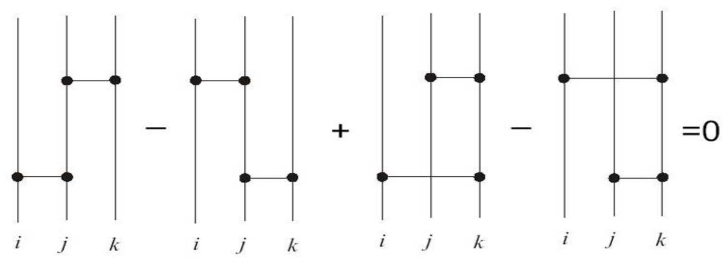
Все инварианты Васильева для кос обладают, так называемым, четырехчленным соотношением, которое на языке хордовых диаграмм записывается в виде

$$[t_{ij} + t_{ik}, t_{jk}] = 0,$$

где $t_{p_1p_2}$ - хордовые диаграммы кос с одним горизонтальным отрезком, соединяющим нити с номерами p_1 и p_2. Для того чтобы найти произведение

$t_{p_1p_2}t_{q_1q_2}$ хордовых диаграмм кос, нужно вторую диаграмму разместить над первой.

Геометрически четырехчленное соотношение для кос выглядит следующим образом:



Четырехчленное соотношение

Другими словами, на языке сингулярных кос и их инвариантов, алгебраическая сумма значений инварианта Васильева на соответствующих сингулярных косах равна нулю.

Отсутствие одночленного соотношения для кос, которое имеет место для узлов, приводит к тому, что инварианты Васильева первого порядка для кос, в отличии от случая узлов, не являются тривиальными.

2. Построение гамильтоновых систем, порожденных инвариантами Васильева конечного порядка

Пусть $X_n = \mathbb{C}^n \setminus (\cup_{i<j} H_{ij})$ – конфигурационное пространство упорядоченных наборов попарно различных n точек комплексной прямой $\mathbb{C}$, где H_{ij} - диагональная гиперплоскость определяемая уравнением $z_i - z_j = 0$, для всех $i < j$.

Зададим замкнутую 1-форму $\widetilde{\omega}$ выражением

$$\widetilde{\omega} = \sum_{i<j} X_{ij} \otimes \omega_{ij} \in \mathcal{A} \otimes \Omega^1(\log(\cup_{i<j} H_{ij})),$$

где $\mathcal{A} = [X_{ij} : 1 \leqslant i < j \leqslant n]$ является алгеброй некоммутирующих полиномов от формальных переменных X_{ij}, а $\Omega^1(\log(\cup_{i<j} H_{ij}))$ - векторное пространство логарифмических дифференциальных 1-форм, порожденное формами

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}.$$

Форма $\widetilde{\omega}$ определяет формальную связность, которая будет интегрируемой в смысле Фробениуса, если выполнено условие $\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega} = 0$. Это условие эквивалентно следующему набору коммутационных соотношений для коэффициентов связности

$$[X_{ij}; X_{jk} + X_{ik}] = 0, \text{ где } i \neq j \neq k \neq i, \tag{1}$$

которые должны выполняться для любого набора гиперплоскостей $H_{ij}; H_{jk}; H_{ik}$, которые в свою очередь удовлетворят условию

$$\mathrm{codim}(H_{ij} \cap H_{jk} \cap H_{ik}) = 2.$$

Здесь, по определению, $[A; B] = AB - BA$.

Интеграл $I_r = \int_\gamma \omega_1 \dots \omega_r$, $r > 1$, является функцией на кусочно-гладких путях в пространстве X_n со значениями в $\mathbb{C}$. Такой интеграл называется итерированным, а его значение вдоль пути γ определяется индуктивным правилом

$$I_r(\gamma) = \int_\gamma \omega_1 \dots \omega_r := \int_\gamma \left(\int_{\gamma^t} \omega_1 \dots \omega_{r-1} \right) \omega_r, \; \gamma^t(\tau) = \gamma(t\tau); \; t, \tau \in [0; 1].$$

Т.Коно показал [6], что если коэффициенты X_{ij} формы $\widetilde{\omega}$ удовлетворяют условию интегрируемости в смысле Фробениуса, то справедлива теорема

Теорема 1 *Сумма* $I_{\leqslant n} = 1 + \int \widetilde{\omega} + \int \widetilde{\omega}\widetilde{\omega} + \ldots + \int \underbrace{\widetilde{\omega} \ldots \widetilde{\omega}}_{n}$ *определяет универсальные инварианты Васильева порядка не выше* n.

Замечание 3 *Коэффициенты* X_{ij} *мы можем трактовать как хордовые диаграммы. Произвольный числовой инвариант Васильева порядка не выше* n *можно получить, применив к коэффициентам итерированного интеграла* $I_{\leqslant n}$ *весовую систему* $W : A_n \to \mathbb{C}$*, сохраняющую соотношения, обеспечивающие интегрируемость формы* $\widetilde{\omega} = \sum_{i<j} X_{ij} \otimes \omega_{ij}$*. Иными словами, весовая система должна обращаться в нуль на идеале порожденном коммутаторами* $[X_{ij}; X_{jk} + X_{ik}]$*, и тем самым, удовлетворять четырехчленному соотношению.*

Построим гамильтонову систему, отвечающую произвольной комплекснозначной аналитической функции $F = K + \sqrt{-1}H$, где K и H - вещественнозначные функции. Будем считать, что координаты каждой k-ой точки z_k и ее импульс p_k являются комплексно сопряженными координатами, то есть $p_k = \overline{z}_k$, но в то же время, будем полагать их независимыми.

Запишем классическую для вихревой динамики скобку Пуассона в комплексных координатах

$$\{f; g\} = -2\sqrt{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Gamma_k} (\partial_k f \overline{\partial}_k g - \overline{\partial}_k f \partial_k g),$$

где Γ_k - некоторые вещественные константы, являющиеся параметрами гамильтоновой системы, которую мы строим.

Выберем в качестве гамильтониана нашей динамической системы мнимую часть функции F, то есть $H = \mathrm{Im} F$.

Утверждение 1 *Производные абсолютных координат по времени $\dot{z}_k$ в силу гамильтоновой системы с гамильтонианом $H = ImF$ вычисляются по формуле*

$$\dot{z}_k = \{z_k; H\} = \frac{1}{\Gamma_k}\overline{\partial}_k\overline{F}.$$

Рассмотрим универсальные инварианты Васильева порядка не выше первого $V = W(1+I_1) = W(1) + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} W(X_{ij}) \int \omega_{ij}$, где W - некоторая весовая система.

В качестве гамильтониана нашей системы выберем мнимую часть инварианта Васильева первого порядка $H(\gamma) = \mathrm{Im}W(I_1(\gamma))$.

Пусть $W(X_{ij}) = c_{ij}$, где $c_{ij} = \Gamma_i\Gamma_j$ и $\forall s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\Gamma_s \in \mathbb{R}$. Тогда Гамильтониан имеет вид

$$H = \mathrm{Im}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \Gamma_i\Gamma_j \int_\gamma \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \Gamma_i\Gamma_j \log r_{ij}.$$

Параметры Γ_k можно трактовать как интенсивности точечных вихрей на плоскости [3].

Нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы

Теорема 2 *Пусть гамильтониан H является мнимой частью инварианта Васильева первого порядка, представленного 1-итерированным интегралом Чена $W(I_1) = \sum_{i<j} \left(\frac{W(X_{ij})}{2\pi\sqrt{-1}} \otimes \int_\gamma d\log(z_i - z_j)\right)$ с весовой системой $W(X_{ij}) = \Gamma_i\Gamma_j$. Тогда динамическая система на конфигурационном пространстве $X_n = \mathbb{C}^n \backslash (\cup_{i<j} H_{ij})$, определяемая гамильтонианом H совпадает с системой n точечных декартовых вихрей на плоскости.*

$$\begin{cases} \Gamma_i\dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i};\ \Gamma_i\dot{y}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \\ H = ImW(I_1(\gamma)) = -\dfrac{1}{2\pi} \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \Gamma_i\Gamma_j \log r_{ij}. \end{cases}$$

Важно подчеркнуть, что роль инварианта Васильева первого порядка в динамике вихревого движения не исчерпывается тем, что его мнимая часть представляет классический гамильтониан системы декартовых вихрей на плоскости. Вещественная часть этого инварианта также имеет вполне определенный физический и геометрический смысл:

Теорема 3 *В классической задаче системы n вихрей на плоскости с гамильтонианом, являющимся мнимой частью инварианта Васильева первого порядка, функция потенциала является действительной частью того же инварианта.*

$$H = ImW\left(\sum_{i\neq j} \frac{X_{ij}}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\log\left(z_i - z_j\right)\right),$$

$$\Phi = ReW\biggl(\sum_{i\neq j}\frac{X_{ij}}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\log\left(z_i - z_j\right)\biggr),$$

где $W(X_{ij}) = \Gamma_i\Gamma_j$.

Система декартовых вихрей на плоскости является дискретной аппроксимацией уравнения Эйлера [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(v,\nabla)v - \nabla p$$
$$div\, v = 0.$$

Уравнение Эйлера в форме Гельмгольца

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\{v,\omega\},\ \text{где}\ \omega = rot\, v.$$

Оно совпадает со вторым уравнением системы уравнений МГД

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\, v}{\partial t} = -(v,\nabla)v + (rotB)\times B - \nabla p\\ \dfrac{\partial B}{\partial t} = -\{v,B\}\\ div\, B = 0\\ div\, v = 0,\end{cases}$$

если положить $B = rot\, v$.

Функция тока ψ плоского векторного поля v определяется соотношениями

$$\dot{x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \ \dot{y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Нетрудно показать, что

$$\Delta\psi = \omega,\ \text{где}\ \omega = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\delta(z - z_i).$$

Решение данного уравнения будет иметь вид

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i\log|z - z_i|.$$

Эта функция тока соответствует гамильтониану

$$H = -\frac{1}{2\pi}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\Gamma_i\Gamma_j\log r_{ij}$$

классической задачи о движении точечных вихрей на плоскости.

3. Гамильтоновы системы, порожденные инвариантами Васильева порядка не выше второго

С инвариантом Васильева второго порядка можно связать динамическую систему с гамильтонианом $H = \mathrm{Im} W(I_{\leqslant 2}(\gamma))$, где $I_2 = \int \widetilde{\omega}\widetilde{\omega}$ есть 2-итерированный интеграл Чена.

Уравнения Гамильтона будут иметь вид

$$\begin{cases} \Gamma_i \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i};\ \Gamma_i \dot{y}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \\ H = \mathrm{Im}\ W(I_{\leqslant 2}(\gamma)) = Const + \displaystyle\sum_{1\leqslant r<s\leqslant n} W(X_{rs}) \int_\gamma \omega_{rs} + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} W(X_{ij}X_{kl}) \int_\gamma \omega_{ij}\omega_{kl}. \end{cases}$$

Покажем, что частным случаем данной системы является система уравнений проанализированная Бергером [5]. Действительно, пусть $n = 3$. Выберем весовую систему следующим образом:

$$W(X_{ij}) = 0;$$

$$W(X_{ij}X_{kl}) = \frac{1}{2}(-1)^{(k-i+l-j)} \cdot \mathrm{sign}(k - i + l - j).$$

Легко проверить, что данная весовая система сохраняет требования на интегрируемость формы $\widetilde{\omega}$.

Итерированный интеграл $I_2 = \int \widetilde{\omega}\widetilde{\omega} = \sum_{i<j} \sum_{k<l} W(X_{ij}X_{kl}) \int \omega_{ij}\omega_{kl}$ примет вид

$$W(I_2) = \int \widetilde{\omega}\widetilde{\omega} = \frac{1}{2}\Big[\int_\gamma \omega_{12}\omega_{13} - \int_\gamma \omega_{23}\omega_{13} + \int_\gamma \omega_{23}\omega_{12} - \int_\gamma \omega_{13}\omega_{12} + \\ + \int_\gamma \omega_{13}\omega_{23} - \int_\gamma \omega_{12}\omega_{23} \Big].$$

В качестве гамильтониана динамической системы выберем мнимую часть построенного инварианта Васильева $H = \mathrm{Im}\, W(I_2(\gamma))$. Не трудно указать явный вид гамильтоновой системы, воспользовавшись соотношением $\Gamma_i \dot{z}_i = \overline{\partial}_i \overline{I}_2,\ i = 1, 2, 3$.

Бергер доказал, что движение трех материальных точек на плоскости, соответствующее данной гамильтоновой системе, происходит в ограниченной области, при этом центр масс остается неподвижным.

Рассматривая случай движения трех вихрей, уравнения которых описываются гамильтоновыми системами, порожденными инвариантами Васильева второго порядка, полезно рассмотреть следующее разложение для этого инварианта

$$\int \widetilde{\omega}\widetilde{\omega} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \sum_{1\leqslant k<l\leqslant 3} X_{ij}X_{kl} \otimes \int_\gamma \omega_{ij}\omega_{kl} =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg[X_{12}X_{12} \otimes \int \omega_{12} \int \omega_{12} + X_{13}X_{13} \otimes \int \omega_{13} \int \omega_{13} +$$

$$+X_{23}X_{23} \otimes \int \omega_{23} \int \omega_{23}\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{2}\Bigg[(X_{13}X_{12} + X_{12}X_{13}) \otimes \int \omega_{13} \int \omega_{12} +$$

$$+(X_{23}X_{13} + X_{13}X_{23}) \otimes \int \omega_{13} \int \omega_{23} +$$

$$+(X_{23}X_{12} + X_{12}X_{23}) \otimes \int \omega_{12} \int \omega_{23}\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{2}(X_{13}X_{12} - X_{12}X_{13}) \otimes \Bigg[\int (\omega_{13} - \omega_{23})\omega_{12} +$$

$$+ \int (\omega_{23} - \omega_{12})\omega_{13} + \int (\omega_{12} - \omega_{13})\omega_{23}\Bigg]$$

Это разложение получено применением свойств итерированных интегралов, а так же соотношений на коэффициенты X_{ij}

Таким образом, для произвольной весовой системы имеет место следующее

Утверждение 2 *Произвольный 2-итерированный интеграл, задающий инвариант Васильева второго порядка для геометрических кос с тремя нитями, можно представить в виде суммы трех инвариантом Васильева второго порядка, два из которых являются суммой разложимых инвариантов Васильева второго порядка (то есть, представляются в виде произведения инвариантов Васильева первого порядка), а третий инвариант представляет интеграл, рассмотренный Бергером, и является неразложимым инвариантом Васильева второго порядка.*

Введем новые переменную $\Delta_{123} = \overrightarrow{r}_{12} \times \overrightarrow{r}_{13}$, являющуюся значением ориентированной площади параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{r}_{12}$ и $\overrightarrow{r}_{13}$, где $\overrightarrow{r}_{ij}$ – вектор, проведенный из центра i-ого в центр j-ого вихря.

Необходимым и достаточным условием сохранения коллинеарных конфигураций трех вихрей являются уравнения

$$\begin{cases} \Delta_{123} = 0 \\ \dot{\Delta}_{123} = 0. \end{cases}$$

Если вихри расположены на одной прямой, то все относительные координаты можно выразить через одну из них. Например, можно положить

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = z_{12} \\ z_3 - z_2 = u \cdot z_{12} \\ z_3 - z_1 = (u-1) \cdot z_{12}. \end{cases}$$

Прямым вычислением можно показать, что справедлива теорема, которая является обобщением классического результата, отмеченного Борисовым и Мамаевым в [2].

Теорема 4 *Пусть гамильтониан системы трех вихрей представляет инвариант Васильева порядка не выше второго, выраженный суммой итерированных интегралов Чена, с симметрической весовой системой* $W(X_{ij}X_{kl}) = W(X_{ij})W(X_{kl})$, *где* $W(X_{ij}) = \Gamma_i\Gamma_j$, *тогда уравнение, определяющее коллинеарные конфигурации данной неклассической системы вихрей полностью совпадает с уравнением для классической задачи трех точечных вихрей на плоскости*

$$(\Gamma_1+\Gamma_2)u^3 - (2\Gamma_1+\Gamma_2)u^2 - (2\Gamma_3+\Gamma_2)u + (\Gamma_2+\Gamma_3) = 0.$$

Замечание 4 *Для системы* n *вихрей на плоскости с интенсивностями* Γ_k *введено понятие центра завихренности*

$$\frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2 + \ldots + \Gamma_n z_n}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_n},$$

которое является аналогом центра масс для n *материальных точек. Нетрудно видеть, что построенные возмущения гамильтоновых систем с помощью инварианта Васильева второго порядка обладают свойством*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2 + \Gamma_3 z_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\right) = \frac{\Gamma_1 \dot z_1 + \Gamma_2 \dot z_2 + \Gamma_3 \dot z_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} = 0,$$

которое означает неподвижность центра завихренности системы трех вихрей на плоскости с интенсивностями Γ_1, Γ_2 *и* Γ_3.

Литература

[1] Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике/ Перевод с англ.–М.: МЦНМО, 2007.–392с.

[2] Борисов А.В., Мамаев И.С. Математические методы динамики вихревых структур.–М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.–368 с.

[3] Козлов В.В. Общая теория вихрей [Текст]/В.В.Козлов.–Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1998.–238 с.

[4] Хейн Р.М. Итерированные интегралы и проблема гомотопических периодов.- М.: Наука, 1988.- 95с.

[5] Berger M.A. Hamiltonian dynamics generated by Vassiliev invariants// J. Phys. A: Math. Gen., 2001.–v.34.–P.1363–1374.

[6] Kohno T. Vassiliev Invariants of Braids and Iterated Integrals// Advanced Studies in Pure Mathematics, 2000.–v. 27.–P.157–168.

[7] Kontsevich M. Vassiliev's Knot Invariants. Advances in Sovet Mathematics, Volum 16, Part 2, 1993.- pp.137-150.

Костин Д.В., Сапронов Ю.И.

Применение асимптотических методов теории линейных операторов в анализе бифуркаций экстремалей

Введение

При рассмотрении дифференциальных уравнений с большим числом параметров зачастую получить явный вид решения не является достаточным для исследователя. Картина предстает намного более полной и ясной, когда результат анализа уравнения дополнен соотношениями, напрямую показывающими множество значений параметров, при которых существуют вырожденные решения. График этих соотношений (дискриминантное множество) делит пространство управляющих параметров на ячейки, каждой из которых соответствует постоянный состав решений (т.е. неизменный по количеству и качеству при вариациях параметра вдоль ячейки).

Представленный здесь способ описания каустик и bif-раскладов опирается на схемы конечномерных редукций, представляющие собой аппарат исследования потенциальных физических систем с неединственностью состояний, к каковым относятся, например, упругие конструкции в закритических равновесных состояниях, сегнетоэлектрические фазы кристаллов и т.п. [1]–[5].

Вариационную версию редуцирующей схемы Ляпунова–Шмидта можно представить как нелинейный аналог ритцевской аппроксимации. Классической ритцевской аппроксимацией функционала V на банаховом пространстве E называется функция

$$W(\xi) := V\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right), \quad \xi = (\xi_1, \ \ldots \ , \xi_n)^\top,$$

где $e_1, \ \ldots \ , e_n$ — некоторый линейно независимый набор векторов в E (базис ритцевской аппроксимации). Экстремалям $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \ \ldots \ , \bar{\xi}_n)^\top$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{\xi}_j e_j$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V. Точность ритцевских аппроксимаций повышается за счет увеличения количества базисных элементов.

Если, обобщая, рассмотреть "нелинейные" аппроксимации вида

$$W(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j + \Phi(\xi)\right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := span(e_1, \ldots, e_n)$ в $N^\perp$ (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигать любой аппроксимативной точности при фиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы.

Особую актуальность схемам конечномерных редукций придает в текущий момент то, что они позволяют разрабатывать *алгоритмы компьютерного сопровождения* решений вариационных задач, посредством которых можно получать наглядную информацию о существовании и бифуркациях экстремалей, об индексах Морса бифурцирующих экстремалей и о метаморфозах поверхностей уровней функционалов энергии.

Основной результат данной статьи — распространение численно-аналитической процедуры, разработанной Б.М. Даринским и Ю.И. Сапроновым для однородных сред, на случай неоднородных сред. Главное различие этих случаев состоит в том, что в первом из них существует фиксированный базис из собственных функций (мод бифуркаций), по которым вычисляется конечномерное усечение системы (ключевая функция), во втором базиса, вообще говоря, нет. Вместо него строится система функций (линейная оболочка), которая инвариантна относительно действия второго дифференциала в нуле. Оказывается, что этого достаточно для построения ключевой функции.

Вычисление главной части ключевой функции в случае постоянного базиса ритцевской аппроксимации.

Пусть $f : E \longrightarrow F$ — гладкое фредгольмово отображение нулевого индекса банаховых пространств, такое, что

$$\langle f(x), h\rangle \equiv \frac{\partial V}{\partial x}(x)h, \tag{1}$$

где V — гладкий функционал на E (потенциал отображения f), $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве H, содержащем E и F как непрерывно и плотно вложенные подпространства. Предполагается также, что E непрерывно вложено в F. В этом случае будем говорить, что функционал V обладает градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$ и использовать обозначения $f = grad\, V = \nabla V$.

В описанных условиях множество решений уравнения

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

совпадает с множеством критических точек функционала V. Действительно, из условия $\partial V\big/\partial x(x) = 0$ вытекает условие $f(x) \in E^{\perp}$, а $E^{\perp} = \{0\}$ ввиду плотности E в H.

Напомним, что точка a называется критической точкой (экстремалью) данного функционала $V(x)$, если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \langle f(a), h\rangle_H = 0, \qquad \forall\ h \in E \setminus 0.$$

Предположим, что мы имеем гладкое потенциальное фредгольмово уравнение с параметром

$$f(x, \lambda) = 0. \tag{3}$$

Пусть его потенциалом является функционал $V(x,\lambda)$, $x\in E$, $\lambda\in\mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{O}(0)$ — некоторая открытая окрестность нуля в E, $\mathcal{U}(0)$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^m$ и $f(0,\lambda)=0$, $\forall\lambda$. Пусть, наконец, выполнены следующие два условия (см. [5]):
1) на $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких нормированных в $\mathcal{H}$ функций $\{e_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\lambda\in\mathcal{U}(0)$, из E (постоянных мод бифуркации) таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\lambda)e_j(\lambda)=\alpha_j(\lambda)e_j(\lambda), \tag{4}$$

где $\{\alpha_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ — гладкие спектральные функции; 2) 0 — невырожденная критическая точка сужения $V(x,0)|_{L_0}$, где $L_\lambda := E\cap N_\lambda^\perp$, $N_\lambda^\perp$ — ортогональное дополнение в $\mathcal{H}$ к $N_\lambda = Span\{e_1(\lambda),\ \dots\ ,\ e_n(\lambda)\}$.

Для любого $x\in\mathcal{O}(0)$ положим $\xi_j(\lambda)=\langle x,e_j(\lambda)\rangle$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$. Тогда

$$x=\sum_{j=1}^n\xi_j(\lambda)e_j(\lambda)+v(\lambda), \qquad v(\lambda)\perp e_j(\lambda)\quad \forall j.$$

Аналогично

$$f(x,\lambda)=\sum_{j=1}^n f_j(x,\lambda)e_j(\lambda)+f_*(x,\lambda), \qquad f_*(x,\lambda)\perp e_j(\lambda)\quad \forall j.$$

Пусть $L_\lambda^* = F\cap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия 2) следует, что $f_*(\cdot,0) : L_0 \longrightarrow L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\mathcal{O}(0)$ точки $0\in L_0$). Следовательно, найдется, по теореме о неявной функции, такая гладкая функция $u=\Phi(\xi,\lambda)$, $(\xi,\lambda)\in\mathcal{O}^n(0)\times\mathcal{U}(0)$, $\Phi(\xi,\lambda)\in L_\lambda$, где $\mathcal{O}^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, что

$$f_*\left(\sum_{j=1}^n\xi_je_j(\lambda)+\Phi(\xi,\lambda),\lambda\right)=0 \qquad \forall(\xi,\lambda)\in\mathcal{O}^n(0)\times\mathcal{U}(0).$$

Функция $W(\xi,\lambda) = V\left(\sum\limits_{j=1}^n\xi_je_j(\lambda)+\Phi(\xi,\lambda),\lambda\right)$ является ключевой для функционала $V(x,\lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x,\lambda)=0$ [5].

Для исследования ключевой функции W часто достаточно ограничиться несколькими членами разложения W в ряд Тейлора. В локальных вариационных задачах это производится при помощи специальным образом подобранной ритцевской аппроксимации функционала $V(x)$, заданной выражением

$$W_R(\xi)=V\left(\sum_{j=1}^n\xi_je_j\right), \qquad \xi=(\xi_1,...,\xi_n)^\top,$$

где $\{e_1,...,e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Обоснование того, что отбрасывание "тейлоровского хвоста" не изменяет топологию бифуркационных диаграмм и структуру $bif-$раскладов, проводится на основе теорем о конечной определенности ростков отображений и их деформаций [6].

Рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x,\lambda) = const + \frac{1}{2}\langle A(\lambda)x, x\rangle_{\mathcal{H}} + V_{\lambda}^{(3)}(x) + V_{\lambda}^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,\lambda)$, $V_{\lambda}^{(3)}$ и $V_{\lambda}^{(4)}$ — однородные формы третьего и четвертого порядков на E. Пусть на $\mathcal{H}$ задан набор инволюций $\{J_k\}_{k=1}^{n}$ таких, что
1) $J_k(E) \subset E$, $J_k(F) \subset F$, $k = 1, \ldots, n$,
2) $J_k(e_k(\lambda)) = -e_k(\lambda)$, $J_k(e_j(\lambda)) = e_j(\lambda)$, $k \neq j$.

Пусть потенциал $V(\cdot,\lambda)$ инвариантен относительно J_k:

$$V(J_k(x),\lambda) = V(x,\lambda), \quad k = 1, \ldots, n, \ \forall\, x,\, \lambda. \tag{5}$$

Тогда ключевая функция $W(\xi,\lambda)$ четна по каждой переменной ξ_j и, следовательно, её тейлоровское разложение имеет следующий вид [4, 5]:

$$W(\xi,\lambda) = const + W_{\lambda}^{(2)}(\xi) + W_{\lambda}^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_{\lambda}^{(2)}$ и $W_{\lambda}^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ_j. Из (5) следует, что

$$W(\xi,\lambda) = const + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\lambda)\xi_j^2 + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5) + O(|\lambda|)o(|\xi|^3).$$

Так как $\alpha_j(0) = 0$, то

$$W(\xi,0) = const + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

($W_0^{(4)}(\xi)$ — форма четвертого порядка). Нетрудно проверить [4], что

$$W_0^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}\langle AB(u), B(u)\rangle_{\mathcal{H}} + 3V_0^{(3)}(u,u,B(u)) + V_0^{(4)}(u),$$

где $u = \sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j e_j$, $e_j = e_j(0)$, $A = A(0)$, $V_0^{(3)}$ — симметричная $3-$линейная форма, отвечающая $V_0^{(3)}$ $\left(V_0^{(3)}(u) = \mathcal{V}_0^{(3)}(u,u,u)\right)$, B — квадратичное отображение $N_0 \longrightarrow L_0^*$, полученное выделением квадратичной части отображения $u \longrightarrow \Phi(\xi,0)$. Нетрудно также заметить, что $B(u) = -A_*^{-1} grad_{L_0} V_0^{(3)}(u)$ ($A_* = A|_{L_0}$). Для четного потенциала V имеем $V_0^{(3)} = 0$, $B(u) = 0$, и, следовательно, $W_0^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(u)$. Таким образом, для W получаем следующее представление [4]:

$$const + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\lambda)\xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi,0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + o(|\xi|^5), \tag{6}$$

где $W_R^{(4)}(\xi,0)=V_0^{(4)}(\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j e_j)$. Пусть

$$V_0^{(4)}(x)=\mathcal{V}_0^{(4)}(x,x,x,x)$$

($\mathcal{V}_0^{(4)}(x,y,z,t)$ — симметричная 4−линейная форма). Тогда, с учетом симметрии, получаем соотношение

$$W_R^{(4)}(\xi)=\sum_{k=1}^{n}V_0^{(4)}(e_k)\xi_k^4+6\sum_{i<j}^{n}\mathcal{V}_0^{(4)}(e_i,e_i,e_j,e_j)\xi_i^2\xi_j^2. \tag{7}$$

Вычисление главной части ключевой функции в случае переменного базиса ритцевской аппроксимации.

В случае, когда моды бифуркаций зависят от некоторых параметров, схема построения ключевой функции требует принципиального обобщения. Условие, чтобы моды были собственными функциями, заменяется более общим условием – гладкой зависимостью базиса аппроксимации от значения параметров.

Итак, пусть выполнены следующие два условия: 1) на $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких нормированных в $\mathcal{H}$ функций $\{e_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\lambda\in\mathcal{U}(0)$, из E (постоянных мод бифуркации) таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\lambda)e_j(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{j,k}(\lambda)e_j(\lambda), \tag{8}$$

где $\{\alpha_{j,k}(\lambda)\}_{j=1}^n$ — гладкие функции; 2) 0 — невырожденная критическая точка сужения $V(x,0)|_{L_0}$, где $L_\lambda:=E\cap N_\lambda^\perp$, $N_\lambda^\perp$ — ортогональное дополнение в $\mathcal{H}$ к $N_\lambda=Span\{e_1(\lambda),\ \dots\ ,e_n(\lambda)\}$.

Главная часть ключевой функции W по-прежнему определяется ритцевской аппроксимацией функционала $V(x)$

$$W_R(\xi)=V\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j\right),\qquad \xi=(\xi_1,...,\xi_n)^\top.$$

Вновь рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x,\lambda)=const+\frac{1}{2}\langle A(\lambda)x,x\rangle_{\mathcal{H}}+V_\lambda^{(4)}(x)+o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,\lambda)$, и $V_\lambda^{(4)}$ — однородная форма четвертого порядков на E.

Тейлоровское разложение ключевой функции $W(\xi,\lambda)$ имеет следующий вид:

$$W(\xi,\lambda)=const+W_\lambda^{(2)}(\xi)+W_\lambda^{(4)}(\xi)+o(|\xi|^5),$$

где $W_\lambda^{(2)}$ и $W_\lambda^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, заметим, что только форма четвертого порядка четна по ξ. Следовательно, появляется дополнительное слагаемое, разрушающее симметрию прямоугольника, и ключевая функция имеет вид

$$W(\xi,\lambda) = const + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\lambda)\xi_i\xi_j + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5) + O(|\lambda|)o(|\xi|^3).$$

Так как $\alpha_{i,j}(0) = 0$, то

$$W(\xi,0) = const + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

($W_0^{(4)}(\xi)$ — форма четвертого порядка). Нетрудно проверить, что

$$W_0^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}\langle AB(u), B(u)\rangle_{\mathcal{H}} + V_0^{(4)}(u),$$

где $u = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j e_j,\ \ e_j = e_j(0),\ \ A = A(0)$. То есть, для потенциала V имеем $W_0^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(u)$. Таким образом, для W получаем следующее представление:

$$const + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\lambda)\xi_i\xi_j + W_R^{(4)}(\xi,0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + o(|\xi|^5), \tag{9}$$

где $W_R^{(4)}(\xi,0) = V_0^{(4)}(\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j e_j)$. Если $V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x,x,x,x)$ ($\mathcal{V}_0^{(4)}(x,y,z,t)$ — симметричная 4−линейная форма), то

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} V_0^{(4)}(e_k)\xi_k^4 + 6\sum_{i<j}^{n} \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i,e_i,e_j,e_j)\xi_i^2\xi_j^2. \tag{10}$$

Построение базиса ритцевской аппроксимации.

Кроме полученного выше вида ключевой функции, ниже будут получены формулы для построения переменного базиса ритцевской аппроксимации. Пусть при $\lambda = 0$ ведущие моды бифуркации определены и представляют собой набор $\{e_j\}_{j=1}^n$. Будем разыскивать набор $\{\widetilde{e}_j\}_{j=1}^n$, где $\widetilde{e}_j$ — "возмущенная" мода бифуркации:

$$\widetilde{e}_k = e_k + \sum_j h_{k,j}\lambda_j + o(\lambda),$$

образующие базис в n−мерном корневом подпространстве оператора Гессе $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B}(\lambda)$ в нуле, где e_k — невозмущенные моды бифуркации (элементы $\widetilde{e}_k$ не являются, вообще говоря, собственными функциями оператора $\mathcal{H}$).

Основная техническая трудность в построении главной части ключевой функции состоит в вычислении коэффициентов $h_{k,j}$. Их можно определить на основе формулы ортогонального проектора на корневое подпространство возмущенного симметричного оператора, приведенной в монографии В.П.Маслова [8].

Итак, вместо собственных функций рассматрим такие элементы $\widetilde{e}_j(\lambda)$, $j = 1, 2, .., n$ для которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)\widetilde{e}_j(\lambda) = \sum_k \alpha_{jk}(\lambda)\, \widetilde{e}_k(\lambda).$$

Функции $\widetilde{e}_j(\lambda)$ будем называть корневыми.

Важным сопутствующим обстоятельством в предложенном здесь подходе является то, что входящие в эти соотношения функции $\alpha_{jk}(\lambda)$, $\widetilde{e}_j(\lambda)$ будут гладко зависеть от λ.

В качестве искомых базисных элементов можно взять

$$\widetilde{e}_k(\lambda) \;:=\; \mathbf{P}(\lambda)(e_k),$$

где

$$\mathbf{P}(\lambda) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell} \mathcal{R}(\lambda, z)dz$$

— ортопроектор на $n-$мерное корневое подпространство, ℓ — окружность достаточно малого радиуса с центром в нуле (на комплексной плоскости), $\mathcal{R}(\lambda, z)$ — резольвента:

$$\mathcal{R}(\lambda, z) = ((\mathcal{A} + \mathcal{B}(\varepsilon) - zI)^{-1}\,.$$

Под ε понимается вектор-функция, зависящая от тех параметров, которые влияют на базис апроксимации. Приведем данную резольвенту к более удобному виду (воспользовавшись разложением оператора $I{+}\mathcal{B}(\varepsilon)\,(\mathcal{A} - zI)^{-1}$ в ряд Неймона):

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}(\varepsilon) - zI)^{-1} = (\mathcal{A} - zI)^{-1}\,[I + \mathcal{B}(\varepsilon)\,(\mathcal{A} - zI)^{-1}]^{-1} =$$

$$= (\mathcal{A} - zI)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[\mathcal{B}(\varepsilon)\,(\mathcal{A} - zI)^{-1}]^k.$$

В нашем случае достаточно обойтись лишь линейными по ε слагаемыми этого ряда. Таким образом,

$$\mathbf{P}(\lambda) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}(\mathcal{A} - zI)^{-1}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}(\mathcal{A} - zI)^{-1}\,\mathcal{B}(\varepsilon)(\mathcal{A} - zI)^{-1}dz.$$

Так как оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$ является гладким, то $\mathcal{B}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} B_j\varepsilon_j + o(\varepsilon)$. Обозначив первое слагаемое правой части последнего уравнения через P_0, получим:

$$\mathbf{P} = P_0 - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}(\mathcal{A} - zI)^{-1}\sum_{j=1}^{n} B_j\varepsilon_j(\varepsilon)(\mathcal{A} - zI)^{-1}dz + o(\varepsilon).$$

Сумму можно вынести за знак интеграла, и обозначив

$$P_j := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} B_j (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz, \tag{11}$$

получим конечный вид формулы для вычисления переменных мод бифуркаций:

$$\widetilde{e}_k = \mathbf{P} e_k = e_k - \sum_j \varepsilon_j h_{k,j} + o(\lambda), \tag{12}$$

$$\mathbf{P} = P_0 - \sum_{j=1}^{n} P_j \varepsilon_j + o(\varepsilon),$$

где

$$h_{k,j} = P_j e_k. \tag{13}$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема *Возмущенные корневые векторы $\widetilde{e}_k$, можно представить в виде (12), где $h_{k,j}$ определяются соотношениями (11),(13).*

Литература

[1] М.А. Красносельский, Н.А. Бобылев, Э.М. Мухамадиев, "Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления" // *ДАН СССР* 1978. – Т. 240, N 3. 530–533.

[2] Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, "Двухмодовых бифуркациях решений одной вариационной краевой задачи для уравнения четвертого порядка", *Понтрягинские чтения – XI*, Сборник трудов. Часть 1, Воронеж, ВГУ, 2000, 57–64.

[3] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений// Современная математика и ее приложения. – Тбилиси. 2003. Т.7. – С.72-86.

[4] Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах// Успехи матем. наук. – 1996. Т. 51, N 1. – С. 101-132.

[5] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л., Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. М.: МАИ. Т.12. 2004. С.3–140.

[6] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. – М.: Наука. 1982. – 304 с.

[7] Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки//Докл. РАН – 2008. Т. 418, №3. – С.295-299

[8] Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.

[9] Костин Д.В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях Математические заметки том 83. 1 января 2008 С.39-49

Котиков А.Э.

Бифуркация бегущих волн видоизмененного уравнения Гинзбурга-Ландау

1. Постановка задачи

В работе рассматривается дифференциальное уравнение

$$u_t = u - (1+ic)u|u|^4 - ibu_{xx}, \quad u = u(t,x) \in \mathrm{C}, \tag{1}$$

для которого b и c – действительные постоянные, причем для определенности будем считать $b > 0$. Значения функции $u(t,x)$ принадлежат полю комплексных чисел.

Это уравнение является видоизмененным уравнением Гинзбурга-Ландау и анализ локальных бифуркаций его бегущих волн продолжает работу [2] в области применения теории нормальных форм к исследованию динамики нелинейных систем.

Уравнение (1) будем рассматривать на отрезке $[-\pi,\pi]$ вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t,-\pi) = u(t,\pi), \quad u_x(t,-\pi) = u_x(t,\pi), \quad t \in [0,\infty). \tag{2}$$

Как и в работе [2], в которой уравнение Гинзбурга-Ландау

$$u_t = u - (1+ic)u|u|^2 - ibu_{xx}, \quad u = u(t,x) \in \mathrm{C}, \tag{3}$$

рассматривалось вместе с периодическими краевыми условиями (2), краевая задача (1),(2) допускает автомодельные периодические решения вида

$$u_n(t,x) = \exp\left(i(nx + \omega_n t)\right), \tag{4}$$

которые можно считать бегущими волнами, для которых $\omega_n \in \mathrm{R}$, $n \in \mathrm{Z}$. Подстановка функции (4) в исходное уравнение (1) позволяет найти условия существования бегущих волн

$$\omega_n = -c + bn^2.$$

При $n = 0$ получаем решение $u_0(t) = \exp(-ict)$, которое в физике принято называть термодинамической ветвью.

Далее предлагается исследовать вопрос о устойчивости решений (4) и вопрос о локальных бифуркациях бегущих волн при смене ими устойчивости. Устойчивость бегущих волн естественно рассматривать в норме фазового пространства решений краевой задачи. В нашем случае таким пространством будет H_2^2 – пространство Соболева, функций, которые 2π-периодичны по переменной x и имеют обобщенные производные до второго порядка включительно, интегрируемые с квадратом на $[-\pi,\pi]$

$$\|u\|_{H^2_{2[-\pi,\pi]}} = \|u\|_{L_2} + \|u_x\|_{L_2} + \|u_{xx}\|_{L_2}, \quad \|u\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dx}.$$

Исследование этих двух поставленных вопросов облегчает технический прием, используемый в работе [1], который часто называется принципом самоподобия.

Осуществим подстановку в исходное уравнение следующего выражения

$$u(t,x) = v(t,y)\exp{(inx)}\exp{(ibn^2t)}, \quad y = x + 2bnt. \tag{5}$$

Для $v(t,y)$ получаем независимое от n уравнение подобное исследуемому

$$v_t = v - (1+ic)v|v|^4 - ibv_{yy}. \tag{6}$$

Замечаем, что

$$v(t,y) = \exp(-ict) = u_0(t). \tag{7}$$

Таким образом, для исследования устойчивости бегущих волн (4) достаточно рассмотреть устойчивость лишь одного решения (7).

2. Устойчивость термодинамической ветви

Исследование устойчивости термодинамической ветви позволяет установить следующий вывод

Лемма 1 *Периодическое решение (4) краевой задачи (1),(2) устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво), если $b > 4c$ и неустойчиво, если $b < 4c$.*

Замечание 1 *Значению $b = 4c$ соответсвует критический случай в задаче об устойчивости решения (4). Все точки спектра, кроме одной лежат в полуплоскости, определяемой неравенством*

$$Re\lambda \leqslant -\gamma < 0,$$

нулевое собственное значение имеет кратность 3.

Восстановим последовательность шагов, приводящую к указанному выводу. Заменой $v(t,y) = u_0(t)(1 + w(t,y))$ переходим к краевой задаче

$$w_t = L(c,b)w - (1+ic)F(w), \tag{8}$$

$$w(t,-\pi) = w(t,\pi), \quad w_y(t,-\pi) = w_y(t,\pi). \tag{9}$$

для которой следует изучить вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия, $L(c,b)$ – линейный дифференциальный оператор, $F(w)$ – нелинейность. Линеаризуем в нуле краевую задачу (8),(9) и исследуем спектр линейного диффференциального оператора, построив его характеристический многочлен.

В случае $b = 4c$, линейный дифференциальный оператор

$$L(c, 4c) = -(1 + ic)(2v + 2\bar{v}) - 4icv_{yy}$$

имеет трехкратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции

$$e_0(y) = i, \quad e_1(y) = (-c + i)cosy, \quad e_2(y) = (-c + i)siny.$$

При $b = 4c - \varepsilon$, если $\varepsilon > 0$, оператор $L(c, 4c - \varepsilon)$ имеет собственные значения, которые все лежат в правой комплексной полуплоскости.

Пусть теперь оператор $L(c, b)$ определен на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих однородным условиям Неймана

$$v_y(0) = v_y(\pi) = 0,$$

тогда оператор $L(c, 4c)$ имеет нулевое собственное значение кратности 2, так как ему отвечают лишь две собственные функции $e_0(y)$, $e_1(y)$. Оператор $L(c, 4c)$ имеет двумерное ядро, неоднородное уравнение

$$L(c, 4c)v = h(y) \tag{10}$$

разрешимо не при любой правой части, таким образом, следует рассмотреть условия разрешимости этого неоднородного уравнения. Последний вопрос достаточно изучить лишь в частном случае, когда $h(y)$ имеет специальный вид.

Лемма 2 *Пусть $h(y) = h_0 \in C$. При таком выборе правой части уравнение (10) имеет решение лишь в том случае, когда $Imh_0 = cReh_0$.*

Лемма 3 *Пусть $h(y) = h_0 \cos y$, где $h_0 \in C$. Для разрешимости неоднородного уравнения (10) необходимо и достаточно выполнения неравенства $Imh_0 = 0$.*

Доказательство лемм 2-3 проводится стандартным способом.

Здесь и ниже используется методика более подробно изложенная в работах [2-3], где рассматривались близкие по постановке задачи.

3. Вспомогательная бифуркационная задача

Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$v_t = v - (1 + ic)v|v|^4 - i(4c - \varepsilon)v_{yy}, \tag{11}$$

$$v_y(t, 0) = v_y(t, \pi) = 0. \tag{12}$$

У этой задачи рассмотрим вопрос о структуре окрестности решения

$$v_0(t) = \exp(-ict).$$

Для описания окрестности периодического решения $v_0(t)$ рассмотрим семейство периодических решений и положим, что

$$v(t,y,\varepsilon) = \exp(-ict + i\psi(t))(1 + w(t,y,\varepsilon)). \tag{13}$$

Подстановка равенства (13) в краевую задачу (11),(12) позволяет найти, что функция $w(t,y,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{w} + i\dot{\psi}(1 + w) = L(c, 4c - \varepsilon)w - (1 + ic)F(w), \tag{14}$$

а также краевым условиям

$$w_y(t,0,\varepsilon) = w_y(t,\pi,\varepsilon) = 0, \tag{15}$$

здесь и далее точкой будем обозначать производную по t. В свою очередь, прямое разложение функции w будет иметь вид

$$w(t,y,\varepsilon) = \eta(\varepsilon)w_1(y) + \eta^2(\varepsilon)w_2(y) + \eta^3(\varepsilon)w_3(y) + \varepsilon\eta(\varepsilon)w_0(y) + \ldots, \tag{16}$$

где функции $w_i(y), i = 0,\ldots,3$ удовлетворяют однородным условиям Неймана, точками обозначены слагаемые имеющие более высокий порядок малости по сравнению с первыми четырьмя из суммы (16). Наконец, функции $\psi(t)$, $\eta(t)$ со значениями в R удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \beta\eta^2 + O(\eta^4), \\ \dot{\eta} &= \varepsilon\alpha\eta + \gamma\eta^3 + O(\eta^5, \varepsilon\eta^2). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $\beta, \alpha, \gamma \in R$. Систему уравнений (17) принято называть нормальной формой. Ее решения определяют динамику решений краевой задачи (14),(15) в достаточно малой окрестности однородного цикла $u_0(t)$.

Для определения коэффициентов нормальной формы (17) следует подставить (16) с учетом системы (17) в краевую задачу (14), а затем интегрировать η как малый параметр. В итоге получим реккурентную последовательность линейных краевых задач. Используя леммы 2-3 и условия разрешимости соответствующих краевых задач получаем, что

$$\beta = 2c(c^2+1), \quad \gamma = -\frac{64c^4 - 7c^2 + 1}{3} < 0, \quad \alpha = c > 0.$$

Рассмотрим теперь укороченную нормальную форму, т.е. систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \beta\eta^2, \\ \dot{\eta} &= \varepsilon\alpha\eta + \gamma\eta^3, \end{aligned} \tag{18}$$

полученную из системы (17) отбрасыванием слагаемых, имеющих более высокий порядок малости. Второе уравнение имеет ненулевые состояния равновесия

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{\alpha\varepsilon}{-\gamma}}.$$

Оба эти постоянных равновесия асимптотически устойчивы по Ляпунову.

Аналогично, как и в работах [2-3] устанавливается справедливость следующего утверждения

Теорема 1 *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (11),(12) имеет орбитально асмптотично устойчивый цикл. Для этого цикла справедлива асимтотическая формула*

$$\begin{gathered} u_0(t,y,\varepsilon) = \sqrt{\tfrac{\varepsilon\alpha}{-\gamma}}(-c+i)\cos y + \\ + \left(\tfrac{\varepsilon\alpha}{-\gamma}\right)\left[-\tfrac{7c^2+1}{4}(1+ic) + \left(\tfrac{5c^2-1}{12} - \tfrac{1}{24c}(13c^2+1)i\right)\cos 2y\right] \times \ , \\ \times \exp\left(-ict - i\tfrac{\varepsilon\alpha}{\gamma}\beta t\right) + o(\varepsilon), \end{gathered} \tag{19}$$

где $\beta = 2c(c^2+1)$, $\gamma = -\frac{64c^4-7c^2+1}{3}$, $\alpha = c$.

4. Основной результат

Очевидно, что функция определенная равенством (19), может быть продолжена на отрезок $[-\pi, 0]$ по четности с сохранениям гладкости, а затем уже на всю числовую ось как 2π–периодическая функция. Тогда решение (19) удовлетворяет и краевой задаче (1),(2) при $b = 4c - \varepsilon$, если y заменить на x. Использование принципа самоподобия показывает, что при данном выборе в краевой задаче (1),(2) удовлетворяют и функции

$$\begin{gathered} u_n(t,x,\varepsilon) = \sqrt{\tfrac{\varepsilon\alpha}{-\gamma}}(-c+i)\cos(x+2bnt) + \\ + \left(\tfrac{\varepsilon\alpha}{-\gamma}\right)\left[-\tfrac{7c^2+1}{4}(1+ic) + \left(\tfrac{5c^2-1}{12} - \tfrac{1}{24c}(13c^2+1)i\right)\cos 2(x+2bnt)\right] \times \\ \times \exp\left(inx - ict + ibn^2t - \tfrac{\varepsilon\alpha}{\gamma}\beta t\right) + o(\varepsilon), \end{gathered} \tag{20}$$

где $n \in Z$. Наличие формул (20) как и в работах [2-3] позволяют утверждать, что справедлива теорема.

Теорема 2 *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (1),(2) имеет счетное семейство инвариантных торов. Эти торы асимптотически устойчивы. При $n \in Z \backslash \{0\}$ решения на них задаются асимптотической формулой (20). При $n = 0$ формула (20) задает орбитально асимптотично устойчивый цикл.*

Литература

[1] Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера // Доклады РАН. 2006. В73. №1. – С. 125-129.

[2] Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний в двух сингулярно возмущенных периодических задачах гиперболического типа // Математика в Ярославском университете. Сборник обзорных статей. Ярославль: 2001. – С. 183-194.

[3] Куликов Д.А. Бифуркация плоских волн обобщенного кубического уравнения Шредингера в цилиндрической области // Моделирование и анализ информ. систем. Ярославль: 2006. Т.13. №4. – С. 20-26

Котов П.А.

О неустановившемся течении несжимаемой жидкости в пространстве образованном концентрическими сферами при неподвижном основании

Рассматривается задача о неустановившемся течении несжимаемой маловязкой немагнитной жидкости в замкнутом пространстве образованном теплопроводящими недеформируемыми изотермическими сферами с радиусами r_0 и r_1, причем $r_0 < r_1$; $r_1 = r_0 + \delta$. Образованный шаровой слой полностью заполнен жидкостью в зазоре для фиксированных внешней и внутренней нейтрально плавающей сферы. Разработаны конструктивные основы неустановившегося течения ограниченной несжимаемой жидкости изначально покоящейся системы и определены возмущающие моменты для непроницаемых сплошных границ.

п.1. Вещественная система координатных уравнений

Исходные непрерывные скалярные уравнения предлагаются таким вариантом вещественной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon+\frac{\partial u}{\partial z}w=\rho^{-1}X-\rho^{-1}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u;$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}u+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\upsilon+\frac{\partial \upsilon}{\partial z}w=\rho^{-1}Y-\rho^{-1}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta \upsilon;$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}\upsilon+\frac{\partial w}{\partial z}w=\rho^{-1}Z-\rho^{-1}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta w;$$

$$d\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}x\Big/dt+d\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}y\Big/dt=\frac{d\mathrm{ctg}t}{\partial t}\sin t\sin t\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

и фиксированными нулевыми краевыми условиями.

Лемма. Для расчета гидромеханической силы трения в пограничном слое детерминированной системы полагать рассматриваемый вариант дифференциальной системы уравнений неустановившегося течения несжимаемой жидкости устойчивым.

Определение 1.1. Вещественный характеристический многочлен возможного покоя рассматриваемой модели ограниченной диэлектрической жидкости при выполнении выражения $K = gradp$ разработан так:

$$\nu\Delta\nu\Delta\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt+d\frac{\partial\rho}{\partial p}Yy\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Z}+\nu\Delta\nu\Delta\nu\Delta+$$

$$(-1)\nu\Delta\nu\Delta\zeta+\nu\Delta\zeta^2-\nu\Delta\zeta\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt+d\frac{\partial\rho}{\partial p}Yy\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Z}-\nu\Delta\zeta\nu\Delta+\zeta\nu\Delta\zeta+$$

$$(-1)\zeta\nu\Delta\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt+d\frac{\partial\rho}{\partial p}Yy\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Z}-\zeta\nu\Delta\nu\Delta+$$

$$+\zeta^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt+d\frac{\partial\rho}{\partial p}Yy\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Z}+\zeta^2\nu\Delta-\zeta^3.$$

Утверждение 1.1. При соблюдении предлагаемого вещественного неравенства вырабатываются условия устойчивости равновесия:

$$-9\nu\Delta\nu\Delta\nu\Delta-6\nu\Delta\nu\Delta\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt+d\frac{\partial\rho}{\partial p}Yy\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Z}+(-1).$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt+d\frac{\partial\rho}{\partial p}Yy\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Z}3\nu\Delta\nu\Delta+\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt+d\frac{\partial\rho}{\partial p}Yy\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Z}\cdot(-1).$$

$$2\nu\Delta\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt+d\frac{\partial\rho}{\partial p}Yy\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Z}+$$

$$+\nu\Delta\nu\Delta\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt+d\frac{\partial\rho}{\partial p}Yy\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Z}+\nu\Delta\nu\Delta\nu\Delta>0.$$

При соблюдении теоретических положений вещественное уравнение второго порядка с распределенными параметрами рассматриваемого варианта неустановившегося течения ограниченной несжимаемой жидкости представляется так:

$$\rho^{\partial V}\!\Big/_{\partial t}=\mu^{\partial^2 V}\!\Big/_{\partial\xi^2}.$$

Утверждение 1.2. Предполагаемое решение рассматриваемого вещественного уравнения второго порядка с распределенными параметрами которым представляется детерминированная модель неустановившегося течения ограниченной несжимаемой жидкости предлагается таким:

$$B\exp-\nu t\cos\xi+Q\exp-\nu t\sin\xi.$$

Примечание 1.1. С учетом оговариваемых краевых условий возможный вариант искомого решения предлагается разработанным так:

$$-\mathrm{tg}\delta\cos\xi+\sin\xi.$$

Определив силу трения для удельной поверхности сплошной внутренней сферы [Котов П.А. Научно-теоретические и экспериментальные аспекты повышения точности инерциальных платформ. Рукописн. экз. диссертации - 2000, представляемый расширенным научным семинаром от 18.05.2001 г. к защите на соискание ученой степени доктора физико-математических наук] возмущающий гидромеханический момент, прикладываемый к изотермической внутренней сфере со стороны поддерживающего слоя несжимаемой маловязкой жидкости, будет таким $8\pi\mu 3^{-1}r_0^3$.

Вариант возмущающего гидромеханического момента прикладываемого к недеформируемой внешней сфере со стороны поддерживающего слоя диэлектрической несжимаемой жидкости предлагается разработанным так: $8\pi\mu 3^{-1}\cos^{-1}\delta r_1^3$.

п.2. Плоский вариант ограниченной несжимаемой жидкости

Предлагаемый плоский вариант неустановившегося течения несжимаемой маловязкой жидкости полностью заполняющей пространство, образованное фиксированными изотермическими круговыми граничными обкладками представляется системой таких координатных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}\upsilon=\rho^{-1}X-\rho^{-1}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}u+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\upsilon=\rho^{-1}Y-\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2};$$

$$d\frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}x\Big/dt=\frac{\mathrm{dctgt}}{\partial t}\sin t\sin t\frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Определение 2.1. Вещественный характеристический многочлен возможного покоя дифференциальной системы записанных координатных уравнений, которыми представляется детерминированная модель диэлектрического пограничного слоя несжимаемой жидкости полностью заполняющей пространство, образованное фиксированными граничными недеформируемыми круговыми концентрическими обкладками, предлагается сформированным так:

$$\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Y}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}b-$$

$$-b\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Y}-b\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b^2.$$

Вещественное характеристическое полное уравнение диагностирования возможного равновесия искомой дифференциальной системы координатных уравнений детерминированной модели пограничного слоя маловязкой несжимаемой жидкости представляется таким:

$$b^2 - b\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Y} - 2b\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial y}\times$$

$$\times\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Y} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0.$$

Утверждение 2.1. При соблюдении разработанного детерминированного неравенства вырабатываются возможные условия устойчивости равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Y}\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Y}+$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Y}\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial y}\times$$

$$\times\frac{d\frac{\partial\rho}{\partial p}Xx\Big/dt}{\frac{\partial\rho}{\partial p}Y} + 2\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} < 0.$$

Кочубей Т.В.

Задача расчета магнитного поля в присутствии идеально-проводящих многосвязных поверхностей на основе интегро-дифференциального уравнения первого рода

Постановка многих инженерных задач включает в себя необходимость математического моделирования и расчета стационарных и квазистационарных магнитных полей в присутствии проводящих слоев (оболочек, пластин). Такие слои играют роль, например, защитных экранов, корпусов и силовых элементов электротехнических и электроизмерительных устройств. С развитием пленочных и печатных технологий интерес к подобным задачам усилился.

В частных случаях задачи расчета стационарного магнитного поля в присутствии проводящей поверхности допускают аналитическое решение, а при отсутствии края и сложных геометрических формах наибольшее распространение получили методы теории потенциала, приводящие к интегральным уравнениям второго рода для плотностей вторичных источников [1, 2] как наиболее экономные в компьютерной реализации.

Значительно сложнее оказываются задачи моделирования магнитного поля в присутствии многосвязной поверхности с краем. Основной трудностью является то, что известные интегральные уравнения второго рода либо теряют смысл на разомкнутых поверхностях, либо обладают весьма сложными и неудобными ядрами, что делает проблематичным их практическое применение. Использование МКЭ для таких задач приводит к системам линейных алгебраических уравнений колоссальной размерности, которые являются при этом плохо обусловленными.

В данной работе задача моделирования магнитного поля в присутствии многосвязных поверхностей с идеальной проводимостью сводится к интегро-дифференциальному уравнению первого рода, исследование которого проводится вариационным методом [3] в подходящем функциональном пространстве, обосновывается эффективный метод сведения его к СЛАУ.

Рассмотрим задачу моделирования стационарного магнитного поля в присутствии идеально-проводящих кусочно-гладких липшицевых поверхностей Γ'_l, $l = 1, 2, \ldots, \nu$ (см. рис. 1), каждая из которых представляет собой топологического рода нуль. Здесь Γ''_l – дополнение Γ'_l до замкнутой $\Gamma_l = \Gamma'_l \cup \Gamma''_l \cup \cup\partial\Gamma''_l$; $\partial\Gamma''_l$ – смежная граница (край) для Γ'_l и Γ''_l; Γ' – объединение Γ'_l; а Γ'' и $\partial\Gamma''$ – объединения Γ''_l и $\partial\Gamma''_l$, соответсвенно, $l = 1, 2, \ldots, \nu$. Для простоты окружающую среду примем однородной с конечной положительной магнитной проницаемостью.

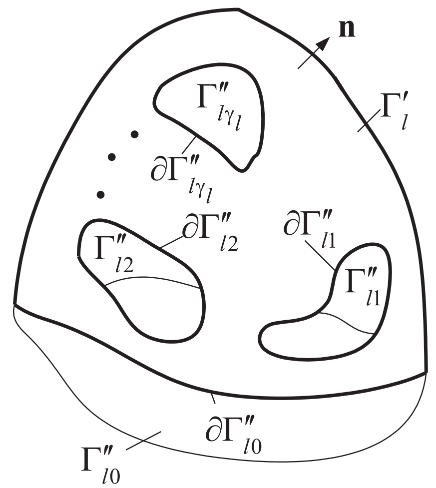


Рис. 1: Идеально-проводящая многосвязная поверхность Γ'_l

Задача расчета магнитного поля в терминах потенциала выглядит как

$$\begin{gathered}
\Delta\varphi^* = 0 \text{ вне } \Gamma' \cup \Gamma'', \quad \varphi^*_+ - \varphi^*_- = \tau \text{ на } \Gamma' \cup \Gamma'', \\
\frac{\partial\varphi^*}{\partial n_+} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial n_-} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial n} \text{ на } \Gamma' \cup \Gamma'', \quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial n} = B_n^0 \text{ на } \Gamma', \\
\int_{\Gamma''_{lk}} \frac{\partial\varphi^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma''_{lk}} B_n^0 d\Gamma - \Phi_{lk}, \ k = \overline{1, \gamma_l}, \ l = \overline{1, \nu}, \\
\varphi^*(M) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0(1/r^2),
\end{gathered}$$

где $\mathbf{B}^0$ – индукция первичного магнитного поля, φ^* – скалярный потенциал поля реакции, знаками „+“ и „−“ в нижних индексах помечены предельные значения величин со стороны положительного и отрицательного направлений нормали $\mathbf{n}$ соответственно, τ – скачок предельных значений потенциала, γ_l – число внутренних отверстий (краев) у Γ'_l, а значения Φ_{lk} заданы.

Представлением φ^* в виде потенциала двойного слоя краевая задача преобразуется к интегро-дифференциальному уравнению первого рода относительно плотности τ

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_M}\int_\Gamma \tau(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\frac{1}{r_{QM}}d\Gamma_Q = 2B_n^0(M), \quad M \to \Gamma'$$

нагруженному соотношениями

$$\begin{gathered}
\int_{\Gamma''_{lk}} \frac{\partial}{\partial n_M}\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \tau(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\frac{1}{r_{QM}}d\Gamma_Q\bigg|_{M\to\Gamma''_{lk}} d\Gamma_M = 2\int_{\Gamma''_{lk}} B_n^0 d\Gamma - 2\Phi_{lk}, \ k = \overline{1, \gamma_l}, \\
\tau(M) = c_{lk}, \ M \in \Gamma''_{lk} \cup \partial\Gamma''_{lk}, \ c_{lk} = const, \ k = \overline{0, \gamma_l}, \ l = \overline{1, \nu},
\end{gathered}$$

где $\delta\Gamma''_{lk}$ – смежный край для Γ'_l и Γ''_{lk}, $\delta\Gamma''_{l0}$ – внешний край для Γ'_l.

Исследование уравнения проводится вариационным методом, то есть уравнение сводится к вариационной задаче для некоторого функционала.

При этом в качестве исходного пространства рассматривается $\widetilde{L}_2^0(\Gamma)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом и имеющих нулевое среднее значение на Γ и постоянные значения на Γ''_{lk}, $k = \overline{0, \gamma_l}$, $l = \overline{1, \nu}$. Скалярное произведение и норма в нем определены согласно формулам

$$\langle a_1, a_2 \rangle_{\widetilde{L}_2} = \int_\Gamma a_1 a_2 d\Gamma, \qquad \|a\|_{\widetilde{L}_2} = \langle a, a \rangle_{\widetilde{L}_2}^{1/2}.$$

Нами показано, что в пространстве $\widetilde{L}_2^0(\Gamma)$ оператор уравнения является линейным, самосопряженным и положительным, поэтому согласно основному вариационному принципу задача минимизации функционала эквивалентна решению нашего уравнения в энергетическом пространстве $H_\tau^0(\Gamma)$ оператора. $H_\tau^0(\Gamma)$ – введенное в [4] гильбертово пространство плотностей потенциалов двойного слоя, имеющих постоянные значения на Γ''_{lk}, $k = \overline{0, \gamma_l}$, $l = \overline{1, \nu}$ и нулевые средние значения на Γ.

Воспользовавшись теоремой Рисса [3], заключаем, что вариационная задача, а с ней и наше уравнение разрешимы в $H_\tau^0(\Gamma)$ единственным образом, причем

$$\|G\|_{H_\tau^0(\Gamma)} = \|\tau\|_{H_\tau^0(\Gamma)} \leqslant \left(\int_\Omega \left| \widetilde{\mathbf{B}}^0 \right|^2 d\Omega \right)^{1/2},$$

следовательно, погрешность в энергии поля магнитной реакции проводящих поверхностей не превысит суммарной погрешности в энергии исходных полей, возникающей при их неточном задании или аппроксимации, и в этом смысле решение уравнения устойчиво.

Для численного решения вариационной задачи, а значит, и операторного уравнения, используется минимизирующая последовательность Ритца $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}$, где $\tau^{(n)}(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \tau_k(M)$ — приближенное решение, получаемое при использовании базиса $\{\tau_k\}_{k=1}^n$. Коэффициенты $\left\{ c_k^{(n)} \right\}_{k=1}^n$ определяются из СЛАУ вида

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{(n)} \\ c_2^{(n)} \\ \ldots \\ c_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

с вещественной симметричной матрицей, элементы которой определяются согласно следующим формулам

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \frac{\nabla \tau_j(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q \nabla \tau_i(M) d\Gamma_M, \ \ i, j = \overline{1, n},$$

$$\beta_i = -\int_{\Gamma_i} \left(\mathbf{A}^\Phi - \mathbf{A}^\mathbf{0} \right) \sigma_i d\Gamma, \ \ i = \overline{1, n},$$

где $\sigma_i = [\mathbf{n}\nabla\tau_\mathbf{i}]$; $\mathbf{A}^0$—векторный потенциал поля $\mathbf{B}^0$ ($\mathbf{B}^0 = \mathrm{rot}\mathbf{A}^0$);

$$\mathbf{A}^\Phi(M) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{\gamma_l}\Phi_{lk}\mathrm{rot}\oint_{L_{lk}}\frac{\mathbf{dl}_Q}{r_{QM}},\ M \in \Gamma.$$

здесь $L_{l1}, L_{l2}, \ldots, L_{l\gamma_l}$ – система замкнутых контуров, проходящих через Γ''_{l0} и соответствующие внутренние отверстия в поверхности Γ_l; Φ_{lk} – заданный магнитный поток через $k-$отверстие $l-$пверхности.

Базисные функции τ_i, $i = \overline{1,n}$ можно брать из класса непрерывных и кусочно-непрерывно дифференциируемых на Γ функций, примером которых могут служить кусочно-полиномиальные функции, представленные на рис. 2. При таком выборе элементы основной матрицы СЛАУ (1) вычисляют-

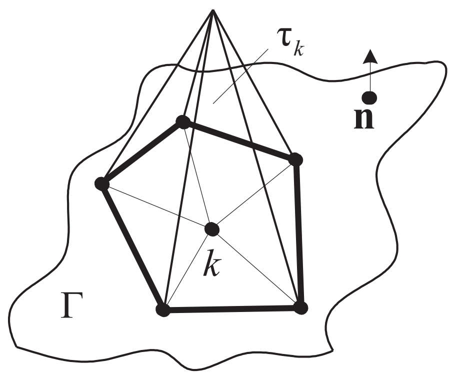


Рис. 2: Вид базисной функции τ_k

ся аналитически. Кроме того, согласно [5] матрица является положительно-определенной. В этом случае одним из наиболее эффективных методов решения СЛАУ (1) будет метод Гаусса-Зейделя [6].

Для решения задачи создан оригинальный программный пакет, разработанный на языке программирования высокого уровня Micrisoft Visual C# 2005. Данный пакет позволяет задавать первичное поле как своими источниками, так и напрямую в виде формулы. Результаты расчетов, выполненные с его помощью, представлены на рис. 3.

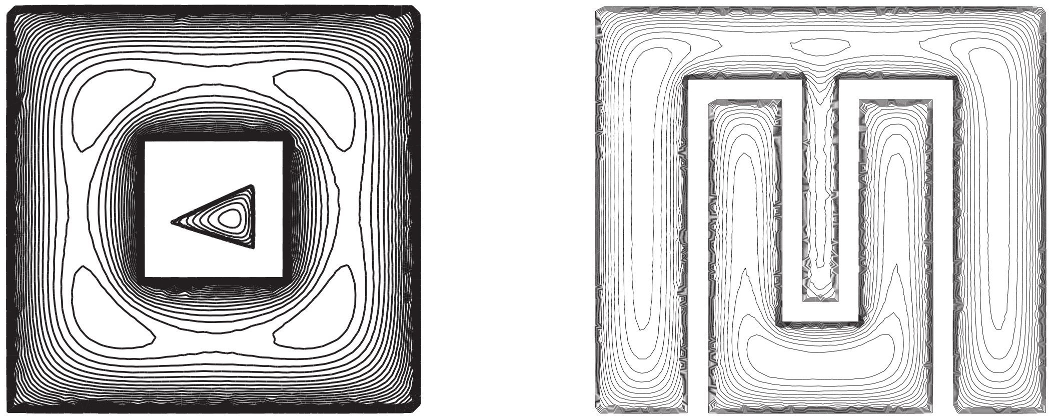


Рис. 3: Примеры расчетов полей в разработанном программном пакете

Литература

[1] Тозони О.В. Метод вторичных источников в электростатике М.: Энергия, 1975. – 296 с.

[2] Демирчян К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей М.: Высшая школа, 1986. – 240 с.

[3] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.

[4] Астахов В. И. Поверхностные потенциалы и операторы теории потенциала в пространствах Дирихле // Изв. вузов. Электромеханика. 2000. № 2. С. 3–18.

[5] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач М.: Мир, 1980. – 511 с.

[6] Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.

Крейн М.Н.

Алгебраические и топологические свойства некоторых классов отображений первой степени

Отображения первой степени в некоммутативной алгебре $\mathcal{A}$ - это отображения вида $f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ixb_i$, где $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ - фиксированные элементы алгебры $\mathcal{A}$. Множество таких отображений само образует алгебру $d_1(\mathcal{A})$ с поточечным сложением и композицией отображений в качестве умножения, нормированную, если нормирована $\mathcal{A}$ $(\|f\|=\sup_{\|x\|=1}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|})$. Через $\widetilde{\mathcal{A}}$ обозначена алгебра, полученная из $\mathcal{A}$ изменением порядка сомножителей на противоположный. Существует эпиморфизм алгебр $h:\mathcal{A}\otimes\widetilde{\mathcal{A}}\to d_1(\mathcal{A})$, сопоставляющий элементу $\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i$ из $\mathcal{A}\otimes\widetilde{\mathcal{A}}$ отображение $f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ixb_i$. В [2] указаны достаточные условия, при которых h является изоморфизмом. Эти условия состоят в том, что $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре линейных операторов некоторого линейного пространства E (или ее подалгебре), такой, что для любой конечной линейно независимой системы $e_1,\ e_2,\ldots,e_n\in E$ и любой системы из такого же количества элементов $g_1,\ g_2,\ldots,g_n\in E$ найдется оператор в $\mathcal{A}$, переводящий первую систему во вторую. В первых двух теоремах данной работы исследован эпиморфизм h для некоторых алгебр, не удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Теорема 1. Для алгебры кватернионов эпиморфизм h является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть H означает алгебру кватернионов. Прежде всего нужно уточнить, над каким полем нужно взять тензорное произведение $H\otimes\widetilde{H}$, из которого должен действовать эпиморфизм h. Кватернионы образуют линейное пространство как над полем действительных чисел, так и над полем комплексных, но комплексные числа в общем случае не перестановочны с кватернионами. В тензорном произведении $H\underset{C}{\otimes}\widetilde{H}$ над полем C комплексных чисел элементы $a\lambda\otimes b$ и $a\otimes\lambda b$, где $a,\ b\in H,\ \ \lambda\in C$, совпадают. Но при действии h первый из них должен был бы переходить в отображение $f_1(x)=a\lambda xb$, второй - в отображение $f_2(x)=ax\lambda b$, которые не одинаковы, в силу того, что не для всех $x\in H,\ \ \lambda\in C$ верно $\lambda x=x\lambda$, так что эпиморфизм h не определен. Условие $\lambda x=x\lambda$ для всех $x\in H$ и всех λ выполнено, когда λ берется из поля действительных чисел, поэтому h следует рассматривать действующим из тензорного произведения $H\underset{R}{\otimes}\widetilde{H}$ над полем R действительных чисел.

Покажем теперь, что $h(\alpha)=0$ только тогда, когда $\alpha=0\in H\underset{R}{\otimes}\widetilde{H}$. Поскольку алгебра кватернионов над полем действительных чисел четырехмерна, то любой элемент из $H\underset{R}{\otimes}\widetilde{H}$ можно представить в виде суммы не более, чем четырех слагаемых. Если α представлено одним слагаемым, $\alpha = a \otimes b$, $a \in H$, $b \in \widetilde{H}$ (можно также считать, что $b \in H$, т.к. H и $\widetilde{H}$ как множества совпадают, отличаются лишь порядком сомножителей при умножении), то $h(\alpha)$ - это отображение $f(x) = axb$. Поскольку в H нет делителей нуля, такое отображение может быть тождественно нулевым на H лишь в случае, когда хотя бы один из элементов a, b нулевой, значит, $\alpha = a \otimes b = 0$.

Если α представлено двумя слагаемыми (для дальнейших рассуждений удобно второе взять с минусом), $\alpha = a \otimes b - c \otimes d$, то $h(\alpha)$ - это отображение $f(x) = axb - cxd$. Очевидно, ни один из элементов a, b, c, d не равен нулю, иначе этот случай сводился бы к предыдущему. Если f тождественно нулевое на H, то, в частности, $f(1) = ab - cd = 0$, и, поскольку в H каждый ненулевой элемент обратим, любой из четырех элементов можно выразить через три других, например, $d = c^{-1}ab$. Подставляя это выражение для d в тождество $axb - cxd = 0$, получаем $axb - cxc^{-1}ab = 0 \iff (ax - cxc^{-1}a)b = 0 \iff ax - cxc^{-1}a = 0 \iff c^{-1}ax = xc^{-1}a$, т.е., кватернион $c^{-1}a$ перестановочен с любым кватернионом x, что возможно лишь тогда, когда $c^{-1}a$ является действительным числом (причем, очевидно, $c^{-1}a \neq 0$). Пусть $\lambda = c^{-1}a$, тогда $a = c\lambda = \lambda c \iff c = a\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}a$, и $d = c^{-1}c\lambda b = \lambda b$. Значит, $c \otimes d = a\frac{1}{\lambda} \otimes \lambda b = a \otimes \frac{1}{\lambda}\lambda b = a \otimes b$, и $\alpha = a \otimes b - c \otimes d = a \otimes b - a \otimes b = 0$.

Когда α представлено более, чем двумя слагаемыми, выражать одни элементы через другие становится сложнее. Можно воспользоваться записью α в виде произвольной линейной комбинации базисных элементов и показать, что все коэффициенты в ней должны оказаться нулевыми (метод, который годится и для предыдущих двух случаев). Так как в H базисом над полем действительных чисел могут служить элементы 1, i, j, k, то в $H \underset{R}{\otimes} \widetilde{H}$ можно взять базис

$$\begin{array}{llll} 1 \otimes 1, & 1 \otimes i, & 1 \otimes j, & 1 \otimes k, \\ i \otimes 1, & i \otimes i, & i \otimes j, & i \otimes k, \\ j \otimes 1, & j \otimes i, & j \otimes j, & j \otimes k, \\ k \otimes 1, & k \otimes i, & k \otimes j, & k \otimes k \end{array}$$

$\alpha = \alpha_{11}(1 \otimes 1) + \alpha_{1i}(1 \otimes i) + \alpha_{1j}(1 \otimes j) + \alpha_{1k}(1 \otimes k) + \alpha_{i1}(i \otimes 1) + \alpha_{ii}(i \otimes i) +$
$+ \alpha_{ij}(i \otimes j) + \alpha_{ik}(i \otimes k) + \alpha_{j1}(j \otimes 1) + \alpha_{ji}(j \otimes i) + \alpha_{jj}(j \otimes j) + \alpha_{jk}(j \otimes k) +$
$+ \alpha_{k1}(k \otimes 1) + \alpha_{ki}(k \otimes i) + \alpha_{kj}(k \otimes j) + \alpha_{kk}(k \otimes k)$ и, соответственно, $h(\alpha)$ - это отображение $f(x) = \alpha_{11}x + \alpha_{1i}xi + \alpha_{1j}xj + \alpha_{1k}xk + \alpha_{i1}ix + \alpha_{ii}ixi + \alpha_{ij}ixj +$
$+ \alpha_{ik}ixk + \alpha_{j1}jx + \alpha_{ji}jxi + \alpha_{jj}jxj + \alpha_{jk}jxk + \alpha_{k1}kx + \alpha_{ki}kxi + \alpha_{kj}kxj + \alpha_{kk}kxk$

Очевидно, f тождественно нулевое на H тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(i) = 0 \\ f(j) = 0 \\ f(k) = 0 \end{cases}$$

Используя соотношения $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$, получаем

$f(1) = \alpha_{11} + \alpha_{1i}i + \alpha_{1j}j + \alpha_{1k}k + \alpha_{i1}i - \alpha_{ii} + \alpha_{ij}k - \alpha_{ik}j + \alpha_{j1}j - \alpha_{ji}k - \alpha_{jj} + \alpha_{jk}i + \alpha_{k1}k + \alpha_{ki}j - \alpha_{kj}i - \alpha_{kk} = (\alpha_{11} - \alpha_{ii} - \alpha_{jj} - \alpha_{kk}) + (\alpha_{1i} + \alpha_{i1} + \alpha_{jk} - \alpha_{kj})i + (\alpha_{1j} - \alpha_{ik} + \alpha_{j1} + \alpha_{ki})j + (\alpha_{1k} + \alpha_{ij} - \alpha_{ji} + \alpha_{k1})k$

$f(i) = \alpha_{11}i - \alpha_{1i} + \alpha_{1j}k - \alpha_{1k}j - \alpha_{i1} - \alpha_{ii}i - \alpha_{ij}j - \alpha_{ik}k - \alpha_{j1}k - \alpha_{ji}j + \alpha_{jj}i + \alpha_{jk} + \alpha_{k1}j - \alpha_{ki}k - \alpha_{kj} + \alpha_{kk}i = (-\alpha_{1i} - \alpha_{i1} + \alpha_{jk} - \alpha_{kj}) + (\alpha_{11} - \alpha_{ii} + \alpha_{jj} + \alpha_{kk})i + (-\alpha_{1k} - \alpha_{ij} - \alpha_{ji} + \alpha_{k1})j + (\alpha_{1j} - \alpha_{ik} - \alpha_{j1} - \alpha_{ki})k$

$f(j) = \alpha_{11}j - \alpha_{1i}k - \alpha_{1j} + \alpha_{1k}i + \alpha_{i1}k + \alpha_{ii}j - \alpha_{ij}i - \alpha_{ik} - \alpha_{j1} - \alpha_{ji}i - \alpha_{jj}j - \alpha_{jk}k - \alpha_{k1}i + \alpha_{ki} - \alpha_{kj}k + \alpha_{kk}j = (-\alpha_{1j} - \alpha_{ik} - \alpha_{j1} + \alpha_{ki}) + (\alpha_{1k} - \alpha_{ij} - \alpha_{ji} - \alpha_{k1})i + (\alpha_{11} + \alpha_{ii} - \alpha_{jj} + \alpha_{kk})j + (-\alpha_{1i} + \alpha_{i1} - \alpha_{jk} - \alpha_{kj})k$

$f(k) = \alpha_{11}k + \alpha_{1i}j - \alpha_{1j}i - \alpha_{1k} - \alpha_{i1}j + \alpha_{ii}k + \alpha_{ij} - \alpha_{ik}i + \alpha_{j1}i - \alpha_{ji} + \alpha_{jj}k - \alpha_{jk}j - \alpha_{k1} - \alpha_{ki}i - \alpha_{kj}j - \alpha_{kk}k = (-\alpha_{1k} + \alpha_{ij} - \alpha_{ji} - \alpha_{k1}) + (-\alpha_{1j} - \alpha_{ik} + \alpha_{j1} - \alpha_{ki})i + (\alpha_{1i} - \alpha_{i1} - \alpha_{jk} - \alpha_{kj})j + (\alpha_{11} + \alpha_{ii} + \alpha_{jj} - \alpha_{kk})k$

Поэтому

$$f(1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11} - \alpha_{ii} - \alpha_{jj} - \alpha_{kk} = 0 \\ \alpha_{1i} + \alpha_{i1} + \alpha_{jk} - \alpha_{kj} = 0 \\ \alpha_{1j} - \alpha_{ik} + \alpha_{j1} + \alpha_{ki} = 0 \\ \alpha_{1k} + \alpha_{ij} - \alpha_{ji} + \alpha_{k1} = 0 \end{cases}$$

$$f(i) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\alpha_{1i} - \alpha_{i1} + \alpha_{jk} - \alpha_{kj} = 0 \\ \alpha_{11} - \alpha_{ii} + \alpha_{jj} + \alpha_{kk} = 0 \\ -\alpha_{1k} - \alpha_{ij} - \alpha_{ji} + \alpha_{k1} = 0 \\ \alpha_{1j} - \alpha_{ik} - \alpha_{j1} - \alpha_{ki} = 0 \end{cases}$$

$$f(j) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\alpha_{1j} - \alpha_{ik} - \alpha_{j1} + \alpha_{ki} = 0 \\ \alpha_{1k} - \alpha_{ij} - \alpha_{ji} - \alpha_{k1} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{ii} - \alpha_{jj} + \alpha_{kk} = 0 \\ -\alpha_{1i} + \alpha_{i1} - \alpha_{jk} - \alpha_{kj} = 0 \end{cases}$$

$$f(k) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\alpha_{1k} + \alpha_{ij} - \alpha_{ji} - \alpha_{k1} = 0 \\ -\alpha_{1j} - \alpha_{ik} + \alpha_{j1} - \alpha_{ki} = 0 \\ \alpha_{1i} - \alpha_{i1} - \alpha_{jk} - \alpha_{kj} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{ii} + \alpha_{jj} - \alpha_{kk} = 0 \end{cases}$$

Эти системы объединяются в одну, которая, как нетрудно увидеть, распадается на 4 независимых друг от друга системы, каждая из четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} \alpha_{11} - \alpha_{ii} - \alpha_{jj} - \alpha_{kk} = 0 \\ \alpha_{11} - \alpha_{ii} + \alpha_{jj} + \alpha_{kk} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{ii} - \alpha_{jj} + \alpha_{kk} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{ii} + \alpha jj - \alpha_{kk} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{1i} + \alpha_{i1} + \alpha_{jk} - \alpha_{kj} = 0 \\ -\alpha_{1i} - \alpha_{i1} + \alpha_{jk} - \alpha_{kj} = 0 \\ -\alpha_{1i} + \alpha_{i1} - \alpha_{jk} - \alpha_{kj} = 0 \\ \alpha_{1i} - \alpha_{i1} - \alpha_{jk} - \alpha_{kj} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_{1j}-\alpha_{ik}+\alpha_{j1}+\alpha_{ki}=0\\ \alpha_{1j}-\alpha_{ik}-\alpha_{j1}-\alpha_{ki}=0\\ -\alpha_{1j}-\alpha_{ik}-\alpha_{j1}+\alpha_{ki}=0\\ -\alpha_{1j}-\alpha_{ik}+\alpha_{j1}-\alpha_{ki}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_{1k}+\alpha_{ij}-\alpha_{ji}+\alpha_{k1}=0\\ -\alpha_{1k}-\alpha_{ij}-\alpha_{ji}+\alpha_{k1}=0\\ \alpha_{1k}-\alpha_{ij}-\alpha_{ji}-\alpha_{k1}=0\\ -\alpha_{1k}+\alpha_{ij}-\alpha_{ji}-\alpha_{k1}=0\end{cases}$$

Каждая система состоит из независимых уравнений, поэтому имеет лишь нулевые решения. Таким образом, из предположения $h(\alpha)=0$ получено $\alpha=0$, т.е. эпиморфизм h является изоморфизмом. Теорема доказана.

Тем не менее, не для любой алгебры эпиморфизм h оказывается изоморфизмом. Примером алгебр, для которых $\ker h$ нетривиально, могут служить алгебры T_n треугольных матриц размера $n\times n$ (для определенности можно считать, что это верхние треугольные матрицы) с элементами из некоторого поля F. Тензорное произведение при этом берется над полем F.

Теорема 2. Если $\mathcal{A}=T_n$ - алгебра треугольных матриц размера $n\times n$, то эпиморфизм h имеет ядро размерности $\frac{1}{24}n(n^2-1)(5n+6)$. Размерность алгебры $d_1(\mathcal{A})$ при этом равна $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Доказательство. Возьмем в $\mathcal{A}$ (и в $\widetilde{\mathcal{A}}$) базис, состоящий из матриц E_{ij}, в которых на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а остальные элементы - нули ($i\leqslant j$). Количество элементов базиса - это количество мест, на которых могут стоять ненулевые элементы в треугольной матрице размера $n\times n$, которое равно $n+(n-1)+(n-2)+\dots+1=\frac{n(n+1)}{2}$. Этому базису в $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\mathcal{A}}$ соответствует базис в $\mathcal{A}\otimes\widetilde{\mathcal{A}}$ из элементов $E_{ij}\otimes E_{kl}$ $(i\leqslant j,\ k\leqslant l)$, количество которых $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Верхние треугольные матрицы можно рассматривать как записанные в некотором базисе $e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n\in F^n$ матрицы линейных операторов, для каждого из которых все подпространства $L_k=L(e_1,\ \dots,\ e_k)$ инвариантны. Это удобно использовать для того, чтобы установить, какие из базисных элементов $E_{ij}\otimes E_{kl}$ принадлежат $\ker h$.

$h(E_{ij}\otimes E_{kl})$ - это отображение в алгебре T_n, заданное формулой $f(X)=E_{ij}XE_{kl}$.

$E_{kl}(e_l)=e_k\in L_k$, поэтому для любого $X\in T_n$ $X(E_{kl}(e_l))=X(e_k)\in L_k$. При $s\neq l$ $E_{kl}(e_s)=0$ и для любого $X\in T_n$ $X(E_{kl}(e_s))=X(0)=0$.

$E_{ij}(e_j)=e_i$. При $m\neq j$, в том числе при $m<j$ $E_{ij}(e_m)=0$, следовательно, $E_{ij}(L_{j-1})=E_{ij}(L(e_1,\ \dots,\ e_{j-1}))=0$. Значит, если $k\leqslant j-1$, то есть $k<j$, то $L_k=L(e_1,\ \dots,\ e_k)\subset L(e_1,\ \dots,\ e_{j-1})=L_{j-1}$, поэтому тем более $E_{ij}(L_k)=0$, и при всех $X\in T_n$ $E_{ij}(X(E_{kl}(e_l)))=E_{ij}(X(e_k))=0$. Если же $s\neq l$, то также $E_{ij}(X(E_{kl}(e_s)))=E_{ij}(0)=0$. Таким образом, при $k<j$ $E_{ij}XE_{kl}$ - нулевой оператор, каково бы ни было $X\in T_n$. Это означает, что отображение $f(X)=E_{ij}XE_{kl}$ - тождественно нулевое, то есть $E_{ij}\otimes E_{kl}\in\ker h$.

Пусть теперь $k\geq j$, тогда $E_{jk}\in T_n$. Возьмем $X=E_{jk}$. Воспользовавшись очевидным равенством $E_{rs}E_{st}=E_{rt}$, получаем $f(X)=E_{ij}XE_{kl}=$

$E_{ij}E_{jk}E_{kl} = E_{il} \neq 0$, значит, f не является в этом случае тождественно нулевым отображением, то есть $E_{ij} \otimes E_{kl} \notin \ker h$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием того, что базисный элемент $E_{ij} \otimes E_{kl}$ алгебры $T_n \otimes \widetilde{T_n}$ принадлежит ядру h, является $k < j$. Проверим, не попадает ли в $\ker h$ какая-либо ненулевая линейная комбинация остальных базисных элементов.

Итак, пусть в некоторой их линейной комбинации ненулевой коэффициент стоит при $E_{ij} \otimes E_{kl}$ $(k \geq j)$. При действии h эта линейная комбинация перейдет в отображение $f(X)$, представляющее собой сумму, в которую слагаемое $E_{ij}XE_{kl}$ входит с тем же коэффициентом. Возьмем, как и в предыдущем рассуждении, $X = E_{jk}$. Тогда, как показано выше, $E_{ij}XE_{kl} = E_{il} \neq 0$. Все остальные слагаемые имеют вид $E_{rs}XE_{mt}$ с каким-либо коэффициентом, где упорядоченный набор индексов $(r,\ s,\ m,\ t)$ не совпадает с $(i,\ j,\ k,\ l)$. Если $s = j$, $m = k$, то $E_{rs}XE_{mt} = E_{rt}$, где $(r,\ t)$ не совпадает с $(i,\ j)$, поэтому единицы в матрицах E_{rt} и E_{ij} стоят на разных местах, и никакая линейная комбинация матриц вида E_{rt}, где $(r,\ t) \neq (i,\ j)$, не может быть равна матрице E_{ij}, умноженной на ненулевой коэффициент. Для рассмотрения остальных слагаемых используем очевидное равенство $E_{rs}E_{mt} = 0$ при $s \neq m$, из которого получаем, что в случае, когда $s \neq j$ или $m \neq k$ $E_{rs}E_{jk}E_{mt} = 0$. Поэтому для $X = E_{jk}$ $f(X) \neq 0$, значит, отображение f не является тождественно нулевым.

Таким образом, $\ker h$ - это линейная оболочка базисных элементов $E_{ij} \otimes E_{kl}$, удовлетворяющих условию $k < j$. Для вычисления его размерности остается подсчитать количество таких элементов.

Если фиксировать k, то, в силу того, что матрицы верхние треугольные, и, значит, $l \geq k$, l может принимать $n-(k-1)$ значений: $k,\ k+1,\ \ldots,\ n$. Индекс j может принимать $n-k$ значений: $k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n$, и при каждом значении j индекс i в силу неравенства $i \leqslant j$ может принимать j значений: $1,\ 2,\ \ldots,\ j$. Так, при $k = 1$ в правой матрице единица может стоять в любом месте первой строки, в левой - во всех столбцах, кроме первого. Эти места обозначены квадратиками в следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} 0 & \square & \square & \cdots & \square \\ 0 & \square & \square & \cdots & \square \\ 0 & 0 & \square & \cdots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \cdots & \square \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Число квадратиков в правой матрице равно n, в левой $2+3+\cdots+n$. Значит, количество вариантов при $k=1$ равно $n(2+3+\cdots+n)$.

Если взять $k = 2$, квадратики в правой матрице спустятся на одну строку вниз и размещаться в ней будут, начиная со второго элемента, т.е., их количество на один уменьшится, станет $n-1$. В левой матрице для размещения квадратиков при этом окажется запрещен, кроме первого, еще и второй столбец, и количество разрешенных мест станет $3+4+\dots+n$. Количество вариантов выбора одного квадратика из левой матрицы и одного из правой получается в этом случае $(n-1)(3+4+\dots+n)$. Суммируя количества вариантов для всех k от 1 до $n-1$ (при $k=n$ в левой матрице нельзя использовать ни один столбец), получаем $n(2+3+\dots+n)+(n-1)(3+4+\dots+n)+\dots+2\cdot n = n\frac{(n-1)(n+2)}{2}+(n-1)\frac{(n-2)(n+3)}{2}+\dots+(n-(n-2))\frac{(n-(n-1))(n+n)}{2}$. Преобразование этого выражения дает формулу $\frac{1}{24}n(n^2-1)(5n+6)$. Это размерность $\ker h$. Поскольку h - эпиморфизм, то $\dim d_1(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A}\otimes\widetilde{\mathcal{A}} - \dim\ker h = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{1}{24}n(n^2-1)(5n+6) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(5n+6) = \frac{1}{24}n(n+1)[6n(n+1)-(n-1)(5n+6)] = \frac{1}{24}n(n+1)(6n^2+6n-5n^2+5n-6n+6) = \frac{1}{24}n(n+1)(n^2+5n+6) = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$. Теорема доказана.

Следующая теорема связана с вопросом о соотношении между множеством отображений первой степени и множествами других отображений алгебры. Пусть A означает линейное пространство, получающееся из алгебры $\mathcal{A}$ игнорированием умножения элементов, $L(A)$ - множество линейных операторов, действующих в A, $B(A)$ - множество ограниченных линейных операторов, если $\mathcal{A}$ нормирована. Очевидно, $d_1(\mathcal{A})\subset L(A)$. Алгебры, для которых $d_1(\mathcal{A}) = L(A)$, названы 1-алгебрами. В [4] доказано, что алгебры линейных операторов конечномерных пространств являются 1-алгебрами. Для нормированных алгебр введено также понятие $\overline{1}$-алгебр, означающее, что $\overline{d_1(\mathcal{A})} = L(A)$, где $\overline{d_1(\mathcal{A})}$ - замыкание $d_1(\mathcal{A})$ по операторной норме. Очевидно, нормированная 1-алгебра является и $\overline{1}$-алгеброй.

Пусть $\widehat{d_1(\mathcal{A})}$ означает замыкание $d_1(\mathcal{A})$ в топологии поточечной сходимости.

Теорема 3. Для алгебры $\mathcal{A}=C(H)$ линейных компактных операторов сепарабельного гильбертова пространства H $\widehat{d_1(\mathcal{A})} = B(A)$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ - ортонормированный базис в H, E^n - линейная оболочка первых n базисных элементов, $P_n: H\to E^n$ - ортогональная проекция, $L_n = L(E^n)$ - алгебра линейных операторов конечномерного пространства E^n. Вложения $E^1\subset E_2\subset\dots\subset E_n\subset\dots\subset H$ индуцируют вложения $L_1\subset L_2\subset\dots\subset L_n\subset\dots\subset C(H)$ с сохранением нормы и операций (образ оператора $X\in L_n$ при вложениях равен P_nXP_n), при этом $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ всюду плотно в $C(H)$. Эти вложения, в свою очередь, индуцируют вложения $d_1(L_1)\subset d_1(L_2)\subset\dots\subset d_1(L_n)\subset\dots\subset d_1(C(H))$.

I. Докажем, что $B(C(H))\subset d_1\widehat{(C(H)})$. Пусть $F\in B(C(H))$. Построим последовательность отображений $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}\subset d_1(C(H))$, которая бы сходилась к F на каждом элементе из $C(H))$.

Пусть $\pi_n: C(H)\to L_n$ - проекция на L_n, определяемая равенством $\pi_n(X) = P_nXP_n$. Если оператор $X\in C(H))$ отождествить с его матрицей в указанном выше ортонормированном базисе, бесконечной вправо и вниз, то $\pi_n(X)$ - это вырезанный из этой матрицы верхний левый угол размера $n\times n$.

$\|\pi_n(X)\| \leqslant \|P_n\| \cdot \|X\| \cdot \|P_n\| = 1 \cdot \|X\| \cdot 1 = \|X\|$. Для $X \in L_n$ $\pi_n(X) = X$. Поэтому $\|\pi_n\| = \sup_{X\neq 0} \frac{\|\pi_n(X)\|}{\|X\|} = 1$.

Определим отображение $F_n : L_n \to L_n$ формулой $F_n = \pi_n \circ (F|_{L_n})$. Так как $\|F|_{L_n}\| \leqslant \|F\|$, то $\|F_n\| \leqslant \|\pi_n\| \cdot \|F|_{L_n}\| \leqslant 1 \cdot \|F\| = \|F\|$. Поскольку F_n - линейное отображение конечномерного пространства L_n, то, согласно [4], оно представляется некоторым отображением $D_n \in d_1(L_n)$. Образ этого отображения в $d_1(C(H))$, получающийся при вложении $d_1(L_n) \subset d_1(C(H))$, обозначим тем же символом D_n. Если $D_n(X) = \sum_{i=1}^k A_i X B_i$, то $\|D_n(X)\| \leqslant \sum_{i=1}^k \|A_i\| \cdot \|X\| \cdot \|B_i\|$, поэтому $\|D_n\| \leqslant \sum_{i=1}^n \|A_i\| \cdot \|B_i\|$, так что D_n - ограниченное отображение как на L_n, где оно совпадает с F_n, так и на $C(H)$. Элементы A_i, B_i вначале берутся из L_n, затем вкладываются в $C(H)$, но, как было отмечено, нормы при этом вложении не меняются. Кроме того, поскольку вложение в $C(H)$ осуществляется умножением элементов из L_n слева и справа на P_n, то для $X \in C(H)$ $D_n(X) = D_n(P_n X P_n)$. Но $P_n X P_n \in L_n$, поэтому $D_n(P_n X P_n) = F_n(P_n X P_n)$. Так как $\|P_n X P_n\| \leqslant \|X\|$, то $\frac{\|D_n(X)\|}{\|X\|} \leqslant \frac{\|D_n(X)\|}{\|P_n X P_n\|} = \frac{\|F_n(P_n X P_n)\|}{\|P_n X P_n\|}$. Значит, и при действии D_n на $C(H)$ $\|D_n\| = \sup_{X\neq 0,\ X\in C(H)} \frac{\|D_n(X)\|}{\|X\|} \leqslant \sup_{X\neq 0,\ X\in C(H)} \frac{\|F_n(P_n X P_n)\|}{\|P_n X P_n\|} \leqslant \sup_{X\neq 0,\ X\in L_n} \frac{\|F_n(X)\|}{\|X\|} = \|F_n\| \leqslant \|F\|$ (для всех n).

Пусть $X \in C(H)$. По $\varepsilon > 0$ найдется $X_k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ (то есть найдется номер k и $X_k \in L_k$), такое, что $\|X - X_k\| < \frac{\varepsilon}{4\|F\|}$. Для $F(X_k) \in C(H)$ также найдется номер m и $Y_m \in L_m$, такое, что $\|F(X_k) - Y_m\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Пусть $r = \max\{k,\ m\}$. Тогда для всех $n \geq r$ $X_k,\ Y_m \in L_n$ и
$\|F(X) - D_n(X)\| = \|(F(X) - F(X_k)) + (F(X_k) - Y_m) + (Y_m - D_n(X_k)) + (D_n(X_k) - D_n(X))\| \leqslant \|F(X - X_k)\| + \|F(X_k) - Y_m\| + \|\pi_n(Y_m) - \pi_n(F(X_k))\| + \|D_n(X_k - X)\| \leqslant \|F\| \cdot \|X - X_k\| + \|F(X_k) - Y_m\| + \|\pi_n\| \cdot \|Y_m - F(X_k)\| + \|D_n\| \cdot \|X_k - X\| \leqslant \|F\| \cdot \frac{\varepsilon}{4\|F\|} + \frac{\varepsilon}{4} + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \|F\| \cdot \frac{\varepsilon}{4\|F\|} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$, то есть $D_n(X)$ сходится к $F(X)$. Значит, $B(C(H)) \subset \widehat{d_1(C(H))}$.

II. Пусть последовательность отображений $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset d_1(C(H))$ сходится на каждом $X \in C(H)$ к $F(X)$. Тогда, в силу того, что D_n линейны и ограничены на $C(H)$, отображение F, согласно теореме 7.1.2 из [1], также линейно и ограничено на $C(H)$. Значит, $\widehat{d_1(C(H))} \subset B(C(H))$.

Таким образом, $\widehat{d_1(C(H))} = B(H)$. Теорема доказана.

Замечание. Как видно из доказательства, включение $\widehat{d_1(\mathcal{A})} \subset B(A)$ выполняется для любой банаховой алгебры; равенство получается тогда, когда имеет место обратное включение. Алгебру, для которой выполнено такое равенство, назовем $\widehat{1}$-алгеброй.

Далее рассматриваются отображения свободных конечно- или счетнопорожденных $\mathcal{A}$-модулей. Пусть $\mathcal{M}$ - такой модуль, через π_i обозначим проекцию $\mathcal{M}$ на i-ю "координату". Отображение модулей $F : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ названо отображением первой степени, если для всех i (для которых это имеет смысл) отображение $F_i = \pi_i \circ F$ равно сумме (или ряду) из отображений $F_{ij} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, каждое из которых зависит только от одной "координаты", являясь при этом отображением первой степени. Множество таких отображений обозначим $d_1(\mathcal{M}_1,\ \mathcal{M}_2)$. Если $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$, то $d_1(\mathcal{M},\ \mathcal{M}) = d_1(\mathcal{M})$ образует алгебру с операциями, аналогичными операциям в $d_1(\mathcal{A})$. Ее группу автоморфизмов обозначим $GL_1(\mathcal{M})$. Если указанные выше отображения F_{ij} принадлежат $\overline{d_1(\mathcal{A})}$ или $\widehat{d_1(\mathcal{A})}$, то соответствующую группу автоморфизмов модуля обозначим $GL_{\overline{1}}(\mathcal{M})$ или $GL_{\widehat{1}}(\mathcal{M})$. В [4] доказано, что для $\overline{1}$-алгебры $\mathcal{A}$ группа $GL_{\overline{1}}(l_2(\mathcal{A}))$ стягиваема. Здесь приведена

Теорема 4. Если $\mathcal{A}$ - $\widehat{1}$-алгебра, то группа $GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$ стягиваема.

Доказательство. Пусть $u \in GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$, тогда существует отображение $v = u^{-1}$, также являющееся изоморфизмом, поэтому оно линейно (т.е. сохраняет сложение и умножение на скаляр) и ограничено. Следовательно, линейно и ограничено каждое из отображений $\pi_i \circ v :\ l_2(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$. В силу линейности оно представляется в виде суммы отображений $\sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}(x_j)$, зависящих только от одной "координаты". В силу ограниченности $\pi_i \circ v$ ограничены и отображения $f_{ij} :\ \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Поскольку они линейны как отображения линейного пространства A, то $f_{ij} \in B(A)$, поэтому из условия теоремы получаем $f_{ij} \in \widehat{d_1(\mathcal{A})}$. Следовательно, $v = u^{-1}$ принадлежит $GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$ одновременно с u. Поэтому любая линейная комбинация тождественного отображения с u или u^{-1} с числовыми коэффициентами также является отображением, у которого все f_{ij} принадлежат $\widehat{d_1(\mathcal{A})}$, значит, если эта линейная комбинация оказывается изоморфизмом, то принадлежит группе $GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$.

Дальше можно использовать те же рассуждения, какими доказана гомотопическая тривиальность группы $GL(H)$ в [5] или группы $GL(l_2(\mathcal{A}))$ в [3].

$GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$ является открытым множеством банахова пространства $\widehat{d_1(l_2(\mathcal{A}))}$, поэтому по теореме Милнора [6] имеет гомотопический тип CW-комплекса, следовательно, по теореме Уайтхеда [7] гомотопическая тривиальность этой группы эквивалентна ее слабой гомотопической тривиальности, которая и будет доказана.

Вначале используем теорему Атья о маленьких шарах: если f - непрерывное отображение n-мерной сферы S^n в $GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$, то существует гомотопное ему отображение f', такое, что $f'(S^n)$ - конечный полиэдр, лежащий в $GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$ вместе с гомотопией. Затем используем лемму 3 из [5]: существует разложение $l_2(\mathcal{A})$ в $H' \oplus H_1$, где $H' \cong H_1 \cong l_2(\mathcal{A})$, и непрерывное отображение $f'' :\ S^n \to GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$, гомотопное f' и такое, что $f''(s)(x) = x$ для всех $s \in S^n$, $x \in H'$.

Дальше доказывается утверждение, подобное лемме 7 из [5] и лемме 7.1.4 из [3]: множество $V = \{g \in GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A})) \mid g|_{H'} = Id_{H'},\ g(H_1) = H_1\}$ стягиваемо к тождественному отображению в $GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$. Для этого H' представляется в виде $H' = H_2 \oplus H_3 \oplus \dots$, $H_i \cong l_2(\mathcal{A})$. Тогда $l_2(\mathcal{A}) = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots$. Пусть $g \in V$, тогда матрица отображения g относительно указанного выше разложения выглядит как $diag(u,\ 1,\ 1,\ 1,\ \dots)$, где $u = g|_{H_1}$, а единицами обозначены тождественные отображения на $H_2,\ H_3,\ \dots$.

Для $t \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$ положим $g_t|_{H_1} = g|_{H_1} = u$ а для всех натуральных i

$$g_t|_{H_{2i}\oplus H_{2i+1}} = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix} \begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix} \begin{pmatrix}u^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\cdot\cos^2 t + u^{-1}\sin^2 t & (u-1)\sin t\cos t\\ (1-u^{-1})\sin t\cos t & u\sin^2 t + 1\cdot\cos^2 t\end{pmatrix}.$$

Для $t \in [\frac{\pi}{2},\ \pi]$ и каждого натурального i положим

$$g_t|_{H_{2i-1}\oplus H_{2i}} = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix} \begin{pmatrix}u^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix} \begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\cdot\cos^2 t + u\sin^2 t & (u^{-1}-1)\sin t\cos t\\ (1-u)\sin t\cos t & u^{-1}\sin^2 t + 1\cdot\cos^2 t\end{pmatrix}$$

Здесь как раз возникают линейные комбинации с числовыми коэффициентами тождественного отображения и отображения u или u^{-1}, поэтому при всех $t \in [0,\ \pi]$ $g_t \in \widehat{d_1(l_2(\mathcal{A}))}$. При этом все g_t являются изоморфизмами, поскольку перемножаемые матрицы соответствуют изоморфизмам. Вычисления показывают, что $g_0 = g$, $g_\pi = diag(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \dots)$, а $g_{\frac{\pi}{2}} = diag(u,\ u^{-1},\ u,\ u^{-1},\ u,\ \dots)$ по обеим формулам, так что в точке $\frac{\pi}{2}$ гомотопии склеиваются. Таким образом, g прогомотопировано на H' к тождественному отображению.

Далее воспользуемся леммой, повторяющей лемму 7.1.5 из [3]: множество $W = \{g \in GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A})) \mid g|_{H'} = Id_{H'}\}$ стягиваемо к V в $GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$. (В [5] она доказана для $GL(l_2(\mathcal{A}))$.)

Поскольку $f''(S^n) \subset W$, то $f''(S^n)$ вместе с W гомотопируется в множество, лежащее в V, а затем вместе с V стягивается в точку (в тождественное отображение), что и доказывает слабую гомотопическую тривиальность группы $GL_{\widehat{1}}(l_2(\mathcal{A}))$.

Теорема доказана.

Из теорем 3 и 4 следует

Теорема 5. Группа $GL_{\widehat{1}}(l_2(C(H)))$ стягиваема.

Литература

[1] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1977. – 744 с.

[2] Крейн М.Н. О структуре алгебры отображений 1-й степени. Труды Воронежской зимней математической школы С.Г.Крейна - 2006. Воронеж. 2006. – С.114-116.

[3] Мануйлов В.М., Троицкий Е.В. С*-гильбертовы модули. М.: Факториал Пресс. 2001. – 224 с.

[4] Krein M.N. The mappings of degree 1. Abstract and Applied Analysis. Special Issue.
http://www.hindawi.com/GetArticle.aspx?doi=10.1155/AAA/2006/90837

[5] Kuiper N.H. The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. Topology. 1965. V.3. No.1. – P. 19-30. (Русский перевод в кн.: Атья М. Лекции по K-теории. М.: Мир. 1967. – 264 с.)

[6] Milnor J. On spaces having the homotopy type of a CW-complex. Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V.90. – P.272-280.

[7] Whitehead J. Combinatorial homotopy, I. Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V.55. – P.213-245.

Кулаев Р. Ч.

О конечном интегральном преобразовании для смешанной задачи на графе

Интегральные преобразования являются эффективным методом решения дифференциальных уравнений, причем их подбор зависит от вида исследуемого уравнения. В работе [1] нами было построено конечное интегральное преобразование для дифференциального уравнения заданного на геометрическом графе и установлена формула обращения. В настоящей работе мы применяем построенное в [1] интегральное преобразование к решению смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u + f(x,t) \equiv Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T] \quad (1)$$

со следующими краевыми и начальными условиями

$$u(b,t) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \quad u_i(a,t) = \alpha_i(a)u_{i_0}(a,t), \quad a \in V, \quad i,\, i_0 \in J(a),$$
$$\sum_{i \in I(a)} \beta_i(a)\frac{\partial u_i}{\partial x}(a,t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (3)$$

Уравнение (1) рассматривается по пространственной переменной $x \in \Gamma$ как уравнение на графе [2]. В (1) p, q, f — функции определенные на графе, причем $p \in C^1[\Gamma]$, $q, f \in C[\Gamma]$, $\inf\limits_{x\in\Gamma} p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. Считаем, что граф не содержит циклических маршрутов.

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность собственных значений дифференциального оператора L, действующего на множестве $D(L)$ функций класса $C^2[\Gamma]$ удовлетворяющих (2), (3). Числа $\{\lambda_k\}$ расположены в порядке возрастания, причем каждое значение входит в последовательность столько раз какова его алгебраическая кратность. Через $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{h_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим последовательности корневых функций оператора L и его сопряженного соответственно. Тогда из теоремы разложения [3] следует, что для всякой функции $u \in D(L)$ имеем

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k h_k(x), \quad \delta_k = \int\limits_{\Gamma} u(x)h_k^*(x)\,dx \quad (4)$$

В общем случае оператор L не является самосопряженным. Для его самосопряженности необходимо и достаточно, чтобы для любой вершины $a \in V$ существовала константа $C(a)$ такая, что $\beta_i(a) = \alpha_i(a)p_i(a)C(a)$, $i \in I(a)$

Последнее условие гарантирует выполнение равенства $(Lu, v) = (u, Lv)$ для всех $u, v \in D(L)$. Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[\Gamma]$ — пространстве суммируемых с квадратом на Γ функций. Не сложно показать, что существует линейный ограниченный, положительный, эрмитов оператор взаимнооднозначно отображающий пространство $D(L)$ на $D(L^*)$, а, значит [4], все корневые функции $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются собственными и образуют базис Рисса в $L_2[\Gamma]$. Это дает возможность определить в $L_2[\Gamma]$ скалярное произведение с весом так, что система собственных функций оператора L становится ортонормированным базисом.

Как уже отмечалось выше, в [1] построено интегральное преобразование для краевой задачи на графе. Напомним основные результаты работы [1].

Интегральное преобразование на графе задается в виде интегрального оператора $\mathcal{L} : L_2[\Gamma] \to l_2$ задаваемого в виде счетной системы равенств

$$\bar{u}(\lambda_k) = \int\limits_{\Gamma} \rho(x)u(x)h_k(x)\,dx, \tag{5}$$

где ρ — весовая функция.

Оператор $\mathcal{L}$ ставит в соответствие каждой функции (оригиналу) $u \in L_2[\Gamma]$ последовательность(изображение) $\bar{u} = \{\bar{u}(\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ коэффициентов Фурье по системе собственных функций h_k^*. Обратное преобразование (формула обращения) $\mathcal{L}^{-1} : l_2 \to L_2[\Gamma]$ определяется как разложение оригинала в ряд по биортогональной системе $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций оператора L:

$$\mathcal{L}^{-1}\bar{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}(\lambda_k)h_k(x) \tag{6}$$

Если функция $u \in D(L)$, то ряд (6) сходится на Γ к функции u равномерно. Формулы (5) и (6) устанавливают взоимооднозначное соответствие между оригиналами из $D(L)$ и их изображениями.

Применим к задаче (1)–(3) интегральное преобразование (5). В пространстве изображений задача примет вид:

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{u}(\lambda_k, t)}{dt} + \lambda_k \bar{u}(\lambda_k, t) = \bar{f}(\lambda_k, t), \\ \bar{u}(\lambda_k, 0) = \bar{\varphi}(\lambda_k), \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\bar{u}(\lambda_k, t) = \int\limits_{\Gamma} \rho(x)u(x,t)h_k(x)\,dx,$$

$$\bar{f}(\lambda_k, t) = \int\limits_{\Gamma} \rho(x)f(x,t)h_k(x)\,dx,$$

$$\bar{\varphi}(\lambda_k) = \int\limits_{\Gamma} \rho(x)\varphi(x)h_k(x)\,dx.$$

Решение задачи (7) задается равенством:

$$\bar{u}(\lambda_k, t) = \int\limits_0^t \bar{f}(\lambda_k, s)e^{-\lambda_k(t-s)}\,ds + \bar{\varphi}(\lambda_k)e^{-\lambda_k t}, \tag{8}$$

а для смешанной задачи получаем формальное решение

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x)\bar{u}(\lambda_k, t). \tag{9}$$

Введем следующие обозначения: $\Gamma_T = \{x \in \Gamma,\ 0 < t < T\}$, $\Gamma_s = \{x \in \Gamma, t = s\}$, $\Gamma_0 = \{x \in \Gamma, t = 0\}$, $\partial\Gamma_T = \{x \in \partial\Gamma,\ 0 < t < T\}$.

Функцию $u(x,t) \in C^{2,1}[\Gamma_T]\bigcap C[\Gamma_T \bigcup \Gamma_0 \bigcup \partial\Gamma_T]$ удовлетворяющую в Γ_T уравнению (1), на Γ_0 начальному условию (3) и краевым условиям (2) при $t \in [0, T]$ назовем классическим решением смешанной задачи (1)–(3).

Обозначим через $H^k[\Gamma]$ пространства Соболева,а через $H^1_L[\Gamma]$ подпространство в $H^1[\Gamma]$, состоящее из всех функций, удовлетворяющих краевым условиям (2). Нам удобно ввести в $H^1_L[\Gamma]$ скалярное произведение

$$(u, v)_{H^1_L[\Gamma]} = \int\limits_{\Gamma} \rho[pu'v' + quv]\,dx,$$

где ρ — весовая функция . В этом случае система $\left\{\frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}}h_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ — собственных функций оператора L является ортонормированной.

Аналогично определяем пространства $H^{n,k}[\Gamma_T]$. Через $H^{1,0}_L[\Gamma_T]$ обозначим подпространство в $H^{1,0}[\Gamma_T]$ функций удовлетворяющих при $0 < t < T$ условиям (2), со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^{1,0}_L[\Gamma_T]} = \int\limits_{\Gamma_T} \rho[pu'v' + quv]\,dx\,dt$$

Принадлежащую пространству $H^{1,0}_L[\Gamma_T]$ функцию $u(x,t)$ назовем обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Gamma_T} \rho\left[-u\frac{\partial v}{\partial t} + p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right] + quv\,dx\,dt = \int\limits_{\Gamma_0} \rho\varphi v\,dx + \int\limits_{\Gamma_T} \rho f v\,dx\,dt \tag{10}$$

для всех $v \in H^{1,0}_L[\Gamma_T]$ равных нулю при $t = T, x \in \Gamma$.

Теорема 1. Если $f(x,t) \in L_2[\Gamma_T]$ и $\varphi \in L_2[\Gamma]$, то задача (1)–(3) имеет обобщенное решение. Это решение u представляется сходящимся в $H^{1,0}_L[\Gamma_T]$ рядом (9). При этом имеет место неравенство

$$\|u\|_{H^{1,0}_L[\Gamma_T]} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{L_2[\Gamma]} + \|f\|_{L_2[\Gamma_T]}\right), \tag{11}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ и f.

$\lhd$ Рассмотрим равенство (8). При любом $t \in [0,T]$ имеем

$$|\bar{u}(\lambda_k,t)| \leqslant |\bar{\varphi}(\lambda_k)|e^{-\lambda_k,t} + \int\limits_0^t |\bar{f}(\lambda_k,s)|e^{-\lambda_k(t-s)}\,ds \leqslant |\bar{\varphi}(\lambda_k)|e^{-\lambda_k t} + \frac{\|\bar{f}(\lambda_k)\|_{L_2(0,T)}}{\sqrt{2\lambda_k}}.$$

Поэтому

$$|\bar{u}(\lambda_k,t)|^2 \leqslant 2|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 e^{-2\lambda_k t} + \frac{1}{\lambda_k}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{12}$$

Обозначим через u_m частичную сумму ряда (9). Функции $u_m(x,t)$ принадлежат $H^1_L[\Gamma_t]$ при каждом $t \in (0,T)$. Имеем

$$\|u_m - u_n\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]} = \left\| \sum_{k=n+1}^m \bar{u}(\lambda_k,t)h_k(x) \right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]} \leq$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k=n+1}^m \left(|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 \lambda_k e^{-2\lambda_k t} + \int\limits_0^T [\bar{f}(\lambda_k,t)]^2\,dt \right). \tag{13}$$

Наряду с этим неравенством справедливо неравенство

$$\|u_m\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]} \leqslant C_2 \sum_{k=1}^m \left(|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 |\lambda_k| e^{-2\lambda_k t} + \int\limits_0^T [\bar{f}(\lambda_k,t)]^2\,dt \right). \tag{14}$$

Интегрируя (13) и (14) по t от 0 до T получим

$$\|u_m - u_n\|^2_{H^{1,0}_L[\Gamma_T]} \leqslant C_3 \sum_{k=n+1}^m \left(|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \int\limits_0^T [\bar{f}(\lambda_k,t)]^2\,dt \right), \tag{15}$$

$$\|u_m\|^2_{H^{1,0}_L[\Gamma_T]} \leqslant C_4 \sum_{k=1}^m \left(|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \int\limits_0^T [\bar{f}(\lambda_k,t)]^2\,dt \right). \tag{16}$$

Из (15) следует сходимость ряда (9) в $H^{1,0}_L[\Gamma_T]$, а из (16) получаем оценку (11). Интегральное соотношение (10) получается из тождества

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = Lu_m + f_m,$$

где

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^m \bar{f}_k h_k(x),$$

умножением на функцию $v \in H^{1,0}_L[\Gamma_T]$, с последующим интегрированием по частям и переходом к пределу. $\rhd$

Из (11) следует теорема

Теорема 2. *Обобщенное решение задачи* (1)–(3) *единственно и непрерывно зависит от начальных данных.*

Поскольку всякое классическое решение задачи (1)–(3) является обобщенным, то теорема 2 устанавливает единственность и непрерывную зависимость классического решения.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi, L\varphi \in H^1_L[\Gamma]$, $f \in H^{2,1}_L[\Gamma_T]$. *Тогда ряд* (9) *сходится в* $C^{2,1}[\Gamma_T]$ *и представляет классическое решение задачи* (1)–(3).

$\triangleleft$ Заметим, что из $f \in H^{2,1}_L[\Gamma_T]$ следует, что функция $\bar{u}(\lambda_k, t)$ определяемая равенством (8) принадлежит пространству $H^2(0,T)$, а следовательно, и пространству $C^1[0,T]$. Тогда функции u_m, представляющие собой частичные суммы ряда (9), принадлежат $C^{2,1}[\Gamma_T]$.

Из (12) следует оценка для $\bar{u}(\lambda_k, t)$

$$|\bar{u}(\lambda_k, t)|^2 \leqslant 2|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \frac{1}{|\lambda_k|}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}, \tag{17}$$

а из уравнения (7)— оценка для $\bar{u}'(\lambda_k, t)$

$$|\bar{u}'(\lambda_k, t)| \leqslant |\lambda_k||\bar{\varphi}(\lambda_k)| + |\bar{f}(\lambda_k, t)| + \sqrt{\frac{|\lambda_k|}{2}}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Поэтому для всех $t \in [0,T]$

$$|\bar{u}'(\lambda_k^2, t)| \leqslant 3\lambda_k^2|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \frac{3\lambda_k}{2}\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + 3|\bar{f}(\lambda_k, t)|^2. \tag{18}$$

Рассмотрим неравенство (18). При больших k воспользуемся неравенством [5]:

$$f^2(t) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|f\|^2_{L_2(0,T)} + 2\varepsilon\|f'\|^2_{L_2(0,T)},$$

справедливым для всех $f \in H^1(0,T)$, $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,T]$. Тогда

$$|\bar{f}(\lambda_k, t)|^2 \leqslant 2\lambda_k\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{2}{\lambda_k}\|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Подставляя последнее неравенство в (18) получим

$$|\bar{u}'(\lambda_k, t)|^2 \leqslant C\left(\lambda_k^2|\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \lambda_k\|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{\lambda_k}\|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}\right) \tag{19}$$

На основании теорем вложения, неравенств Соболева, справедливых на каждом ребре $\gamma_i \in \Gamma$, а значит и на всем графе Γ, и привлекая неравенства (17), (19), имеем при $t \in [0,T]$

$$\|u_m - u_n\|^2_{C^2[\Gamma_t]} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_m - u_n)\right\|^2_{C[\Gamma_t]} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left(\|u_m - u_n\|^2_{H^3[\Gamma_t]} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_m - u_n)\right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]} \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \left(\left\| \sum_{k=n+1}^{m} \bar{u}(\lambda_k, t) L h_k(x) \right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]} + \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \bar{u}'(\lambda_k, t) h_k(x) \right\|^2_{H^1_L[\Gamma_t]} \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \sum_{k=n+1}^{m} (\lambda_k^3 |\bar{u}(\lambda_k, t)|^2 + \lambda_k |\bar{u}'(\lambda_k, t)|^2) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sum_{k=n+1}^{m} (\lambda_k^3 |\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 + \lambda_k^2 \|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} + \|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}). \qquad (20)$$

Так как $L\varphi \in H^1_L[\Gamma]$, то $(L\varphi, h_k)_{H^1_L[\Gamma]} = \lambda_k^2 (\varphi, h_k)_{L_2[\Gamma]}$, и на основании полноты системы h_k, заключаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 \lambda_k^4$ сходится, а, значит, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\bar{\varphi}(\lambda_k)|^2 \lambda_k^3$. Аналогично, из $f \in H^{2,1}_L[\Gamma_T]$ следует сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)} \lambda_k^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}'(\lambda_k)\|^2_{L_2(0,T)}$. Поэтому из неравенства (20) вытекает, что ряд (9) сходится в $C^{2,1}[\Gamma_T]$ и следовательно, его сумма является классическим решением. $\triangleright$

Литература.

1. Кулаев Р. Ч. Интегральное преобразование на графе для дифференциального оператора второго порядка // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 2.—С. 78–85.

2. Покорный Ю. В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.—М.: Физматлит, 2004.

3. Завгородний М. Г. Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // Докл. АН.—1994.—Т. 335, № 3.—С. 281–282.

4. Гохбег И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Наука, 1965.

5. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.—М.: Наука, 1978.

Курбатов В.Г.

Об односторонней обратимости эллиптических дифференциально-разностных операторов с почти периодическими коэффициентами

В заметке доказывается, что для линейных эллиптических дифференциально-разностных операторов с почти периодическими коэффициентами из односторонней обратимости вытекает двустронняя обратимость. Доказательство существенно использует ссылки на работы [4, 6, 7].

Пусть X и Y — банаховы пространства. Символом $\mathbf{B}(X,Y)$ обозначим множество всех линейных ограниченных операторов $T : X \to Y$. Если $X = Y$, будем использовать обозначение $\mathbf{B}(X)$. Символом $\mathbf{1} \in \mathbf{B}(X)$ будем обозначать тождественный оператор.

Пусть $\mathbb{E}$ — конечномерно банахово пространство, а n — натуральное число. Обозначим через $L_p = L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, $1 \le p \le \infty$, пространства Лебега функций $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$; а через $W_p^2 = W_p^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ — соответствующие пространства Соболева [4, 6]. Символом $C_{00} = C_{00}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ обозначим пространство всех непрерывных функций $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$, имеющих компактный носитель. Известно, что C_{00} плотно по норме в L_p, $1 \le p < \infty$. Символом $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ обозначим пространство всех быстро убывающих функций $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$, а символом $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ — пространство всех медленно растущих обобщенных функций $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$ [1].

Обозначим символом $\mathbf{D} = \mathbf{D}(L_p)$ замыкание по норме алгебры $\mathbf{B}(L_p)$ множества всех операторов вида

$$\big(\mathcal{D}u\big)(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)u(x - h_k),$$

где $a_k : \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ — измеримые ограниченные функции, а $h_k \in \mathbb{R}^n$ — некоторые точки. Операторы класса $\mathbf{D}$ называют *разностными*.

Каждой измеримой функции $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$ сопоставим последовательность функций $u_i(x) = u(x - i)$, $i \in \mathbb{Z}^n$, рассматриваемых с областью определения $(0,1]^n$. Очевидно, соответствие $u \mapsto \{u_i\}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$ на пространство $l_p = l_p\big((0,1]^n, \mathbb{E}\big)$, $1 \le p \le \infty$, подробнее см. [7, 1.6.3]. Семейство операторов $\{\,T_{ij}\,\} = \{\,T_{ij} : l_p\big((0,1]^n, \mathbb{E}\big) \to l_p\big((0,1]^n, \mathbb{E}\big)\,\}$ будем называть *матрицей.* Будем говорить, что матрица $\{\,T_{ij}\,\}$ имеет *конечное число ненулевых диагоналей*, если $T_ij = 0$ при $|i - j| < n$ (модуль и неравенство понимаются короодинатно) для некоторого $n \in \mathbb{Z}^n$. Будем говорить, что *оператор* $T \in \mathbf{B}(l_p)$ *задается* матрицей $\{\,T_{ij}\,\}$, если

$$(Tu)_i = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} T_{ij}u_j, \qquad \text{для всех } u = \{u_i\} \in l_p.$$

(В силу изоморфизма $l_p \simeq L_p$ это правило порождает и оператор $T \in \mathbf{B}(L_p)$.) Нетрудно показать [7, 1.6.5], что матрица с конечным числом ненулевых диагоналей порождает ограниченный оператор тогда и только тогда, когда

$$\sup_{i-j=k} \|T_{ij}\| < \infty \qquad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}^n.$$

Символом $\mathbf{d} = \mathbf{d}(L_p)$ обозначим замыкание по норме алгебры $\mathbf{B}(L_p)$ множества всех операторов, порождаемых матрицами, имеющими конечное число ненулевых диагоналей. Нетрудно показать [7, 1.6.12], что $\mathbf{D} \subset \mathbf{d}$.

Символом $\mathbf{h} = \mathbf{h}(L_p)$ обозначим замыкание по норме алгебры $\mathbf{B}(L_p)$ множества всех операторов, порождаемых матрицами $\{\, K_{ij} \,\}$, имеющими конечное число ненулевых диагоналей, все элементы K_{ij} которых являются компактными операторами. Пример оператора класса $\mathbf{h} = \mathbf{h}(L_p)$ описывается ниже в предложении 1.

Очевидно [7, 6.5.6], множества $\mathbf{D}$ и $\mathbf{d}$ являются банаховыми алгебрами, а $\mathbf{h}$ — идеалом в $\mathbf{d}$.

Предложение 1 *Пусть $k : \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ — суммируемая функция. Тогда интегральный оператор свертки*

$$\big(\mathcal{K}u\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)u(y)\,dy$$

принадлежит $\mathbf{h}(L_p)$ при всех $1 \le p \le \infty$.

Доказательство 1 *Поскольку C_{00} плотно в L_1, существует такая функция $k_0 \in C_{00}$, что $\|k_0 - k\|_{L_1}$ меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. В силу [7, 6.2.2] интегральный оператор $\mathcal{K}_0$, порожденный ядром k_0, принадлежит $\mathbf{h}$. При этом в силу [7, 1.5.12] $\|\mathcal{K}_0 - \mathcal{K}\| < \varepsilon$.* $\triangleright$

Известно [4, с. 288], [6, с. 159], что оператор $\mathbf{1} - \Delta : \ W_p^2 \to L_p$, $1 < p < \infty$, является изоморфизмом. Очевидно также, что $\mathbf{1} - \Delta$ осуществляет изоморфизм $\mathcal{S}$ на себя и $\mathcal{S}'$ на себя. Обозначим через U оператор $(\mathbf{1} - \Delta)^{-1}$. Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ — преобразование Фурье. Очевидно, $\big(\mathcal{F}(\mathbf{1}-\Delta)\mathcal{F}^{-1}v\big)(\omega) = (1+|\omega|^2)v(\omega)$, где $|\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2}$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, для всех $v \in \mathcal{S}'$. Отсюда $\big(\mathcal{F}U\mathcal{F}^{-1}v\big)(\omega) = (1+|\omega|^2)^{-2}v(\omega)$ для $v \in \mathcal{S}'$.

Обозначим через $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функцию, преобразованием Фурье которой является функция $\widehat{G}(\omega) = (1+|\omega|^2)^{-2}$. Ее называют [4, с. 283] *ядром Бесселя.*

Предложение 2 *Ядро Бесселя G существует и вместе с частными производными первого порядка принадлежит L_1.*

Доказательство 2 *Вытекает из оценок [4, с. 285–286], см. также [6, с. 154–156]. Явные формулы для G можно найти в [2, задача 11.10].* $\triangleright$

Следствие 2 *На функциях $u \in L_p$, $1 < p < \infty$, имеем*

$$\big(Uu\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y)u(y)\,dy,$$
$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_m}Uu\Big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial G}{\partial x_m}(x-y)u(y)\,dy.$$

Доказательство 3 *Рассмотрим операторы*

$$\big(Vu\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y)u(y)\,dy,$$
$$\big(V_m u\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial G}{\partial x_m}(x-y)u(y)\,dy.$$

В силу предложения 2 и [7, 4.4.11] операторы V и V_m действуют в L_p. В силу свойств преобразования Фурье в L_1 [5, теорема 7.2], [3] имеем $\mathcal{F}V\mathcal{F}^{-1}v = \mathcal{F}U\mathcal{F}^{-1}v$ и $\mathcal{F}V_m\mathcal{F}^{-1}v = \mathcal{F}\frac{\partial}{\partial x_m}U\mathcal{F}^{-1}v$ для $v \in L_1 \cap L_p$. Остается напомнить, что $L_1 \cap L_p$ плотно в L_p. $\triangleright$

Напомним, что функцию $u : \mathbb{R}^n \to X$, где X — банахово пространство, называют *почти периодической*, если ее можно с любой точностью равномерно приблизить тригонометрическим многочленом

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\langle\omega_k,x\rangle}u_k, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

с коэффициентами $u_k \in X$ и частотами $\omega_k \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим семейство *операторов сдвига*

$$\big(S_h u\big)(x) = u(x-h), \qquad h \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть X и Y — банаховы пространства функций, определенных на $\mathbb{R}^n$. Оператор $T \in \mathbf{B}(X,Y)$ будем называть *почти периодическим*, если функция

$$h \mapsto S_h T S_{-h}, \qquad h \in \mathbb{R}^n,$$

является почти периодической. Нетрудно показать (см., например, [7, 6.5.2]), что произведение почти периодических операторов — почти периодический оператор, и обратный к почти периодическому оператору — почти периодический оператор.

Множество всех почти периодических операторов $T : X \to Y$ будем обозначать символом $\mathbf{B}_{AP}(X,Y)$. Пересечение $\mathbf{B}_{AP}(X,Y)$ с $\mathbf{D}$, $\mathbf{d}$ и $\mathbf{h}$ будем обозначать $\mathbf{D}_{AP}$, $\mathbf{d}_{AP}$ и $\mathbf{h}_{AP}$ соответственно.

Предложение 3 ([7, 6.5.11]) *Пусть $D \in \mathbf{D}_{AP}$ и $B \in \mathbf{h}_{AP}$. Если $D + B$ обладает свойством*

$$\inf_{\|u\|=1} \|(D+B)u\| > 0,$$

то оператор $\mathcal{L}$ обратим. Если сопряженный оператор $(D+B)'$ обладает свойством

$$\inf_{\|v\|=1} \|(D+B)'v\| > 0,$$

то оператор $D+B$ обратим.

Рассмотрим оператор $\mathcal{L} : W_p^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{E}) \to L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{E})$, $1 < p < \infty$, определенный по формуле

$$\big(\mathcal{L}u\big)(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(x)\Delta + \sum_{m=1}^{n} b_{km}(x)\frac{\partial}{\partial x_m} + c_k(x)\Big)u(x-h_k),$$

где $a_k, b_{km}, c_k : \ \mathbb{R}^n \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ — почти периодические функции, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|a_k(x)\| + \sum_{m=1}^{n} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|b_{km}(x)\| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|c_k(x)\|\Big) < \infty.$$

Теорема 3 *Пусть $\mathcal{L} : W_p^2 \to L_p$, $1 < p < \infty$. Если $\mathcal{L}$ обладает свойством*

$$\inf_{\|u\|=1} \|\mathcal{L}u\| > 0,$$

то оператор $\mathcal{L}$ обратим. Если сопряженный оператор $\mathcal{L}'$ обладает свойством

$$\inf_{\|v\|=1} \|\mathcal{L}'v\| > 0,$$

то оператор $\mathcal{L}$ обратим.

Доказательство 4 *Представим оператор $\mathcal{L}$ в виде*

$$\mathcal{L} = A\Delta + \sum_{m=1}^{n} B_m\frac{\partial}{\partial x_m} + C = -A(\mathbf{1}-\Delta) + \sum_{m=1}^{n} B_m\frac{\partial}{\partial x_m} + C + A,$$

где

$$\big(Au\big)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)u(x-h_k),$$

$$\big(B_m u\big)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{km}(x)u(x-h_k),$$

$$\big(Cu\big)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)u(x-h_k).$$

Очевидно, $A, B_m, C \in \mathbf{D}_{AP} \subset \mathbf{d}_{AP}$. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{L}U = -A + \sum_{m=1}^{n} B_m\frac{\partial}{\partial x_m}U + (C+A)U.$$

В силу предложения 1 и следствия 2 операторы U и $\frac{\partial}{\partial x_m}U$ принадлежат $\mathbf{h}(L_p)$; а поскольку они инвариантны относительно сдвигов, они принадлежат и $\mathbf{h}_{AP}(L_p)$. Отсюда, поскольку $\mathbf{h}$ является идеалом в $\mathbf{d}$, а произведение почти периодических операторов является почти периодическим оператором, имеем $\sum_{m=1}^{n} B_m \frac{\partial}{\partial x_m}U + (C + A)U \in \mathbf{h}_{AP}(L_p)$. Остается сослаться на предложение 3. $\triangleright$

Следствие 3 *Односторонняя обратимость оператора $\mathcal{L}$ влечет двустороннюю обратимость.*

Литература

[1] Владимиров В.С. Обобщенные функции. М.: Наука, 1979.

[2] Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А., Каримова Х.Х. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982.

[3] Курбатов В.Г. Интегральные операторы. Липецк: ЛГТУ, 1998.

[4] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

[5] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

[6] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

[7] Kurbatov V.G. Functional differential operators and equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1999.

Курбатова И.В.

Наилучшая квадратурная формула в классе W^2_∞

Квадратурной формулой называют [1, 2] приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k), \tag{1}$$

служащее для вычисления определенных интегралов. Квадратурная формула определяется выбором *узлов* $a \le x_1 < \dots < x_n \le b$ и *коэффициентов* c_k, $k = 1, \dots, n$. В заметке описывается квадратурная формула, дающая наилучшую точность в классе $W^2_\infty(M, [a,b])$ функций $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$, имеющих ограниченную вторую производную. Аналогичная задача для класса функций $W^1_\infty(M, [a,b])$, имеющих ограниченную первую производную , решена в [3].

Квадратурные формулы

Количественной характеристикой качества квадратурной формулы (1) считают величину *остатка*

$$R = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n c_k f(x_k). \tag{2}$$

Конечно, остаток зависит от выбора функции f. Говорят [1, 2], что квадратурная формула (1) *точна на многочленах степени* r, если для любого многочлена f степени r она превращается в точное равенство.

Теорема 1 ([1, с. 349], [2, с. 15]) *Пусть квадратурная формула* (1) *является точной на многочленах степени* r*, а* $f^{(r+1)}$ *существует. Тогда остаток* (2) *этой квадратурной формулы можно представить в виде*

$$R = \int_a^b f^{(r+1)}(s) K(s)\,ds, \tag{3}$$

где

$$K(s) = \frac{1}{r!}\Big(\int_s^b (t-s)^r\,dt - \sum_{j=1}^n c_j (x_j - s)^r \eta(x_j - s)\Big), \tag{4}$$

а η *— функция Хевисайда*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } t \ge 0, \\ 0, & \text{\textit{если} } t < 0. \end{cases}$$

Следствие 1 *В условиях теоремы 1 для остатка R справедлива оценка*

$$|R| \leq \max_{s\in[a,b]} |f^{(r+1)}(s)| * \int_a^b |K(s)|\, ds. \qquad (5)$$

Доказательство 1 *Для остатка R из формулы (3) в силу неравенства треугольника для интегралов имеем оценку*

$$|R| \leq \int_a^b |f^{(r+1)}(s)| \cdot |K(s)|\, ds.$$

Заменяя в ней $|f^{(r+1)}(s)|$ на $\max_s |f^{(r+1)}(s)|$, получаем нужную оценку (5). $\rhd$

Две квадратурные формулы на отрезках $[a, b]$ и $[a', b']$ назовем *подобными*, если они переходят друг из друга при линейном отображении отрезка $[a, b]$ на $[a', b']$.

Предложение 1 *Построим по заданной квадратурной формуле на $[a, b]$ подобную ей квадратурную формулу на отрезке $[0, 1]$. Пусть K — функция (4), соответствующая исходному отрезку $[a, b]$, K_1 функция (4), соответствующую отрезку $[0, 1]$. Тогда*

$$\int_a^b |K(s)|\, ds = (b-a)^{r+2} \int_0^1 |K_1(s)|\, ds.$$

Обозначим через $W^l_\infty(M, [a, b])$ множество всех функций $f\ [a, b] \to \mathbb{R}$, для которых $(l-1)$-ая производная существует во всех точках отрезка $[a, b]$, а l-ая производная существует в смысле обобщенных функций и является измеримой ограниченной функцей, причем

$$|f^{(l)}(t)| \leq M$$

почти всюду на $[a, b]$.

Предложение 2 *Для функции $f \in W^l_\infty(M, [a, b])$ производные порядков $0, 1, \ldots, l-1$ непрерывны.*

Теорема 2 *Пусть квадратурная формула (1) является точной на многочленах степени r и пусть $l = r + 1$. Тогда для любой функции f класса $W^l_\infty(M, [a, b])$ для остатка (2) этой квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R| \leq M \int_a^b |K(s)|\, ds. \qquad (6)$$

Эта оценка является неулучшаемой в классе $W^l_\infty(M, [a, b])$ в том смысле, что найдется функция $f \in W^l_\infty(M, [a, b])$, для которой она превращается в равенство.

Минимизация интеграла $\int_a^b |K(s)|\,ds$

В настоящей заметке изучается задача о нахождении наилучшей квадратурной формулы для функций класса $W^2_\infty(M,[a,b])$. Чтобы оказаться в условиях предыдущего параграфа, ограничимся рассмотрением квадратурных формул, точных на многочленах степени 1. В силу теоремы 2 эта задача сводится к нахождению квадратурной формулы, для которых интеграл

$$\int_a^b |K(s)|\,ds \tag{7}$$

принимает наименьшее значение. В силу предложения 1 достаточно решить эту задачу хотя бы для одного отрезка $[a,b]$. Чтобы упростить обозначения, будем считать, что $[a,b]=[-1,1]$. Очевидно также, что достаточно рассмотреть только случай $M=1$. Поэтому мы ограничимся поиском наилучшей квадратурной формулы для функций класса $W^2_\infty(1,[-1,1])$.

Кроме того, для упрощения рассуждений будем предполагать, что искомая квадратурная формула симметрична относительно середины отрезка. *Симметричность* означает, что

$$x_k = -x_{n-k+1}, \qquad c_k = c_{n-k+1}. \tag{8}$$

Отметим сразу, что для симметричной квадратурной формулы точность на функции $y=t$ имеет место автоматически, поскольку

$$\int_{-1}^1 t\,dt = 0, \qquad \sum_{k=1}^n c_k x_k = 0.$$

А точность на константах означает, что

$$\sum_{k=1}^n c_k = 2. \tag{9}$$

Таким образом, проверка точности на многочленах степени 1 сводится к проверке тождества (9).

Теперь интересующая нас задача может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти узлы $-1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \le 1$ и коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_n$, удовлетворяющие условиям (8) и (9), для которых величина (7) является наименьшей. Напомним, что здесь K — функция, определенная равенством (4), в которой параметр r равен 1. Нетрудно видеть, что в нашем случае функция K имеет вид

$$K(s) = \frac{(1-s)^2}{2} - \sum_{j=1}^n c_j (x_j - s)\eta(x_j - s).$$

Положим $x_0=-1$, $x_{n+1}=1$. Представим интеграл (7) в виде

$$\int_a^b |K(s)|\,ds = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |K(s)|\,ds.$$

Из определения функции Хевисайда η видно, что на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ функция K допускает следующее представление:

$$K(s) = \frac{(1-s)^2}{2} - \sum_{j=k}^{n} c_j (x_j - s) \qquad \text{при } s \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Поэтому интеграл (7) можно представить в виде суммы

$$\int_a^b |K(s)|\, ds = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| \frac{(1-s)^2}{2} - \sum_{j=k}^{n} c_j (x_j - s) \right| ds.$$

Если значения x_k и c_k известны, то точки, в которых обращается в ноль квадратичная функция, стоящая под знаком модуля, легко находятся. Благодаря этому легко вычисляется и сам интеграл.

Путем варьирования x_k и c_k были подобраны оптимальные графиков функций K, соответствующих приближенно наилучшей квадратурной формуле, видно, что все максимумы и минимумы K равны между собой, все средние отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 2, \ldots, n$, имеют одинаковую длину, а потому все c_k, кроме крайних, равны между собой. Это наблюдение позволяет значительно сузить класс квадратурных формул, среди которых следует искать оптимальную. А именно, все квадратурные формулы, обладающие описанными свойствами, могут быть описаны в терминах одного параметра p — длины среднего отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. После несложных вычислений получается такой результат:

$$\begin{aligned} &x_k = \frac{(-1 + 2\,k - n)\,p}{2}, \quad k = 1, \ldots, n; \\ &c_1 = c_n = 1 + p - \frac{n\,p}{2}, \qquad c_k = p, \quad k = 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{10}$$

Прямая подстановка показывает, что условие (9) оказывается выполненным при всех p. Подставляя выражения x_k и c_k через параметр p в аналитическую формулу для интеграла (7), получаем представление для интеграла (7) в виде функции от одной переменной p:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}\Big(&4 - 3\,p^2 + 6\,n\,p^2 - 3\,n^2\,p^2 + 2\,n\,p^3 - 3\,n^2\,p^3 + n^3\,p^3 \\ &+ 2\,(n-1)\,\big((2 - (n-2)\,p)\,(n\,p - 2)\big)^{3/2}\Big). \end{aligned} \tag{11}$$

Областью определения этой функции является промежуток $[2/n, 2/(n-2)]$. Ее график показан на рисунке 1.

Производная выражения (11) по p имеет вид

$$(n-1)\ \big(2 + n\,(-2 + (n-2)\,p)\big)\ \left(p - 2\sqrt{(2 - (n-2)\,p)\,(+n\,p - 2)}\right)\Big/4.$$

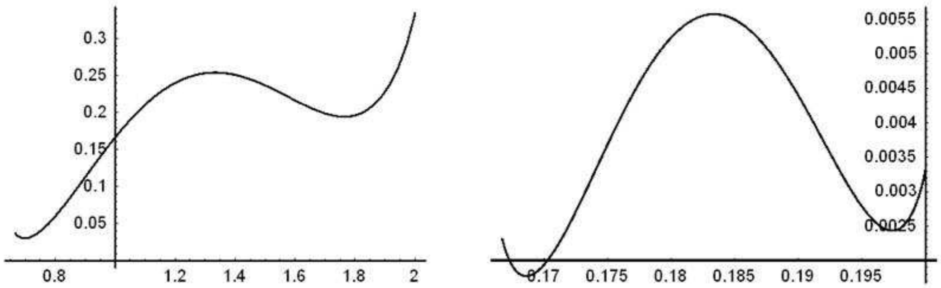


Рис. 1: График зависимости выражения (11) от p на промежутке $p \in [2/n, 2/(n-2)]$. Слева: случай $n = 3$. Справа: случай $n = 12$

Стандартные вычисления показывают, что корни производной имеют вид

$$p_1 = \frac{2n-2}{n^2-2n}, \qquad p_2 = \frac{4(2n-2-\sqrt{3})}{4n^2-8n+1}, \qquad p_3 = \frac{4(2n-2+\sqrt{3})}{4n^2-8n+1}.$$

Из графика функции (11) видно, что минимум достигается в наименьшем корне p_2. Подставляя его в (10), получаем точные параметры предположительно наилучшей квадратурной формулы.

Чтобы проверить, что найденное значение p действительно соответствует наилучшей квадратурной формуле, были проверено, что частные производные аналитического выражения для интеграла (7) по x_k и c_k равны нулю. После этого был вычислен второй дифференциал. Он оказался положительно определенным. Вопрос о том, является ли найденная точка локального минимума единственной остался открытым.

Итак, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 3 *Наилучшая квадратурная формула в классе $W^2_\infty(1, [-1, 1])$ имеет следующие узлы и коэффициенты:*

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{(-1+2k-n)}{2}\frac{4(2n-2-\sqrt{3})}{4n^2-8n+1}, && k = 1, \dots, n, \\ c_1 &= c_n = 1 + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\frac{4(2n-2-\sqrt{3})}{4n^2-8n+1}, && \\ c_k &= \frac{4(2n-2-\sqrt{3})}{4n^2-8n+1}, && k = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Литература

[1] Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

[2] Крылов В.И., Шульгина А.Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966.

[3] Волошина И.А. Об одной оптимальной квадратурной формуле. Математика сегодня '90. Киев: Выща школа, 1990. С. 105–110.

Мелькумова Е.М.

О Марковских операторах.

Рассматривается задача описания класса дифференциальных операторов, которые являются генераторами марковских полугрупп операторов. В данной работе доказано, что таким оператором является дифференциальный оператор второго порядка, определенный периодическими краевыми условиями.

This article considers the problem of the description of the class differential operators, which are the generators of Markovian semi groups. In work is proved than such an operator is a differential operator of the second order, determined by periodic boundary conditions.

В статье доказано, что дифференциальный оператор второго порядка, определенный периодическими краевыми условиями, является генератором марковской полугруппы операторов в пространстве непрерывных функций на отрезке.

Пусть K - компактное топологическое пространство. Через C = C(K) обозначим банахово пространство непрерывных действительнозначных функций на K с "supremum"нормой; $C_{2\pi}(\mathbb{R})$-банахово пространство непрерывных на $[0, 2\pi]$, комплексных и периодических с периодом 2π функций. Пусть $C^* = C^*(K)$ - сопряженное к C(K) банахово пространство функционалов, изометрически изоморфное и отождествляемое с банаховым пространством регулярных мер Радона на σ алгебре борелевских подмножеств из K; $S^*(K) = \{p \in C^*(K) | p \geq 0, \|p\| = 1\}$ - набор вероятностных мер. Отметим, что $S^*(K)$ является слабым* выпуклым компактным множеством в C^*. Всюду через $L(X)$ обозначается банахова алгебра линейных ограниченных операторов, определенных в банаховом пространстве X [1].

Определение 1. Оператор $M \in L(C)$ называется *марковским оператором*, если выполняются свойства:

1)$M1 = 1$;

2)$M \geq 0$ (т.е.$M\varphi \geq 0$ для любой неотрицательной функции $\varphi \in C$).

Обозначим через $M = M(C)$ множество марковских операторов $M = M(C) = \{M \in L(C) : (M \geq \mathit{0}, M\mathit{1} = \mathit{1})\}$. Отметим следующие свойства марковских операторов:

1) множество $M = M(C)$ является выпуклым;

2) $\|M^*\| = \mathit{1}; M^*(\mu) \geq \mathit{0}$ для любой $\mu \in S^*(K)$;

3) множество $M^* = M^*(C) = \{M^* \in L(C^*) : (M \in M)\}$ выпукло.

Определение 2. Двусторонняя последовательность комплексных чисел $a_n, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ называется *положительно определенной*, если:

а)$a_{-n} = \overline{a_n}, n \in Z$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{k-j} z_k \bar{z}_j \geq 0$ для любого натурального числа m и любого набора $(z_1, \ldots, z_m)$ комплесных чисел.

Определение 3 [2]. Функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется *положительно определенной*, если она:

1) непрерывна при каждом конечном аргументе и ограничена на $(-\infty, +\infty)$;

2) "эрмитова", то есть $\overline{\varphi(-x)} = \varphi(x)$;

3) для любых точек $\{t_1, \ldots, t_m\}$ и любых чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}, m = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} \varphi(t_i - t_j)\alpha_i \bar{\alpha}_j \geq 0$.

Замечание 1. Непосредственно из определений 2 и 3 следует, что если $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ является положительно определенной функцией, то ее сужение $\bar{\varphi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \overline{\varphi(n)} = \varphi(n), n \in Z$ также является положительно определенной.

Замечание 2. Пусть $x_0 \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Тогда последовательность

$x_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x_0(\tau) e^{-in\tau} d\tau$ является положительно определенной тогда и только тогда,когда функция x_0 неотрицательна, т.е. $x_0 \geq 0$.

Замечание 3. Произведение двух положительно определенных функций есть положительно определенная функция.

В статье используется

Лемма 1 [3,теорема 7.2]. Для любых функций $x, y \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ с рядами Фурье вида $x(t) \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{int}, y(t) \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{int}$, их свертка $(x * y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t-\tau) y(\tau) d\tau, t \in \mathbb{R}$ имеет ряд Фурье вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n e^{int}, t \in [0, 2\pi]$.

В данной работе рассматривается дифференциальный оператор

$A : D(A) \subset C_{2\pi}(\mathbb{R}) \to C_{2\pi}(\mathbb{R})$ вида

$$Ay = y'', y \in D(A) = \{y \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R})\} : y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)\}, \quad (1)$$

где $C^2_{2\pi}(\mathbb{R})$- пространство из $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Спектр дифференциального оператора $\sigma(A)$ имеет вид $\sigma(A) = \{-n^2, n \geq 0\}$, все числа $-n^2, n \geq 0$ являются собственными значениями, а соответсвующие собственные функции имеют вид $e_n(s) = e^{ins}, s \in [0, 2\pi], n \geq 1$. Данный оператор является генератором полугруппы операторов

$T : \mathbb{R}_+ = [0, +\infty] \to L(C_{2\pi}(\mathbb{R}))$ вида

$$(T(t)x)(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}(x, e_n) e_n(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\tau) e^{-in\tau} d\tau\right) e^{ins}, \quad (2)$$

где $(x, e_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\tau) e^{-in\tau} d\tau$ - скалярное произведение функций x и e_n.

При этом используются следующие понятия:

Определение 4. Операторная функция $T : \mathbb{R}_+ \to L(X)$, где X - банахово пространство, называется *полугруппой класса* C_0, если выполняются следующие условия:

1) T(0)=I;

2) T(t+s)=T(t)T(s),$t, s \geq 0$;

3) функция $t \mapsto T(t)x : \mathbb{R}_+ \to X$ непрерывна при любом $x \in X$.

Для $h \geq 0$ определим линейный оператор A_h равенством $A_h = \frac{T(h)x-x}{h}, x \in X$. Пусть D(A)- множество всех x из X, для которых существует предел $\lim\limits_{h\to 0} A_h x$. Определим на D(A) оператор A равенством: $Ax = \lim\limits_{h\to 0} A_h x$.

Определение 5. Оператор A с областью определения D(A) называется *генератором* или *инфинитезимальным оператором полугруппы T.*

Определение 6. Генератор полугруппы марковских операторов в C назовем *оператором Колмогорова.*

Основным результатом статьи является

Теорема. Полугруппа операторов в T, определенная равенством (2) для краевой задачи (1), является марковской полугруппой.

Доказательство. Из определения полугруппы T следует, что

$$T(t)1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 * e^{-in\tau} d\tau e^{ins} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\tau} d\tau e^{ins}, t \geq 0,$$

где 1-тождественная на $[0, 2\pi]$ функция.

Так как 1 - функция, ортогональная всем функциям $e^{-in\tau}, n \neq 0$,то

$(x, e_n) = (1, e_n) = 0, n \neq 0$, т.е. $T(t)1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau = \frac{1}{2\pi} \tau|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1.$

Теперь задача состоит в том, чтобы показать выполнение свойства: если $x_0 \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ и $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_0(\tau) d\tau = 1$, то функция $y_0 = T(t)x_0$ неотрицательна и $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_0(\tau) d\tau = 1$.

Вначале докажем неотрицательность функции y_0.

$$(T(t)x_0)(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_n t}(x, e_n)e_n(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} \int_0^{2\pi} x_0(\tau) e^{-in\tau} d\tau e^{ins} \qquad (3)$$

Обозначим $x_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_0(\tau) e^{-in\tau} d\tau$. Тогда (3) примет вид $(T(t)x)(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} x_n e^{ins}$, $\{x_n\}$ - положительно определенная последовательность (в силу замечания 2). Имеют место равенства:

$y_0(\tau) = (T(t)x_0)(\tau) = (\varphi_t * x_0)(\tau) =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} x_n e^{ins} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau - s) x_0(s) ds, \qquad (4)$$

т.е. y_0 есть свертка двух функций φ_t и x_0,

где $\varphi_t(\tau) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} e^{ins} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{ins}, c_n(t) = e^{-n^2 t}$.

Рассмотрим функцию $g_t(\lambda) = e^{-\lambda^2 t}, g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Она представима в виде $g_t(\lambda) = e^{-\lambda^2 t} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{g_t(\mu)} e^{i\lambda\mu} d\mu$, где $\overline{g_t(\mu)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-\mu^2}{4t}}$, $t > 0$.

Функция $\overline{g_t(\mu)}$ является неотрицательной, значит, в силу замечания 2 функция g_t при любом $t > 0$ положительно определена. Используя замечание 1, получаем, что ее сужение $g_t(n) = e^{-n^2 t}, n \in \mathbb{Z}$, есть положительно определенная последовательность. Таким образом, из формулы 4 следует, что функция y_0 есть свертка положительных функций φ_t (см замечание2) и x_0. Следовательно, $y_0 \geq 0$.

Далее имеют место равенства: $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} y_0(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (T(t)x_0)(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\varphi_t * x_0)(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} (\int\limits_0^{2\pi} x_0(\tau) d\tau) = \frac{1}{2\pi} * 2\pi = 1$, где $\varphi_t(\tau) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} e^{ins}$, из которых получаем $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} y_0(\tau) d\tau = 1$.

Вывод: все необходимые свойства показаны и, значит, $T(t), t \geq 0$, - марковская полугруппа операторов.

Отметим, что не всякий дифференциальный оператор второго порядка, действующий в банаховом пространстве $C[0,1]$, является марковским. В качестве примера рассмотрим дифференциальный оператор

$A : D(A) \subset \mathbb{C}_1[0,1] \to \mathbb{C}_1[0,1]$ вида

$$Ay = y'', y \in D(A) = \{y \in C[0,1] : y(0) = y(1) = 0\} \qquad (5)$$

Спектр дифференциального оператора $\sigma(A)$ имеет вид $\sigma(A) = \{-\pi^2 n^2, n \geq 0\}$, все числа $\pi^2 n^2, n \geq 0$ являются собственными значениями, а соответствующие собственные функции $e_n(s) = \sqrt{2} \sin(\pi n s), s \in [0,1], n \geq 1$. Данный оператор является генератором полугруппы операторов

$T : \mathbb{R}_+ = [0, +\infty] \to L(\mathbb{C}[0,1])$ вида

$(T(t)x)(s) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2 t} (x, e_n) e_n(s) =$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2 t} (\int_0^1 x(\tau) \sin(\pi n \tau) d\tau) \sin(\pi n s), t > 0, \qquad (6)$$

где $(x, e_n) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 x(\tau)\sin(\pi n\tau)d\tau$ - скалярное произведение функций x и e_n.

Рассмотрим оператор T(0): $(T(0)x_0)(s) = 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\int\limits_0^1 \sin(\pi n\tau)d\tau)\sin(\pi ns)$. Если бы полугруппа операторов была б марковской, то $T(0) = I$ и $\sup\limits_{t\geq 0}\|T(t)\| \leqslant 1$.

Докажем, что при $t = 0$ и $x_0 = 1$ определяющий функцию $T(0)x_0$ ряд является расходящимся в C[0,1].

Действительно, если бы полугруппа T была сильно непрерывной, то $T(0)x_0 = x_0 \equiv 1$. С другой стороны, при любой последовательности $t_n \to 0_+$, мы получаем, что соответствующая последовательность функций $T(t_n)x_0$ обладает свойством $(T(t_n)x_0)(0) = (T(t_n)x_0)(1) = 0$. Однако, функция x_0 не может быть пределом такой последовательности $(T(t_n)x_0)$.

Следовательно, ряд, определяющий функцию $T(0)x_0$ при $t = 0$ и $x_0 = 1$, расходится в C[0,1]. Значит, полугруппа операторов T(t), определенная равенством (6) для краевой задачи (5), не является марковской полугруппой.

Список литературы:

[1]. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика/ В.И.Лебедев. – М. : Физматлит, 2000 – 295 с.

[2].Треногин В.А. Функциональный анализ/ В.А.Треногин.– М. : Физматлит, 2002 – 487 с.

[3].Данфорд Н. Линейные операторы/Н.Данфорд,Дж.Шварц.–М., 1962 – 1974 – 895 с.

Печкуров А.В.

Об упорядоченных парах линейных операторов

Основные определения из спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов

Символами X, Y будем обозначать банаховы пространства, рассматриваемые над полем $\mathbf{C}$. Через $\widetilde{\mathbf{C}}$ обозначим расширение поля $\mathbf{C}$ с помощью точки $\{\infty\}$.

Символом $LO(X, Y)$ обозначим множество всех линейных замкнутых операторов, действующих из X в Y. Символом $LRC(X, Y)$ обозначим множество всех линейных замкнутых отношений, действующих из X в Y. Символом $Hom(X, Y)$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов (гомоморфизмов), определенных на X со значениями в Y.

Далее символом (G, F) будем обозначать упорядоченную пару линейных замкнутых операторов $F : D(F) \subset X \to Y$, $G : D(G) \subset X \to Y$, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

Будем считать, что области определения $D(F)$, $D(G)$ удовлетворяют одному из следующих условий

(i) $D(F) = X, D(G) \neq X$;

(ii) $D(F) \neq X, D(G) = X$;

(iii) $D(F) = X, D(G) = X$.

Через $\mathcal{D}$=$\mathcal{D}(G, F)$ обозначим подпространство $D(F) \cap D(G)$ и назовем его *областью определения упорядоченной пары операторов* (G, F).

Определение 1 *К* резольвентному множеству $\rho(G, F)$ *упорядоченной пары операторов* (G, F) *отнесем все числа* $\lambda \neq 0$ *из* $\mathbf{C}$*, для которых оператор* $G - \lambda F : \mathcal{D} \subset X \to Y$ *непрерывно обратим, а также точку* $\lambda = 0$*, если* $G : \mathcal{D} \to Y$ *— непрерывно обратимый оператор и* $D(F) = X$*. Множество* $\sigma(G, F) = \mathbf{C} \backslash \rho(G, F)$ *назовем* спектром этой пары.

Определение 2 *Операторнозначную функцию*

$$R(\cdot; G, F) : \rho(G, F) \subset \mathbf{C} \to Hom(Y, X),$$
$$R(\lambda; G, F) = (G - \lambda F)^{-1}, \lambda \in \rho(G, F),$$

назовем резольвентой упорядоченной пары (G, F).

Иногда чрезвычайно полезным оказывается введение понятия расширенного спектра упорядоченной пары операторов.

Определение 3 *Подмножество* $\widetilde{\sigma}(G,F)$ *из* $\widetilde{\mathbf{C}}$*, совпадающее с* $\sigma(G,F)$*, когда* $0 \in \rho(G,F)$ *, и* $\widetilde{\sigma}(G,F) = \sigma(G,F) \cup \{\infty\}$ *в противном случае, назовем* расширенным спектром *упорядоченной пары* (G,F)*. Множество* $\widetilde{\rho}(G,F) = \widetilde{\mathbf{C}} \backslash \widetilde{\sigma}(G,F)$ *назовем* расширенным резольвентным множеством.

Пусть области определений $D(G)$, $D(F)$ удовлетворяют одному из условий (i) или (iii). Тогда операторнозначные функции
$R_l(\lambda;G,F) = R(\lambda;G,F)F$, $\lambda \in \rho(G,F)$, $R_r(\lambda;G,F) = FR(\lambda;G,F)$, $\lambda \in \rho(G,F)$, назовем соответственно *левой* и *правой резольвентой* упорядоченной пары операторов (G,F).

Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \in X$$

для линейного дифференциального уравнения

$$F\dot{x}(t) = Gx(t), \ \ t \in \mathbf{R}_+ = [0,+\infty),$$

с парой линейных замкнутых операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, при $KerF \neq \{0\}$.

В вопросах разрешимости и построения решений уравнения используется два подхода. Первый основан на спектральной теории упорядоченных пар линейных операторов. Второй базируется на использовании дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathcal{A}y(t), \, t \in \mathbf{R}_+, \, y(0) = y_0 \in D(\mathcal{A}),$$

где $\mathcal{A} \in LRC(X)$ и имеет вид $\mathcal{A} = F^{-1}G$.

Определение 4 *Линейные отношения* $\mathcal{A}_l = F^{-1}G \subset X \times X$*,* $\mathcal{A}_r = GF^{-1} \subset Y \times Y$ *назовем соответственно* левым и правым отношениями для упорядоченной пары (G,F).

Комплексификация упорядоченной пары линейных операторов

В этой главе символами X, Y, Z будем обозначать вещественные банаховы пространства.

Линейное пространство $X^2 = X \times X$ над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел с законом внешней композиции $(\alpha + i\beta)(x,y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $(x,y) \in X^2$, называется *комплексификацией* вещественного линейного пространства X и обозначается через $\mathbb{X}$ или через $ComplX$.

Далее символом $\mathbb{I}_X$ будем обозначать тождественный оператор в комплексификации $\mathbb{X}$ пространства X. Элементы из $\mathbb{X}$ удобно записывать в виде $x + iy$, где $x,y \in X$, i — мнимая единица. При этом X будем рассматривать в качестве подпространства $\mathbb{X}$. Норму в $\mathbb{X}$ определим равенством $\|(x,y)\| = \max\limits_{\psi \in [0,2\pi]} \|(\cos\psi)x + (\sin\psi)y\|$, $x,y \in X$. Символом $\mathbb{J}_X$ обозначим отображение $\mathbb{J}_X : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $\mathbb{J}_X(x+iy) = x - iy$, $x,y \in X$, которое является аддитивным, но не однородным. Ясно, что $\mathbb{J}_X^2 = \mathbb{I}_X$ и $\mathbb{J}_X^{-1} = \mathbb{J}_X$.

Лемма 1 *Для каждого линейного подпространства $\mathbb{X}_0$ из $\mathbb{X}$ его образ при отображении $\mathbb{J}_X$ является линейным подпространством в $\mathbb{X}$.*

Подпространство $\mathbb{X}_0$ из комплексификации $\mathbb{X}$ пространства X назовем *симметричным*, если выполнено условие $\mathbb{J}_X(\mathbb{X}_0) = \mathbb{X}_0$, или, что эквивалентно, для любого вектора $x+iy$ из $\mathbb{X}_0$ подпространству $\mathbb{X}_0$ принадлежит вектор $x - iy$.

Лемма 2 *Линейное подпространство $\mathbb{X}_0$ из $\mathbb{X}$ является комплексификацией некоторого подпространства X_0 из X тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}_0$ — симметричное подпространство из $\mathbb{X}$.*

Замечание 2 *Если $\mathbb{X}_0$ — симметричное подпространство из $\mathbb{X}$, то $\mathbb{X}_0$ является комплексификацией подпространства $X_0 = \mathbb{X}_0 \cap X$.*

Определение 5 *Пусть $A : D(A) \subset X \to Y$ — линейный оператор. Его* комплексификацией *назовем оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ с областью определения $D(\mathbb{A}) = Compl(D(A))$, определенный по правилу*

$$\mathbb{A}(x_1 + ix_2) = Ax_1 + iAx_2.$$

Лемма 3 *Линейный оператор $\mathbb{A} \in LO(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является комплексификацией некоторого линейного оператора $A \in LO(X, Y)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\mathbb{A} = \mathbb{J}_y \mathbb{A} \mathbb{J}_x \tag{1}$$

Следствие 1 *Пусть линейный оператор $\mathbb{A}$ из $LO(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является комплексификацией линейного оператора A из $LO(X, Y)$. Тогда выполняется равенство*

$$\mathbb{J}_Y \mathbb{A} = \mathbb{A} \mathbb{J}_X$$

Лемма 4 *Для любого линейного оператора A из $LO(X, Y)$ верны следующие равенства $Ker\mathbb{A} = Compl(KerA)$, $Im\mathbb{A} = Compl(ImA)$.*

Лемма 5 *Для любых линейных операторов A, B из $LO(X, Y)$, F из $LO(Y, Z)$ выполняются соотношения*

$$\begin{aligned}
&Compl(A + B) = \mathbb{A} + \mathbb{B},\\
&Compl(\alpha A) = \alpha \mathbb{A} \ \forall \alpha \in \mathbf{R},\\
&Compl(FA) = \mathbb{F}\mathbb{A};\\
&Compl(A^{-1}) = \mathbb{A}^{-1},
\end{aligned}$$

последнее равенство выполнено, если оператор A обратим.

Определение 6 *Пусть (G, F) — упорядоченная пара линейных операторов. Множество $\sigma(\mathbb{G}, \mathbb{F})$ назовем* комплексным спектром *упорядоченной пары, а множество $\widetilde{\sigma}(\mathbb{G}, \mathbb{F})$– ее* расширенным комплексным спектром. *Они обозначаются соответственно через $\sigma(G, F, \mathbf{C})$ и $\widetilde{\sigma}(G, F, \mathbf{C})$. Множества $\rho(G, F, \mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \sigma(G, F, \mathbf{C})$, $\widetilde{\rho}(G, F, \mathbf{C}) = \widetilde{\mathbf{C}} \setminus \widetilde{\sigma}(G, F, \mathbf{C})$ называются соответственно* комплексным резольвентным *и* расширенным комплексным резольвентным *множествами отношения A.*

Теорема 1 *Для упорядоченной пары (G, F) выполняются равенства*

(1) $\widetilde{\sigma}(G, F) = \widetilde{\sigma}(\mathbb{G}, \mathbb{F}) \cap \widetilde{\mathbf{R}}$;

(2) $\widetilde{\rho}(G, F) = \widetilde{\rho}(\mathbb{G}, \mathbb{F}) \cap \widetilde{\mathbf{R}}$.

Для любого множества $\Delta \subseteq \mathbf{C}$ через $\overline{\Delta}$ обозначим множество $\{\overline{\lambda} : \lambda \in \Delta\}$. Таким же символом $\overline{\Delta}$ традиционно обозначается замыкание множества, но в этой работе оно не используется. Если $\Delta = \overline{\Delta}$, то множество Δ будем называть *симметричным* относительно $\mathbf{R}$.

Лемма 6 *Спектр упорядоченной пары $(\mathbb{G}, \mathbb{F})$, где $\mathbb{G}, \mathbb{F}$ — комплексификации линейных операторов G, F соответственно, симметричен. Кроме того выполняются равенства*

(1) $\mathbb{G} - \overline{\lambda}\mathbb{F} = \mathbb{J}_Y(\mathbb{G} - \lambda\mathbb{F})\mathbb{J}_X$, $\lambda \in \mathbf{C}$,

(2) $R(\overline{\lambda}, \mathbb{G}, \mathbb{F}) = \mathbb{J}_X R(\lambda, \mathbb{G}, \mathbb{F})\mathbb{J}_Y$, $\lambda \in \rho(\mathbb{G}, \mathbb{F})$,

(3) $\mathbb{J}_X R_l(\lambda; \mathbb{G}, \mathbb{F})\mathbb{J}_X = R_l(\overline{\lambda}; \mathbb{G}, \mathbb{F})$,

(4) $\mathbb{J}_Y R_r(\lambda; \mathbb{G}, \mathbb{F})\mathbb{J}_Y = R_r(\overline{\lambda}; \mathbb{G}, \mathbb{F})$.

К спектральной теореме

Определение 7 *Упорядоченная пара подпространств (X_1, Y_1), где $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$, называется* инвариантной для пары (G, F), *если $GX_1 \subset Y_1$ и $FX_1 \subset Y_1$.*

Определение 8 *Пусть*

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad Y = Y_0 \oplus Y_1 \tag{2}$$

— прямые суммы замкнутых подпространств, причем (X_0, Y_0) и (X_1, Y_1) — инвариантные пары подпространств для (G, F).
Пусть $G_i, F_i : \mathcal{D}(G, F) \cap X_i = \mathcal{D}_i \to Y_i$, $i = 0, 1$, - сужения операторов G, F на X_i, $i = 0, 1$. Тогда будем использовать запись

$$(G, F) = (G_0, F_0) \oplus (G_1, F_1) \tag{3}$$

и говорить, что упорядоченная пара операторов (G, F) допускает представление 3 относительно разложений 2 пространств и является прямой суммой пар (G_0, F_0) *и* (G_1, F_1).

В дальнейшем будем считать выполненным условие *несингулярности* пары
(G, F):

Утверждение 3 *Для упорядоченной пары (G, F) множество $\rho(G, F)$ непусто.*

Кроме того, предположим, что области определения $D(G), D(F)$ удовлетворяют одному из условий (i) или (iii).

Доказательство следующей теоремы в случае, когда X, Y являются комплексными банаховыми пространствами, приведено в [1].

Теорема 2 *Пусть расширенный спектр $\tilde{\sigma}(G, F)$ упорядоченной пары (G, F) представим в виде*

$$\tilde{\sigma}(G, F) = \sigma_0 \cup \sigma_1,$$

где множество σ_0 компактно, σ_1 замкнуто и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$.

*Тогда существуют инвариантные для (G, F) пары подпространств (X_0, Y_0),
(X_1, Y_1) такие, что имеют место разложения 2, 3 и, кроме того,*

1. *проекторы $P_i \in EndX$, $Q_i \in EndY$, $i = 0, 1$, осуществляющие разложения (1) ($ImP_i = X_i$, $ImQ_i = Y_i$, $i = 0, 1$), определяются формулами*

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} R_l(\lambda; G, F) d\lambda,\ Q_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} R_r(\lambda; G, F) d\lambda,$$
$$P_1 = I - P_0,\ Q_1 = I - Q_0,$$

   где γ_0 — замкнутая жорданова кривая (или конечное число таких кривых), расположенная в $\rho(G, F)$ так, что внутри нее лежит σ_0, а вне — σ_1;

2. *$\tilde{\sigma}(G_0, F_0) = \sigma(G_0, F_0) = \sigma_0, \tilde{\sigma}(G_1, F_1) = \sigma_1$.*

Для получения вещественного аналога данной теоремы необходимо ответить на вопрос, когда проекторы Рисса определенные формулами $P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} R_l(\lambda; \mathbb{G}, \mathbb{F}) d\lambda$, $Q = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} R_r(\lambda; \mathbb{G}, \mathbb{F}) d\lambda$ являются комплексификацией некоторых проекторов P, Q.

Пусть спектр упорядоченной пары $(\mathbb{G}, \mathbb{F})$ удовлетворяет условию теоремы 2. Пусть γ – контур, являющийся образом непрерывно дифференцируемой функции $\varphi : L \to \mathbf{C}$ (допускается конечное число разрывов первого рода у φ'), расположенный в $\rho(\mathbb{G}, \mathbb{F})$ так, что внутри него лежит σ_0, а вне — σ_1; где L — некоторый промежуток из $\mathbf{R}$, либо совпадающий с отрезком вида $[-\Theta, \Theta]$, $\Theta \in \mathbf{R}_+$, либо $L = \mathbf{R}$ (тогда полагается $\Theta = \infty$). Дополнительно предположим, что $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$, $t \in L$.

Тогда справедлива следующая

Лемма 7 *Проекторы Рисса, определенные формулами*

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R_l(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F})d\lambda,\ Q = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R_r(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F})d\lambda,$$

являются комплексификацией некоторых проекторов P, Q.

Лемма 8 *Пусть $\mathbb{G},\mathbb{F} \in LO(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ — комплексификации некоторых линейных операторов $G, F \in LO(X,Y)$ и $\mathbb{X}_0,\mathbb{Y}_0$ — подпространства из $\mathbb{X},\mathbb{Y}$, являющиеся комплексификацией подпространств X_0 из X и Y_0 из Y. Тогда $(\mathbb{X}_0,\mathbb{Y}_0)$ — инвариантная пара подпространств для $(\mathbb{G},\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда (X_0,Y_0) — инвариантная пара для (G,F).*

Из лемм 8, 7 и теоремы 2 непосредственно следует следующая

Теорема 3 *Пусть расширенный комплексный спектр $\widetilde{\sigma}(G,F,\mathbf{C})$ допускает представление в виде $\widetilde{\sigma}(G,F,\mathbf{C}) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где σ_0 — компакт из $\mathbf{C}$, σ_1 - замкнутое множество из $\widetilde{C}$ и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$. Тогда проекторы $\mathbb{P} \in End\mathbb{X}$, $\mathbb{Q} \in End\mathbb{Y}$, построенные по спектральной компоненте σ_0, являются комплексификациями некоторых проекторов $P \in EndX$, $Q \in EndY$ соответственно тогда, когда $\overline{\sigma_0} = \sigma_0$.*

Если $\overline{\sigma_0} = \sigma_0$, то банаховы пространства X, Y допускают разложения вида 2 в прямую сумму инвариантных относительно упорядоченной пары (G,F) замкнутых подпространств $X_0 = ImP$, $Y_0 = ImQ$, $X_1 = KerP$, $Y_1 = KerQ$. Кроме того, для сужений операторов (G_i,F_i), $i = 0,1$, упорядоченной пары (G,F) верны следующие свойства:

1. $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 \oplus \mathbb{X}_1$, $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_0 \oplus \mathbb{Y}_1$;
2. $(\mathbb{G},\mathbb{F}) = (\mathbb{G}_0,\mathbb{F}_0) \oplus (\mathbb{G}_1,\mathbb{F}_1)$, *кроме того* $(G,F) = (G_0,F_0) \oplus (G_1,F_1)$;
3. $\tilde{\sigma}(\mathbb{G}_0,\mathbb{F}_0) = \sigma(\mathbb{G}_0,\mathbb{F}_0) = \sigma_0$, $\tilde{\sigma}(\mathbb{G}_1,\mathbb{F}_1) = \sigma_1$.

Для нахождения проекторов P и Q введем определение комплексной левой и комплексной правой резольвенты упорядоченной пары.

Определение 9 *Отображения*

$$\mathbb{R}_l(\cdot,\cdot;G,F) : \mathbf{C} \times \rho(G,F,\mathbf{C}) \to EndX,$$
$$\mathbb{R}_r(\cdot,\cdot;G,F) : \mathbf{C} \times \rho(G,F,\mathbf{C}) \to EndY,$$

где $\mathbb{R}_l(\mu,\lambda;G,F)$, $\mathbb{R}_r(\mu,\lambda;G,F)$ — операторы, комплексификацией которых являются операторы из $End\mathbb{X}$, $End\mathbb{Y}$ вида

$$\tfrac{1}{2}(\mu R_l(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F}) + \overline{\mu}R_l(\overline{\lambda};\mathbb{G},\mathbb{F})),\ \ \tfrac{1}{2}(\mu R_r(\lambda;\mathbb{G},\mathbb{F}) + \overline{\mu}R_r(\overline{\lambda};\mathbb{G},\mathbb{F})),$$

будем называть соответственно комплексной левой и комплексной правой резольвентой *упорядоченной пары (G,F).*

Корректность этого определения следует из лемм 3 и 6. Используя его, мы можем найти вид проекторов P и Q.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть γ_0 — контур, являющийся образом непрерывно дифференцируемой функции $\varphi : L \to \mathbf{C}$, где L— некоторый промежуток из $\mathbf{R}$, либо совпадающий с отрезком вида $[-\Theta, \Theta]$, $\Theta \in \mathbf{R}_+$, либо $L = \mathbf{R}$, кроме того предположим, что $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$, $t \in L$. Тогда проекторы P и Q имеют вид*

$$P = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\Theta \mathbb{R}_l(i\varphi'(t), \varphi(t); G, F)dt,$$
$$Q = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\Theta \mathbb{R}_r(i\varphi'(t), \varphi(t); G, F)dt$$

Литература

[1] Баскаков А. Г. Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов/ А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов// Математ. сборник — Воронеж, 2002. — Т. 371, № 11 — С. 3—42.

[2] Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces. Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks/ A. Favini, A. Yagi — New York: M. Dekker, 1998.

[3] Баскаков А. Г. К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах/ А. Г. Баскаков, А. С. Загорский// Матем. заметки — 2007. — Т. 81, № 1. — С. 17—31.

Редькина Т.В., Карюк А.И., Лушникова Г.А.

Нелинейные уравнения, имеющие коммутационное представление линейных операторов

I. Коммутационное представление в виде уравнения нулевой кривизны.

Рассмотрим операторное уравнение нулевой кривизны

$$L_t - A_x + [L, A] = 0, \tag{1.1}$$

являющееся условием совместности системы уравнений $\varphi_x = L\varphi$, $\varphi_t = A\varphi$. В качестве первого равенства рассмотрим соотношение

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \lambda & p_1 \\ p_2 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где λ - произвольный параметр не зависящий от , t, $p_j(x,t)$- некоторые функции $j = 1, 2$. Пусть имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} U & V \\ W & -U \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

тогда (1.1) перепишется в виде системы уравнений

$$\begin{array}{l} U_x = p_1 W - p_2 V, \\ p_{1t} - V_x + 2\lambda V - 2p_1 U = 0, \\ p_{2t} - W_x - 2\lambda W + 2p_2 U = 0. \end{array} \tag{1.4}$$

Второе и третье равенства содержат параметр λ, для того чтобы полученные уравнения не содержали произвольных параметров, представим V, W, U в виде многочлена разложенного по возрастающим степеням λ, начиная с λ^{-1}

$$V = \frac{1}{\lambda} v_0(x,t) + \sum_{j=0}^{n} \lambda^j v_{j+1}(x,t), \quad W = \frac{1}{\lambda} w_0(x,t) + \sum_{j=0}^{n} \lambda^j w_{j+1}(x,t),$$

$$U = \frac{1}{\lambda} u_0(x,t) + \sum_{j=0}^{n} \lambda^j u_{j+1}(x,t). \tag{1.5}$$

Выполним подстановку в систему (1.4) и распишем систему по степеням параметра λ:

$$\lambda^{-1}: \quad \begin{cases} u_{0x} = p_1 w_0 - p_2 v_0, \\ v_{0x} + 2p_1 u_0 = 0, \\ w_{0x} + 2p_2 u_0 = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\lambda^0: \quad \begin{cases} u_{1x} = p_1 w_1 - p_2 v_1, \\ p_{1t} - v_{1x} + 2v_0 - 2p_1 u_1 = 0, \\ p_{2t} - w_{1x} - 2w_0 + 2p_2 u_1 = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\cdots$$

$$\lambda^j: \quad \begin{cases} u_{(j+1)x} = p_1 w_{j+1} - p_2 v_{j+1}, \\ v_{(j+1)x} - 2v_j + 2p_1 u_{j+1} = 0, \\ w_{(j+1)x} + 2w_j - 2p_2 u_{j+1} = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\cdots$$

$$\lambda^{n+1}: \quad \begin{cases} v_{n+1} = 0, \\ w_{n+1} = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

а). Рассмотрим частный случай когда в разложении (1.5) присутствует одно слагаемое и $V = \frac{1}{\lambda} v_0(x,t)$, $W = \frac{1}{\lambda} w_0(x,t)$, $U = \frac{1}{\lambda} u_0(x,t)$, при этом система (1.6 – 9) сводится к пяти уравнениям из которых определяются $v_0 = -\frac{1}{2} p_{1t}$, $\quad w_0 = \frac{1}{2} p_{2t}$, $u_0 = \frac{1}{8}\left(\frac{p_{1xt}}{p_1} - \frac{p_{2xt}}{p_2}\right)$ и система двух уравнений, связывающих функции $p_j(x,t)$:

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{p_{1xt}}{p_1}\right)_x = (p_1 p_2)_t, \\ p_1 p_{2xt} + p_2 p_{1xt} = 0. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Легко заметить, что полученная система инвариантна относительно преобразования $x \to -x$. Если положить, что $p_1 = f(x,t)$, а $p_2 = f(-x,t)$, $p_{1x} = f_x(x,t)$, $p_{2x} = -f_x(-x,t)$, то система (1.10) примет вид

$$\begin{gathered} \left(\tfrac{f_{xt}(x,t)}{f(x,t)}\right)_x = 2\left[f(-x,t) f(x,t)\right]_t, \\ f_{xt}(-x,t) f(x,t) = f_{xt}(x,t) f(-x,t). \end{gathered} \tag{1.11}$$

В результате проведенных исследований доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Система уравнений (1.11) имеет операторное представление в виде уравнения нулевой кривизны $L_t - A_x + [L, A] = 0$ с операторами L и A в виде*

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & f(x,t) \\ f(-x,t) & -\lambda \end{pmatrix}, \quad A = \tfrac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} U & -f_t(x,t) \\ f_t(-x,t) & -U \end{pmatrix}, \quad \text{где}\, U = \tfrac{f_{xt}(x,t)}{2f(x,t)}.$$

б). Пусть в разложениях V, W (1.5) имеют вид $V = \frac{1}{\lambda} v_0(x,t)$, $W = \frac{1}{\lambda} w_0(x,t)$, а $U = \frac{1}{\lambda} u_0(x,t) + k$, где k – функция только переменной t или параметр, при этом из системы (1.6 – 9) определяются $v_0 = kp_1 - \frac{1}{2} p_{1t}$, $\quad w_0 = \frac{1}{2} p_{2t} + kp_2$, $u_0 = (\ln p_1)_x \left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_t - \frac{k}{2}\right)$, оставшиеся равенства примут вид уравнений, связывающих функции $p_j(x,t)$:

$$\begin{gathered} \left(\tfrac{p_{1xt}}{2p_1} - k\tfrac{p_{1x}}{p_1}\right)_x = (p_1 p_2)_t, \\ p_1 p_{2xt} + p_2 p_{1xt} + 2k(p_1 p_{2x} - p_2 p_{1x}) = 0. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Доказана

ТЕОРЕМА 2. *Система уравнений (1.12) имеет операторное представление в виде уравнения нулевой кривизны $L_t - A_x + [L, A] = 0$ с операторами L и A в виде*

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & p_1(x,t) \\ p_2(x,t) & -\lambda \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} (\ln p_1)_x\left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_t - \frac{k}{2}\right) & kp_1 - \frac{1}{2}p_{1t} \\ \frac{1}{2}p_{2t} + kp_2 & -(\ln p_1)_x\left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_t - \frac{k}{2}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$$

в). Боле общий случай, когда в разложении (1.5) V, W имеет вид $V = \frac{1}{\lambda}v_0(x,t) + v_1(x,t)$, $W = \frac{1}{\lambda}w_0(x,t) + w_1(x,t)$, а $U = \frac{1}{\lambda}u_0(x,t) + u_1(x,t) + k(t)\lambda$, где k – произвольная функция переменной t, при этом (1.6 – 9) сводится к системе

$$\begin{array}{ll} u_{0x} = p_1w_0 - p_2v_0, & u_{1x} = p_1w_1 - p_2v_1, \\ v_{0x} + 2p_1u_0 = 0, & w_{0x} + 2p_2u_0 = 0, \\ -v_1 + kp_1 = 0, & w_1 - kp_2 = 0 \\ \quad p_{1t} - v_{1x} + 2v_0 - 2p_1u_1 = 0, & \\ \quad p_{2t} - w_{1x} - 2w_0 + 2p_2u_1 = 0 & \end{array} \tag{1.13}$$

Функции v_0, w_0, u_0, v_1, w_1, u_1 определяются как:

$$u_1 = \psi(t), \quad v_0 = \psi p_1 - \frac{1}{2}p_{1t} + \frac{k}{2}p_{1x}, \quad w_0 = \frac{1}{2}p_{2t} - \frac{k}{2}p_{2x} + \psi p_2,$$

$$u_0 = (\ln p_1)_x\left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_t - \frac{k}{4}(\ln p_{1x})_x - \frac{\psi}{2}\right), \quad v_1 = kp_1, \quad w_1 = kp_2, \tag{1.14}$$

а система, связывает только функции p_1, p_2:

$$\begin{array}{l} \left[(\ln p_1)_x\left(\frac{1}{2}(\ln p_{1x})_z - \psi\right)\right]_x = (p_1p_2)_z, \\ p_2\left(\psi p_{1x} - \frac{1}{2}p_{1xz}\right) - p_1\left(\psi p_{2x} + \frac{1}{2}p_{2xz}\right) = 0, \end{array} \tag{1.15}$$

где для компактности записи введено обозначение $\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}$.

ТЕОРЕМА 3. *Система уравнений (1.15) имеет операторное представление в виде уравнения нулевой кривизны $L_t - A_x + [L, A] = 0$ с операторами L и A в виде*

$$L = \begin{pmatrix} \lambda & p_1(x,t) \\ p_2(x,t) & -\lambda \end{pmatrix},$$
$$A = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} (\ln p_1)_x\left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_z - \frac{\psi(t)}{2}\right) & \psi(t)p_1 - \frac{1}{2}p_{1z} \\ \frac{1}{2}p_{2z} + \psi(t)p_2 & -(\ln p_1)_x\left(\frac{1}{4}(\ln p_{1x})_z - \frac{\psi(t)}{2}\right) \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \psi(t) & k(t)p_1 \\ k(t)p_2 & -\psi(t) \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} k(t) & 0 \\ 0 & -k(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x}.$$

Система (1.15) при замене $z \to t$, $\psi \to k$ эквивалентна системе (1.13).

II Коммутационное представление в виде уравнения Лакса.

Большинство известных солитонных уравнений описывают поведение функций, зависящих от двух пространственно – временных переменных. Попытка распространить солитонную теорию на 2+1, 3+1 – мерную ситуацию не привела к заметным успехам. Но интересные результаты можно получить если оператор L параметрически зависит от дополнительных переменных, дифференцирование по которым входит в оператор , но не входят в оператор L. Если рассматривать класс функций, зависящих от трех и более переменных, а оператор L задает дифференцирование только по переменной .

Продемонстрируем возможность построения двух уравнений обладающих одной и той же задачей на собственные значения. Будем рассматривать операторы L и A, параметрически зависящие от t, и образующие пару Лакса

$$L_t = [L, A], \tag{2.1}$$

при этом коммутатор $[L, A] = LA - AL$ и производная $\frac{\partial L}{\partial t}$ являются операторами умножения на некоторые функции. Уравнение Лакса является условием совместности пары линейных уравнений

$$L\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi_t = -A\varphi, \tag{2.2}$$

где λ - произвольный параметр, φ - функция независимых переменных , t.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнение*

$$v_x = \frac{\beta}{2\alpha k}(\ln u)_{tx} + \frac{a}{2\alpha^2}\left[u_t + (\alpha k + \beta)u_x\right] + \left(\beta + \frac{\beta^2}{2\alpha k}\right)(\ln u)_{xx}$$

обладает парой Лакса с операторами L и A вида

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2k}(\ln u)_x & u \\ \frac{a}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha k} + 1\right)(\ln u)_x + \left(\frac{}{2\alpha}\right)^2 u & -\left(\alpha + \frac{\beta}{2k}\right)(\ln u)_x \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha k + \beta & 0 \\ ak & \beta \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} v & ku \\ k\left(\frac{}{2\alpha}\right)^2 u - \frac{}{2\alpha}(\ln u)_t & v + (\ln u)_t \end{pmatrix},$$

где $v(x, t)$ - произвольная функция.

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда операторное уравнения Лакса (2.1) с маточными коэффициентами 2×2

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix},$$

удовлетворяет дополнительным условиям

$$\begin{gathered} \alpha_{11} = -\alpha_{22} = \alpha, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{21} = a \neq 0, \\ \beta_{12} = 0, \quad \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} = k, \quad 2\alpha_{11}k = \beta_{11} - \beta_{22}, \\ \beta_{22} = \beta, \quad v_{12} = ku_{12}, \\ v_{21} = ku_{21} + \frac{a}{2\alpha}\left(v_{11} - v_{22} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right), \end{gathered} \tag{2.3}$$

где k- коэффициент пропорциональности. Учитывая ограничения, получим операторы:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha k + \beta & 0 \\ ak & \beta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} v_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} + \frac{a}{2\alpha}\left(v_{11} - v_{22} + k\left(u_{22} - u_{11}\right)\right) & v_{22} \end{pmatrix}.$$

Выведем уравнение в частных производных, эквивалентное операторному уравнению Лакса. Для этого предварительно найдем элементы матричного уравнения L_t=$[L, A]$, используя обозначение $(\alpha k + \beta)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}$ и принимая условие $u_{12} \neq 0$:

$$\alpha(v_{11} - ku_{11})_x + \frac{a}{2\alpha} u_{12}(v_{11} - ku_{11} - v_{22} + ku_{22}) = u_{11z}, \tag{2.4}$$

$$k(u_{11} - u_{22}) - v_{11} + v_{22} = (\alpha k + \beta)(\ln u_{12})_x + (\ln u_{12})_t, \tag{2.5}$$

$$\frac{a}{2}(v_{11} - k(u_{11} + u_{22}) + v_{22})_x + \left(u_{21} + \frac{a}{2\alpha}(u_{22} - u_{11})\right)(v_{11} - k(u_{11} - u_{22}) - v_{22}) = u_{21z}, \tag{2.6}$$

$$\alpha(v_{22} - ku_{22})_x + \frac{a}{2\alpha} u_{12}(v_{11} - ku_{11} - v_{22} + ku_{22}) = -u_{22z} \tag{2.7}$$

С учетом равенства (2.5) определим дополнительные условия так чтобы

$$v_{22} = v_{11} + (\ln u_{12})_t, \tag{2.8}$$

$$u_{11} = u_{22} + \left(\alpha + \frac{\beta}{k}\right)(\ln u_{12})_x. \tag{2.9}$$

Подставим найденные значения в оставшуюся систему (2.3-6)

$$\alpha\left(v_{11} - ku_{22} - (\alpha k + \beta)(\ln u_{12})_x\right)_x - \frac{a}{2\alpha} u_{12z} = u_{22z} + \left(\alpha + \frac{\beta}{k}\right)(\ln u_{12})_{xz}, \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} \tfrac{a}{2}\left[2v_{11} - 2ku_{22} + (\ln u_{12})_t - (\alpha k + \beta)(\ln u_{12})_x\right]_x - \\ - \left(u_{21} - \left(\tfrac{a}{2} + \tfrac{\beta a}{2\alpha k}\right)(\ln u_{12})_x\right)(\ln u_{12})_z = u_{21z}, \end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\alpha(v_{11x} + (\ln u_{12})_{tx} - ku_{22}) - \frac{a}{2\alpha} u_{12z} = -u_{22z}. \tag{2.12}$$

Найдем разность (2.10) и (2.12):

$$u_{22z} = -\left(\alpha + \frac{\beta}{2k}\right)(\ln u_{12})_{xz}, \text{ или } u_{22} = -\left(\alpha + \frac{\beta}{2k}\right)(\ln u_{12})_x,$$

при этом функция u_{11} примет вид $u_{11} = \frac{\beta}{2k}(\ln u_{12})_x$.

Функцию u_{21} можно найти в явном виде, для этого найдем сумму (2.10) и (2.12)

$$\alpha\left(2v_{11} - 2ku_{22} + (\ln u_{12})_t - (\alpha k + \beta)(\ln u_{12})_x\right)_x - \frac{a}{\alpha} u_{12z} = \left(\alpha + \frac{\beta}{k}\right)(\ln u_{12})_{xz},$$

выразим $(2v_{11}-2ku_{22})_x$ и подставим в (2.11)

$$(2v_{11}-2ku_{22})_x=\tfrac{a}{\alpha^2}u_{12z}+\left(1+\tfrac{\beta}{k\alpha}\right)(\ln u_{12})_{xz}-(\ln u_{12})_{xt}+(\alpha k+\beta)(\ln u_{12})_{xx},$$
$$\tfrac{a}{2}\left(\tfrac{\beta}{\alpha k}+1\right)(\ln u_{12})_{xz}+\tfrac{2}{2\alpha^2}u_{12z}-\left(u_{21}-\left(\tfrac{a}{2}+\tfrac{\beta a}{2\alpha k}\right)(\ln u_{12})_x\right)(\ln u_{12})_z=u_{21z}. \tag{2.13}$$

Приведение подобных слагаемых и умножение на u_{12} позволяет выделить полную производную

$$\frac{a}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha k}+1\right)(\ln u_{12})_{xz}u_{12}+\frac{2}{2\alpha^2}u_{12z}u_{12}-\left(u_{21}-\left(\frac{a}{2}+\frac{\beta a}{2\alpha k}\right)(\ln u_{12})_x\right)u_{12z}=u_{12}u_{21z},$$

$$\frac{a}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha k}+1\right)[(\ln u_{12})_x u_{12}]_z+\left(\frac{a}{2\alpha}\right)^2(u_{12}^2)_z=(u_{12}u_{21})_z,$$

выполнив интегрирование по z, найдем

$$u_{21}=\frac{a}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha k}+1\right)(\ln u_{12})_x+\left(\frac{a}{2\alpha}\right)^2u_{12}. \tag{2.14}$$

В результате остается одно уравнение, связывающее две функции $u_{12}=u$ и $v_{11}=v$

$$v_x=\frac{\beta}{2\alpha k}(\ln u)_{tx}+\frac{a}{2\alpha^2}u_z+\left(\beta+\frac{\beta^2}{2\alpha k}\right)(\ln u)_{xx}, \tag{2.15}$$

где $(\alpha k+\beta)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}$, v - произвольная функция. Операторы Лакса, порождающие уравнение (2.14) будут такими как указано в условии теоремы.

Получим 2+1 –мерное дифференциальное уравнение в частных производных из операторного уравнения Лакса (2.1)

ТЕОРЕМА 2. *Уравнение*

$$\alpha v_x+\frac{\alpha^2k}{2}(\ln u)_{xx}-\frac{\gamma^2}{2k}(\ln u)_{yy}=\frac{a}{2\alpha}(u_z+\gamma u_y)+\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_{yz}-\frac{\alpha}{2}(\ln u)_{xz} \tag{2.16}$$

обладает парой Лакса с операторами L и A вида

$$L=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ a & -\alpha\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y-\frac{\alpha}{2}(\ln u)_x & u\\ \frac{a^2}{4\alpha^2}u+\frac{\gamma a}{2\alpha k}(\ln u)_y & -\frac{\gamma}{2k}(\ln u)_y-\frac{\alpha}{2}(\ln u)_x\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}2\alpha k+\beta & 0\\ ak & \beta\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}+\begin{pmatrix}v & ku\\ ku-\frac{a}{2\alpha}((\ln u)_z+\gamma(\ln u)_y) & v+(\ln u)_z\end{pmatrix}$$

где $(\alpha k+\beta)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}$, *$v(x,t)$ - произвольная функция.*

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда оператор L не содержит дифференцирования по и имеет ту же структуру, используемую в первой теореме

$$L=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ a & -\alpha\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2\alpha k+\beta & 0 \\ ak & \beta \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}+\begin{pmatrix} v_{11} & ku_{12} \\ ku_{12}+\frac{a}{2\alpha}(v_{11}-v_{22}+k(u_{22}-u_{11})) & v_{22} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

где $\alpha,\ a,\ \beta,\ \gamma,\ k$ –произвольные постоянные, v_{ij}, u_{ij} – произвольные функции трех переменных $x,\ y$ и t. Такой выбор операторов обуславливает равенство нулю коэффициентов при дифференциалах $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial}$.

Выведем уравнение в частных производных, эквивалентное операторному уравнению Лакса. Для этого найдем элементы матричного уравнения $L_t{=}[L, A]$, используя обозначение $(\alpha k+\beta)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}$ и принимая во внимание условие $u_{12}\neq 0$:

$$\alpha(v_{22}-ku_{11})_x-\gamma u_{11y}=-\frac{\alpha}{2\alpha}(v_{11}-ku_{11}-v_{22}+ku_{22})+u_{11z} \tag{2.19}$$

$$v_{22}+ku_{11}-v_{11}-ku_{22}=\gamma(lnu_{12})_y+(lnu_{12})_z \tag{2.20}$$

$$\frac{\alpha}{2}(v_{22}+v_{11}-ku_{11}-ku_{22})_x-\gamma u_{21y}+[u_{21}+\frac{\alpha}{2\alpha}(u_{22}-u_{11})](v_{11}-ku_{11}-v_{22}+ku_{22})=u_{21z} \tag{2.21}$$

$$\alpha(v_{22}-ku_{22})_x+\gamma u_{22}+\frac{a}{2}u_{12}(v_{11}-ku_{11}-v_{22}+ku_{22})=-u_{22z} \tag{2.22}$$

С учетом равенства (2.20) определим дополнительные условия так чтобы

$$v_{22}=v_{11}+(\ln u_{12})_z, \tag{2.23}$$

$$u_{11}=u_{22}+\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y. \tag{2.24}$$

Подставим найденные значения в оставшуюся систему (2.19-22)

$$\begin{gathered}\alpha(v_{11x}-ku_{22x}-\gamma(lnu_{12})_{xy})-\gamma u_{22y}-\tfrac{\gamma^2}{k}(lnu_{12})_{yy}= \\ =\tfrac{\alpha}{2\alpha}(u_{12z}+\gamma u_{12y})+u_{22z}+\tfrac{\gamma}{k}(lnu_{12})_{yz}\end{gathered} \tag{2.25}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{\alpha}{2}(2v_{11}-2ku_{22}+(lnu_{12})_z-\gamma(lnu_{12})_y)_x-\gamma u_{21y}- \\ -[u_{21}-\tfrac{\alpha\gamma}{2\alpha k}(lnu_{12})_y][(lnu_{12})_z+\gamma(lnu_{12})_y]=u_{21z}\end{gathered} \tag{2.26}$$

$$\alpha(v_{11x}+(\ln u_{12})_{xz}-ku_{22x})+\gamma u_{22}-\frac{a}{2\alpha}(u_{12z}+\gamma u_{12y})=-u_{22z} \tag{2.27}$$

Найдем разность (2.25) и (2.27):

$$-\alpha\gamma(lnu_{12})_{xy}-2\gamma u_{22y}-\frac{\gamma^2}{k}(lnu_{12})_{yy}-\alpha(lnu_{12})_{xz}=2u_{22z}+\frac{\gamma}{k}(lnu_{12})_{yz}$$

или $\gamma\left[\alpha(\ln u_{12})_x+2u_{22}+\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y\right]_y+\left[\alpha(\ln u_{12})_x+2u_{22}+\frac{\gamma}{k}(\ln u_{12})_y\right]_z=0$, что позволяет определить функцию u_{22}

$$u_{22}=-\frac{\gamma}{2k}(\ln u_{12})_y-\frac{\alpha}{2}(\ln u_{12})_x. \tag{2.28}$$

Выразим $v_{11x} - ku_{22}$ из (2.27)

$$v_{11x} - ku_{22} = \frac{a}{2\alpha^2}(u_{12z} + \gamma u_{12y}) - \frac{1}{\alpha}u_{22z} - (\ln u_{12})_{xz} - \frac{\gamma}{\alpha}u_{22}. \qquad (2.29)$$

и выполним подстановку найденной функции (2.28)

$$v_{11x} - ku_{22} = \tfrac{a}{2\alpha^2}(u_{12z} + \gamma u_{12y}) + \tfrac{\gamma}{2\alpha k}(\ln u_{12})_{yz} - \tfrac{1}{2}(\ln u_{12})_{xz} + \\ + \tfrac{\gamma^2}{2\alpha k}(\ln u_{12})_{yy} + \tfrac{\gamma}{2}(\ln u_{12})_{xy}.$$

Найденное соотношение (2.29) подставим в (2.26)

$$\tfrac{a^2}{2\alpha^2}(u_{12z} + \gamma u_{12y}) + \tfrac{\gamma a}{2\alpha k}(\ln u_{12})_{yz} + \tfrac{\gamma^2 a}{2\alpha k}(\ln u_{12})_{yy} - \\ -\gamma u_{21} - \left[u_{21} - \tfrac{a\gamma}{2\alpha k}(\ln u_{12})_y\right]\left[(\ln u_{12})_z + \gamma(\ln u_{12})_y\right] = u_{21z}$$

и умножим все члены на u_{12}

$$\tfrac{a^2}{2\alpha^2}u_{12}(u_{12z} + \gamma u_{12y}) + \tfrac{\gamma a}{2\alpha k}u_{12}(\ln u_{12})_{yz} + \tfrac{\gamma^2 a}{2\alpha k}u_{12}(\ln u_{12})_{yy} - \gamma u_{12}u_{21} - \\ -u_{21}(u_{21z} + \gamma u_{21y}) + \tfrac{a\gamma}{2\alpha k}(\ln u_{12})_y(u_{21z} + \gamma u_{21y}) = u_{12}u_{21z},$$

тогда выделяя полные производные, имеем

$$\frac{a^2}{4\alpha^2}\left[\left(u_{12}^2\right)_z + \gamma\left(u_{12}^2\right)_y\right] + \frac{\gamma a}{2\alpha k}\left[u_{12}(\ln u_{12})_y\right]_z + \frac{\gamma^2 a}{2\alpha k}\left[u_{12}(\ln u_1\right.$$

или

$$\left[\frac{a^2}{4\alpha^2}u_{12}^2 + \frac{\gamma a}{2\alpha k}u_{12}(\ln u_{12})_y - u_{12}u_{21}\right]_z + \gamma\left[\frac{a^2}{4\alpha^2}u_{12}^2 + \frac{\gamma a}{2\alpha k}u_{12}(\ln u_{12})_y - u_{12}u_{21}\right]_y = 0,$$

в результате можно найти функцию u_{21}

$$u_{21} = \frac{a^2}{4\alpha^2}u_{12} + \frac{\gamma a}{2\alpha k}(\ln u_{12})_y. \qquad (2.30)$$

И так, в ходе преобразований системы (2.25-27) из (2.26) найдена функция u_{21}, а из (2.27) - u_{22}, поэтому осталось единственное уравнение (2.25), связывающее две функции $u_{12} =$ и $v_{11} = v$

$$\alpha v_x + \frac{\alpha^2 k}{2}(\ln u)_{xx} - \frac{\gamma^2}{2k}(\ln u)_{yy} = \frac{a}{2\alpha}(u_z + \gamma u_y) + \frac{\gamma}{2k}(\ln u)_{yz} - \frac{\alpha}{2}(\ln u)_{xz}, \quad (2.31)$$

где $(\alpha k + \beta)\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}$.

Полученное уравнение в частных производных имеет вид локального закона сохранения, при этом функция v является произвольной и может описывать некоторое возмущение уравнения. При подстановке в (2.17), (2.18) найденные значения v_{22}, u_{11}, u_{21}, u_{22} из равенств (2.23), (2.24), (2.30), (2.28) получим операторы Лакса указанные в теореме 2.

Уравнения (1.15) и (2.31) имеют общей оператор рассеяния L, а, следовательно, уравнения на собственные значения совпадают формально, но при этом собственное значение оператора L в одном случае являются постоянными, а во втором представляют собой некоторые функции, зависящие от дополнительной переменной .

III Интегрируемость 2+1 - мерного солитонного уравнения.

ТЕОРЕМА 1. *Уравнение (2.31), при $k > 0, \alpha,\ \gamma,\ a \in R$ сводится к параболическому квазилинейному уравнению вида*

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2} e^v (\gamma v_\eta + v_\zeta) \tag{3.1}$$

$u(x,t,z) = e^v$, $v = v(\xi,\eta,\zeta)$, $\xi = \pm\frac{\gamma}{\alpha k}x, \eta = y, \zeta = -\frac{1}{\alpha k}x - \frac{1}{\gamma}y + 2z.$

Доказательство. ***1. Использование квадратичных форм.*** Сделаем в уравнении (2.31) подстановку $\ln u = v(x,y,z)$.

$$\frac{\alpha^2 k}{2} v_{xx} - \frac{\gamma^2}{2k} v_{yy} - \frac{\gamma}{2k} v_{yz} + \frac{\alpha}{2} v_{xz} = \frac{a}{2\alpha} e^v (v_z + \gamma v_y). \tag{3.2}$$

Приведение уравнения к каноническому виду с помощью квадратичных форм. Рассмотрим левую часть уравнения (3.2). Ей соответствует квадратичная форма вида

$$Q = \frac{\alpha^2 k}{2}\lambda_1^2 - \frac{\chi^2}{2k}\lambda_2^2 - \frac{\chi}{2k}\lambda_2\lambda_3 + \frac{\alpha}{2}\lambda_1\lambda_3 \tag{3.3}$$

Методом Лагранжа приведем квадратичную форму (3.3) к каноническому виду $Q = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$, где

$$\mu_1 = m_1\lambda_1 + n_1\lambda_2 + p_1\lambda_3, \quad \mu_2 = m_2\lambda_1 + n_2\lambda_2 + p_2\lambda_3, \quad \mu_3 = p_3\lambda_3,$$

тогда

$$Q = (m_1\lambda_1 + p_1\lambda_3)^2 - (n_2\lambda_2 + p_2\lambda_3)^2 - p_3^2\lambda_3^2 \tag{3.4}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим:

$$Q = m_1^2\lambda_1^2 - n_2^2\lambda_2^2 - 2n_2p_2\lambda_2\lambda_3 + 2m_1p_1\lambda_1\lambda_3 - (p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)\lambda_3^2 \tag{3.5}$$

Для того чтобы квадратичная форма (3.5) имела такую же структуру, как и левая часть уравнения (3.2), необходимо, чтобы соблюдалось условие $p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0$, или $p_3^2 = p_1^2 - p_2^2$, тогда (3.4) перепишется в виде

$$Q = (m_1\lambda_1 + p_1\lambda_3)^2 - (n_2\lambda_2 + p_2\lambda_3)^2 - (p_1^2 - p_2^2)\lambda_3^2 \tag{3.6}$$

Раскрыв скобки и выполнив элементарные преобразования, получим

$$Q = m_1^2\lambda_1^2 - n_2^2\lambda_2^2 - 2n_2p_2\lambda_2\lambda_3 + 2m_1p_1\lambda_1\lambda_3 \tag{3.7}$$

Сравнивая коэффициенты при λ_1, λ_2, λ_3 с коэффициентами в формулах (3.3) и (3.7), получим систему:

$$2n_2p_2 = \frac{\gamma}{2k}, \quad m_1^2 = \frac{\alpha^2 k}{2}, \quad 2m_1p_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad n_2^2 = \frac{\gamma^2}{2k}, \tag{3.8}$$

откуда находим $m_1 = \frac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$, $n_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{2k}}$, $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}$, $p_2 = \frac{\sqrt{2k}}{4k}$, $p_1^2 - p_2^2 = 0$, а равенство (3.4) принимает вид

$$Q = \left(\frac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}\lambda_3\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2k}}\lambda_2 + \frac{\sqrt{2k}}{4k}\lambda_3\right)^2. \tag{3.9}$$

Для построения матрицы невырожденного аффинного преобразования необходимо выразить $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3$ через $\mu_1, \ \mu_2, \ \mu_3$, но так как имеется только два соотношения вида: $\mu_1 = \frac{\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k}}\lambda_3$, $\mu_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{2k}}\lambda_2 + \frac{\sqrt{2k}}{4k}\lambda_3$, что не позволяет выразить λ_i через μ_j. Исследование показало, что квадратичная форма Q имеет вырожденный вид (квадратичная форма от трех переменных сводится к разности двух, а не трех полных квадратов).

2. Приведение уравнения к каноническому виду с помощью специальной замены. Проведем замену так, чтобы смешанные производные уничтожились. Так как в исследуемом уравнении отсутствует смешанная производная v_{xy}, то предположим, что две переменные не зависят от z, а третья зависит от всех трех переменных исходного уравнения, новые переменные будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \xi &= px, \\ \eta &= by, \\ \zeta &= cx + dy + mz, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\{p, \ b, \ c, \ d, \ m\} \in R$. Определим частные производные новых переменных по старым, тогда

$$\begin{aligned} &\xi_x = p, \quad \eta_x = 0, \quad \zeta_x = c, \\ &\xi_y = 0, \quad \eta_y = b, \quad \zeta_y = d, \\ &\xi_z = 0, \quad \eta_z = 0, \quad \zeta_z = m. \end{aligned}$$

Частные производные от неизвестной функции будут иметь вид.

$$\begin{gathered} v_y = bv_\eta + dv_\zeta, \quad v_z = mv_\zeta, \\ v_{xx} = p^2 v_{\xi\xi} + c^2 v_{\zeta\zeta} + 2pcv_{\xi\zeta}, \quad v_{yy} = b^2 v_{\eta\eta} + d^2 v_{\zeta\zeta} + 2bdv_{\eta\zeta}, \\ v_{yz} = dmv_{\zeta\zeta} + bmv_{\eta\zeta}, \quad v_{xz} = cmv_{\zeta\zeta} + pmv_{\xi\zeta} \end{gathered} \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в (3.2), получим:

$$\frac{\alpha^2 k}{2}\left[p^2 v_{\xi\xi} + c^2 v_{\zeta\zeta} + 2pcv_{\xi\zeta}\right] - \frac{\gamma^2}{2k}\left[b^2 v_{\eta\eta} + d^2 v_{\zeta\zeta} + 2bdv_{\eta\zeta}\right] - \frac{\gamma}{2k}\left[dmv_{\zeta\zeta} + bmv_{\eta\zeta}\right] +$$
$$+\frac{\alpha}{2}\left[cmv_{\zeta\zeta} + amv_{\xi\zeta}\right] = \frac{a}{2\alpha}e^v(mv_\zeta + \gamma[bv_\eta + dv_\zeta])$$

Выполнив группировку элементов со старшими производными, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\alpha^2 k}{2}p^2 v_{\xi\xi} + \left[\tfrac{\alpha^2 k}{2}c^2 - \tfrac{\gamma^2}{2k}d^2 - \tfrac{\gamma}{2k}dm + \tfrac{\alpha}{2}cm\right] v_{\zeta\zeta} + \left[2\tfrac{\alpha^2 k}{2}pc + \tfrac{\alpha}{2}am\right] v_{\xi\zeta} - \\
&- \left[\tfrac{\gamma}{2k}bm + 2\tfrac{\gamma^2}{2k}bd\right] v_{\eta\zeta} - \tfrac{\gamma^2}{2k}b^2 v_{\eta\eta} = \tfrac{a}{2\alpha}e^v(\gamma b v_\eta + [m+\gamma d]v_\zeta)
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Для того чтобы (3.12) имело канонический вид, необходимо, чтобы коэффициенты при смешанных производных обращались в нуль, что дает следующую систему:

$$
\begin{cases} \tfrac{\alpha^2 k}{2}2pc + \tfrac{\alpha}{2}pm = 0, \\ \tfrac{\gamma^2}{2k}2bd + \tfrac{\gamma}{2k}bm = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tfrac{\alpha}{2p}(2\alpha kc + m) = 0, \\ \tfrac{\gamma}{2k}(2\gamma d + m) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha kc = -\tfrac{m}{2}, \\ \gamma d = -\tfrac{m}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\tfrac{m}{2\alpha k}, \\ d = -\tfrac{m}{2\gamma}. \end{cases}
$$

При этом исходное уравнение принимает вид:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\alpha^2 k}{2}p^2 v_{\xi\xi} - \tfrac{\gamma^2}{2k}b^2 v_{\eta\eta} + \left[\tfrac{\alpha^2 k}{2}c^2 - \tfrac{\gamma^2}{2k}d^2 - \tfrac{\gamma}{2k}dm + \tfrac{\alpha}{2}cm\right] v_{\zeta\zeta} &= \\
= \tfrac{a}{2\alpha}e^v(m v_\zeta + \gamma(b v_\eta + d v_\zeta))&
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Подставив значения c и dв уравнение (3.13), получим:

$$
\frac{\alpha^2 k}{2}p^2 v_{\xi\xi} - \frac{\gamma^2}{2k}b^2 v_{\eta\eta} = \frac{a}{2\alpha}e^v\left(\gamma b v_\eta + \frac{m}{2}v_\zeta\right) \tag{3.14}
$$

Модули коэффициентов при вторых производных должны быть равны, т.е. $\frac{\alpha^2 k}{2}p^2 = \frac{\gamma^2}{2k}b^2$, следовательно $p = \pm\frac{\gamma b}{\alpha k}$.

Подставив значение p в уравнение (3.14), получим:

$$
\frac{\gamma^2}{2k}b^2 v_{\xi\xi} - \frac{\gamma^2}{2k}b^2 v_{\eta\eta} = \frac{a}{2\alpha}e^v\left(\gamma b v_\eta + \frac{m}{2}v_\xi\right),
$$

или

$$
v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2 b^2}e^v\left(\gamma b v_\eta + \frac{m}{2}v_\xi\right). \tag{3.15}
$$

Коэффициенты a, k, α, γ - параметры уравнения, а коэффициенты b, m - параметры преобразования, поэтому можно положить b= 1,тогда $p = \pm\frac{\gamma}{\alpha k}$, а m =2, и уравнение (3.15) примет вид

$$
v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2}e^v\left(\gamma v_\eta + v_\xi\right), \tag{3.16}
$$

при этом преобразования координат имеют вид: $\xi = \pm\frac{\gamma}{\alpha k}x$, $\eta = y$, $\zeta = -\frac{1}{\alpha k}x - \frac{1}{\gamma}y + 2z$.

Замена (3.10) приводит уравнение к параболическому виду (отсутствует вторая производная $v_{\zeta\zeta}$, но первая производная v_ζ входит в правую часть уравнения (3.16)).

ТЕОРЕМА 2. *Уравнение (2.31), при $k > 0$, α, γ, $a \in R$ имеет решение вида $u(x,y,z) = e^{v\left(\left(z-\frac{1}{\alpha k}x\right);\ \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(sz-\frac{1}{\gamma}y\right)\right)}$, где v – произвольная функция.*

Доказательство. Сделаем в уравнении (2.31) подстановку $\ln u = v$, тогда уравнение принимает вид (3.2).

Проведем следующую замену переменных

$$\vartheta = mx + nz, \quad \tau = py + sz,$$

где m, n, p, s – произвольные неизвестные постоянные. Определим частные производные новых переменных по старым, тогда

$$\vartheta_x = m, \quad \vartheta_y = 0, \quad \vartheta_z = n,$$

$$\tau_x = 0, \quad \tau_y = p, \quad \tau_z = s.$$

Частные производные от неизвестной функции будут иметь вид:

$$\begin{gathered} v_z = nv_\vartheta + sv_\tau, \quad v_y = pv_\tau, \\ v_{xx} = m^2 v_{\vartheta\vartheta}, \quad v_{yy} = p^2 v_{\tau\tau}, \\ v_{xz} = mnv_{\vartheta\vartheta} + msv_{\vartheta\tau}, \quad v_{yz} = spv_{\tau\tau} + npv_{\vartheta\tau}. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Подставив выражения (3.17) в (3.2), и сгруппировав подобные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} \left[\tfrac{\alpha^2 k}{2}m^2 + \tfrac{\alpha}{2}mn\right] v_{\vartheta\vartheta} - \left[\tfrac{\gamma^2}{2k}p^2 + \tfrac{\gamma}{2k}sp\right] v_{\tau\tau} + \left[\tfrac{\alpha}{2}ms - \tfrac{\gamma}{2k}np\right] v_{\vartheta\tau} = \\ = \tfrac{a}{2\alpha}e^v(nv_\vartheta + sv_\tau(1+\gamma)) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Определим, при каких параметрах m, n, p, s коэффициенты при смешанных производных обращаются в нуль, то есть имеет место равенство

$$\frac{\alpha}{2}ms - \frac{\gamma}{2k}np = 0,$$

откуда находим параметр p

$$p = \frac{\alpha k}{\gamma n}ms. \tag{3.19}$$

Приведем уравнение (3.18) к такому виду, чтобы модули коэффициентов при $v_{\vartheta\vartheta}$ и $v_{\tau\tau}$ совпали

$$\frac{k\alpha^2 m^2 s^2}{2n^2} + \frac{\alpha m s^2}{2n} = \pm\left(\frac{\alpha^2 k m^2}{2} + \frac{\alpha m n}{2}\right). \tag{3.20}$$

Если положим значение параметра $m = -\frac{n}{\alpha k}$, то, подставляя полученные значения$mиp$, в (3.18), получим, что коэффициенты при старших производных обращаются в нуль, следовательно, уравнение преобразовалось к линейному виду первого порядка

$$e^v(nv_\vartheta + sv_\tau(1+\gamma)) = 0, \tag{3.21}$$

где $\vartheta = -\frac{n}{\alpha k}x + nz$, $\tau = -\frac{s}{\gamma}y + sz$. Положив оставшиеся параметры n, s равными 1 (n =1, s= 1), и учитывая, что $e^v \neq 0$, получим, что (3.21) принимает вид линейного уравнения первого порядка

$$v_\vartheta = \frac{(1+\gamma)}{\gamma}v_\tau. \tag{3.22}$$

Решение этого уравнения имеет вид $u = e^{v\left(\vartheta;\ \frac{\gamma}{1+\gamma}\tau\right)}$ или в старых переменных $u(x,y,z) = e^{v\left(\left(z-\frac{1}{\alpha k}x\right);\ \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(sz-\frac{1}{\gamma}y\right)\right)}$, где v – произвольная функция.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Уравнение (2.31), при $k > 0, \alpha,\ \gamma,\ a \in R$ сводится к гиперболическому квазилинейному уравнению вида*

$$v_{\vartheta\vartheta} - v_{\tau\tau} = \frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)} e^v (v_\vartheta \pm (1+\gamma)v_\tau) \tag{3.23}$$

где $u(x,t,z) = e^v$, $v = v(\vartheta,\tau)$, $\vartheta = mx + nz$, $\tau = \pm\frac{\alpha k}{\gamma} y \pm z$.

Доказательство. Положим в (3.20) $s^2 \pm n^2 = 0$, возможны варианты $s = \pm n$ или $s = \pm in$. В первом случае, когда все параметры могут быть действительными, уравнение примет вид

$$v_{\vartheta\vartheta} - v_{\tau\tau} = \frac{an}{\alpha^2 m(\alpha k m + n)} e^v (v_\vartheta \pm v_\tau(1+\gamma)),$$

положив неопределенные параметры $m = n = 1$, получим следующие преобразования координат

$$\vartheta = x + z, \quad \tau = \pm\frac{\alpha k}{\gamma} y \pm z,$$

и уравнение вида: $v_{\vartheta\vartheta} - v_{\tau\tau} = \frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)} e^v (v_\vartheta \pm (1+\gamma)v_\tau)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Уравнение (3.23), при $k > 0, \alpha,\ \gamma,\ a \in R$ имеет решение вида $v(\vartheta,\tau) = -\ln\left[e^{-C_1[\vartheta\mp(1+\gamma)\tau]} - \frac{\beta}{C_1}\right], \beta = \frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)}, C_1$ – произвольная постоянная.*

Доказательство. Преобразуем уравнение (3.23) выделив полные производные

$$\left(v_\vartheta - \beta e^v\right)_\vartheta = \left(v_\tau \pm \beta(1+\gamma)e^v\right)_\tau, \qquad \beta = \frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)}.$$

Равенство эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &v_\vartheta - \beta e^v = C_1, \quad C_1 = const, \\ &v_\tau \pm \beta(1+\gamma)e^v = C_2, \quad C_2 = const. \end{aligned} \tag{3.24}$$

С помощью преобразования $e^v = w(\vartheta,\tau)$ система (3.24) приводится к системе уравнений Бернулли

$$\begin{aligned} &w_\vartheta - \beta w^2 = C_1 w, \quad C_1 = const, \\ &w_\tau \pm \beta(1+\gamma)w^2 = C_2 w, \quad C_2 = const. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Решение первого и второго уравнения соответственно имеют вид

$$w_1(\vartheta,\tau) = \left[\varphi(\tau)e^{-C_1\vartheta} - \frac{\beta}{C_1}\right]^{-1}, \quad w_2(\vartheta,\tau) = \left[\psi(\vartheta)e^{-C_2\tau} \pm \frac{\beta(1+\gamma)}{C_2}\right]^{-1},$$

где $\varphi(\tau)$, $\psi(\vartheta)$ - постоянные интегрирования. Доопределим функции $\varphi(\tau)$, $\psi(\vartheta)$ и постоянные C_1, C_2 так чтобы функции $w_1(\vartheta,\tau)$, $w_2(\vartheta,\tau)$ совпали, тогда

$$\varphi(\tau) = e^{-C_2\tau}, \quad \psi(\vartheta) = e^{-C_1\vartheta}, \quad C_2 = \mp C_1(1+\gamma),$$

следовательно $w(\vartheta,\tau)=\left[e^{-C_1[\vartheta\mp(1+\gamma)\tau]}-\frac{\beta}{C_1}\right]^{-1}$. Решение уравнения (3.23) будет иметь вид $v(\vartheta,\tau)=-\ln\left[e^{-C_1[\vartheta\mp(1+\gamma)\tau]}-\frac{\beta}{C_1}\right]$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Уравнение (2.31), при* $k>0,\alpha,\ \gamma,\ a\in R$ *имеет решение вида* $u(x,y,z)=\left[e^{-C_1\left[x-\frac{\alpha k}{\gamma}(1+\gamma)y-\gamma z\right]}-\frac{\beta}{C_1}\right]^{-1}$, $\beta=\frac{a}{\alpha^2(\alpha k+1)}$, C_1 *– произвольная постоянная.*

Литература.

[1] *Богоявленский О.И.* Опрокидывающиеся солитоны в новых двумерных интегрируемых уравнениях//Изв. АН СССР Сер.матем. 1989.Т.53, № 2. С.243-258.

[2] *Редькина Т.В.* Возможность построения солитонных 1+1 и 2+1 - мерных уравнений, имеющих общую задачу рассеяния. // Ставрополь, Вестник ставропольского государственного университета, № 43, 1995 г., с. 47-52.

Салахутдинов А.Ф.

C^* - алгебры порожденные полугруппами

Введение.

Пусть S подполугруппа коммутативной аддитивной группы без кручения Γ наделенной дискретной топологией. Предполагаем, что S порождает группу Γ и содержит единичный элемент этой группы.

Рассмотрим пространство $l^2(S)$ тех комплекснозначных функций f на S для которых выполняется неравенство $\sum\limits_{s\in S}|f(s)|^2<\infty$.

Это пространство можно наделить скалярным произведением

$(f,\ g)=\sum\limits_{S}$ f(s)$\overline{g(s)}$ относительно которого оно станет гильбертовым пространством.

Семейство функций $\{e_a\}$, $e_a(c)=\delta_{a,c}$ - символы Кронекера, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $l^2(S)$.

Обозначим через Θ_S C^*-алгебру на $l^2(S)$ порожденную операторами сдвига T_a, $a\in S$:

$$T_a\ (\sum_{b\in S}\alpha_b e_b)=\sum_{b\in S}\alpha_b e_{b+a}$$

Очевидно, что T_a - изометрический оператор, а сопряженный оператор T_a^* к оператору T_a является оператором частичной изометрии. Простейшим примером такой алгебры является алгебра Θ_{Z_+} - алгебра Теплица, т.е. алгебра на гильбертовом пространстве $l^2(Z_+)$, порожденная оператором правостороннего сдвига (см. [1]).

1.Основные свойства алгебры Θ_S.

Пусть G - компактная абелева группа характеров группы Γ, μ - нормированная мера Хаара группы G.

Семейство характеров $\{\chi^a,\ a\in\Gamma\}$ образуют ортонормированный базис в $L^2(G,d\mu)$, каждая функция f из $L^2(G,d\mu)$ представляется в виде ряда:

$$f=\sum_{a\in\Gamma}c_a^f\chi^a$$

где $c_a^f=\int\limits_G f\overline{\chi^a}\mathrm{d}\mu$.

Множество тех a из Γ для которых $c_a^f\neq 0$ называется спектром функции f и обозначается $Sp(f)$.

Пусть $H_S^2=\{f\in L^2(G,d\mu)\colon Sp(f)\subset S\}$. Пусть $C(G)$ - алгебра всех непрерывных функций на группе G.

Для каждого f из $C(G)$ определим оператор-мультипликатор $T_f\colon L^2(G,d\mu)\longrightarrow L^2(G,d\mu)$, такой что

$$T_f(\mathrm{g})=\mathrm{fg}.$$

Пусть P_S:$L^2(G,d\mu)\longrightarrow H^2_S$ - ортогональный проектор.

Следующие простые утверждения приводятся для полноты изложения.

Лемма 1.1. *Оператор T_f удовлетворяет следующим свойствам:*

a) $||T_f||$=sup|f|=$||P_ST_fP_S||$

b) T^*_f= $T_{\overline{f}}$

c) T_χ - унитарный оператор для любого характера χ из G.

Каждая непрерывная функция на G является элементом гильбертового пространства $L^2(G,d\mu)$. Поэтому можно определить пространство:

A_S=$\{f\in C(G)$:$Sp(f)\subset S\}$.

Лемма 1.2. *a) A_S - замкнутая в равномерной норме подалгебра алгебры $C(G)$ порожденная полугруппой характеров $\{\chi^a,\ a\in S\}$ группы G.*

b) H^2_S - инвариантное подпространство в $L^2(G,d\mu)$ для операторов T_g, $g\in A_S$, и семейство операторов $\{T_g,\ g\in A_S\}$ образует замкнутую подалгебру в алгебре ограниченных линейных операторов на H^2_S.

Доказательство.

a) следует из того свойства, что S - полугруппа.

b) следует из Леммы 1.1.

Преобразование Фурье переводит пространство $L^2(G,d\mu)$ в пространство $l^2(\Gamma)$ и H^2_S в $l^2(S)$.

Ортогональный проектор P_S:$L^2(G,d\mu)\longrightarrow H^2_S$ порождает отображение

$$T_fP: H^2_S\longrightarrow H^2_S,\ f\in A_S$$

Теорема 1.1. *C^*-подалгебра алгебры $B(H^2_S)$ всех ограниченных линейных операторов на H^2_S порожденная операторами T_fP и PT^*_f=$PT_{\overline{f}}$, где f из A_S, изоморфна алгебре Θ_S.*

Доказательство.

Каждую функцию f из A_S можно в равномерной норме аппроксимировать линейными комбинациями характеров из $\{\chi^a,\ a\in S\ \}$. Поэтому оператор T_fP можно приблизить линейными комбинациями операторов вида $\{T_{\chi^a}P,\ a\in S\ \}$ на H^2_S. Преобразование Фурье переводит оператор $T_{\chi^a}P: H^2_S\longrightarrow H^2_S$ в оператор сдвига T_a:$l^2S\longrightarrow l^2S$, а PT^*_f в T^*_a. Поэтому алгебра порожденная операторами T_a, T^*_a и T_aP, PT^*_a, где a из S изоморфны.

2. AF-подалгебра алгебры Θ_S. В данном параграфе укажем на одну AF-подалгебру алгебры Θ_S, которую в дальнейшем будем использовать при разложении алгебры Θ_S.

Мономом в Θ_S назовем конечное произведение вида $T_aT^*_bT_cT^*_d...T_k$, где a, b, c, d, ..., k из S, и a, k могут равняться нулю. Из определения алгебры Θ_S следует, что линейная комбинация $\sum\limits_{n=1}^{m} l_nU_n$, где l_n - комплексные числа, а U_n - мономы, плотна в алгебре Θ_S.

Теорема 2.1. *Существует инъективный гомоморфизм Φ:$G\longrightarrow Aut\ \Theta_S$, из группы G в группу автоморфизмов алгебры Θ_S.*

Доказательство.

Покажем, что каждое α из G порождает инволютивный автоморфизм σ_α на C^*-алгебре Θ_S.

По определению $\sigma_\alpha(T_a)= \chi^a(\alpha)T_a$, $\sigma_\alpha(T_a^*)=\chi^{-a}(\alpha)T_a^*$, и $\sigma_\alpha(T_aT_b^*...T_k)=\sigma_\alpha(T_a)\sigma_\alpha(T_b^*)...\sigma_\alpha(T_k)$.

Тогда $\sigma_\alpha(\sum\limits_{n=1}^{m} l_nU_n)=\sum\limits_{n=1}^{m} l_n\chi^{a_n}U_n$ и $||\sum\limits_{n=1}^{m} l_nU_n||=||\sum\limits_{n=1}^{m} l_n\chi^{a_n}U_n||$.

Поэтому σ_α есть автоморфизм на Θ_S.

Определим теперь $\Phi{:}G\longrightarrow Aut\ \Theta_S$, $\Phi(\alpha)=\sigma_\alpha$. Инъективность и непрерывность отображения Φ очевидны.

Пусть $\Im_S$ - подалгебра алгебры Θ_S порожденная операторами вида $T_aT_a^*$ и $T_a^*T_a$, $a{\in}S$.

Напомним, что C^*-алгебра называется AF-алгеброй в локальном смысле, если она есть предел сети вложенных друг в друга конечномерных алгебр.

Теорема 2.2. *В случае когда полугруппа S - счетна, алгебра $\Im_S$ - коммутативная AF-алгебра.*

В общем случае $\Im_S$ -AF-алгебра в локальном смысле.

Доказательство.

Из свойств операторов T_a, $a{\in}S$, следует, что семейство $\{T_aT_a^*,a{\in}S\}$ образует семейство коммутирующих проекторов. Поэтому, если $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$ - счетное множество, то можно определить множество вложенных друг в друга конечномерных алгебр имеющих общую единицу:

$<I,\ T_{a_1}T_{a_1}^*> \ \subset \ <I,\ T_{a_1}T_{a_1}^*,\ T_{a_2}T_{a_2}^*>\subset...\subset I,\ T_{a_1}T_{a_1}^*,...,T_{a_n}T_{a_n}^*> \ \subset...$, где

$<I,\ T_{a_1}T_{a_1}^*,...,T_{a_n}T_{a_n}^*>$- C^*-алгебра порожденная проекторами $T_{a_i}T_{a_i}^*$, i=1,...n.

В общем случае необходимо на S ввести структуру сети, по вложению конечных подмножеств полугруппы S.

Обозначим через $\Theta_0=\{A{\in}\Theta_S{:}\ \sigma_\alpha(A)=A$ для всех α из $G\}$.

Очевидно, что Θ_0 - C^*-подалгебра алгебры Θ_S.

Лемма 2.1. $\Theta_0=\Im_S$.

Доказательство.

Очевидно, что $\Im_S{\subset}\Theta_0$, т.к. $\sigma_\alpha(T_aT_a^*)=T_aT_a^*$.

Докажем что $\Theta_0{\subset}\Im_S$. Индукция по количеству множителей элемента из Θ_0. 1)$T_{a_1}T_{a_2}^*{\in}\Theta_0$. Значит $\sigma_\alpha(T_{a_1}T_{a_2}^*)=T_{a_1}T_{a_2}^*$ и,следовательно, a_1-a_2=0, т.е. $a_1=a_2$.

2)$T_{a_1}T_{a_2}^*T_{a_3}{\in}\Theta_0$. Значит $\sigma_\alpha(T_{a_1}T_{a_2}^*T_{a_3})=T_{a_1}T_{a_2}^*T_{a_3}$. Имеем, что a_1-a_2+a_3=0 и, значит, $a_2=a_1+a_3$. Отсюда получаем, что $T_{a_2}=T_{a_1+a_3}=T_{a_1}T_{a_3}$ и $T_{a_2}^*=T_{a_3}^*T_{a_1}^*$.

Получаем, что $T_{a_1}T_{a_2}^*T_{a_3}=T_{a_1}T_{a_3}^*T_{a_1}^*T_{a_3}=T_{a_1}T_{a_1}^*$. 3)$T_{a_1}T_{a_2}^*T_{a_3}T_{a_4}^*{\in}\Theta_0$. Аналогично пункту 2) выражаем элемент a_3:

$a_3=a_2+a_4$-a_1.И тогда получаем, что $T_{a_1}T_{a_2}^*T_{a_3}T_{a_4}^*=T_{a_1}T_{a_1}^*T_{a_4}T_{a_4}^*$.

Для завершения доказательства достаточно использование математической интуиции.

Теорема 2.3. *Существует $\Im_S$-билинейное условное ожидание из Θ_S на $\Im_S$.*

Доказательство.

Рассмотрим следующее отображение. p:$\Theta_S \longrightarrow \Im_S$, такое что p(A)=$\int\limits_G \sigma_\alpha$(A)d$\mu(\alpha)$. Покажем, что P($\Theta_S$)=$\Theta_0$. Для этого достаточно показать, что σ_β(P(A))=P(A). Действительно, σ_β(P(A))=$\int\limits_G \sigma_{\beta+\alpha}(A)d\mu(\alpha)$=$\int\limits_G \sigma_\alpha$(A)d$\mu(\alpha)$=P(A). Здесь использовали свойство инвариантности меры μ на G.

Очевидно, что:

1) p(I)=I 2) если $W>0$, то $p(W)=V$, где $V>0$.

3) $p(B_1AB_2)=B_1p(A)B_2$, где B_1,B_2из ß(S), а A из Θ_S.

Теорема 2.4.

Каждый элемент A из Θ_S *можно представить в виде формального ряда* $A\sim\sum\limits_{a\in\Gamma} A_aU_a$, A_a *из* ß*(S), где* U_a=T_a, *если* $a \in S$ *и* U_a=$T_b^*T_c$, *если a=c-b.*

Доказательство.

Пусть A_a=$\int\limits_G \sigma_\alpha$(A)$\chi^{-a}(\alpha)d\mu(\alpha)$. Легко проверить, что $\sigma_\beta(A_a)$=$A_a\chi^a(\beta)$, т.е. $A_a \in \Theta_a$.

Имеем, что $A \longmapsto \sum\limits_{a\in\Gamma} A_a$. Но по Лемме 2. п.2 Θ_a=$\Theta_0 T_a$ и, значит, $A \longmapsto \sum\limits_{a\in\Gamma} A_aU_a$, где U_a=T_a, если a $\in S$ и U_a=$T_b^*T_c$, если a=c-b.

Литература.

1. Дж.Мерфи. *C^*-алгебры и теория операторов.*//Пер. с англ. под ред. проф. А.Я.Хелемского.-М.:Изд-во "Факториал", 1997.

2. M.Rordam, F.Larsen, N.Laustsen. *An introduction to K-theory for C^*-algebras.*//Cambridge University Press, 2000.

3. B.Blackadar. *Operator Algebras.* //Springer, 2006.

Сандуляк Д.В.

Гамильтонов сценарий явления буферности

Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \sin x = \varepsilon a \cos\nu t, \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $a > 0$, $\nu > 0$, установлен гамильтонов сценарий явления буферности, то есть показано, что при подходящем уменьшении ε и увеличении a у него существует любое наперёд заданное конечное число устойчивых периодических решений, появляющихся в результате каскада бифуркаций типа седло-узел.

Отметим одно необходимое для последующего анализа свойство. Пусть уравнение (1) допускает некоторое периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$ с комплексными мультипликаторами $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon)$. Тогда в силу теоремы Лиувилля справедливо равенство $|\lambda_1(\varepsilon)| = |\lambda_2(\varepsilon)| = e^{-\varepsilon T(\varepsilon)/2} < 1$.

Поскольку исследуемое уравнение может обладать помимо обычных (колебательных) периодических решений $x(t)$, $x(t+T) \equiv x(t)$, $T > 0$ ещё и вращательными периодическими движениями $x(t)$, для которых $x(t+T) \equiv x(t) + 2\pi m$, при некотором целом $m \neq 0$, введём в рассмотрение две серии множеств. Через Ω_n^1 обозначим совокупность наборов параметров (ε, a, ν), при которых уравнение (1) имеет не менее n различных устойчивых колебательных периодических решений, а через Ω_n^2 обозначим аналогичное множество для вращательных периодических движений.

Теорема. *Множество $\Omega_n^1 \cap \Omega_n^2$ при любом $n \in \mathbb{N}$ не пусто.*

Доказательство. Сначала изучим вопрос о существовании у уравнения (1) при $0 < \varepsilon \ll 1$ вращательных периодических движений с положительными скоростями $\dot{x}$. В связи с тем, что при $\varepsilon = 0$ семейство вращательных периодических решений задаётся равенством $\dot{x} = \sqrt{2(\xi + \cos x)}$, где $\xi > 1$ – произвольный параметр, перейдём от уравнения (1) к трёхмерной системе для $(x, y, z) = (x, \dot{x}, \nu t)$, затем в полученной системе произведём замену переменных $(x, y) \to (\tau, \xi)$, исходя из формул

$$x = \tau, \quad y = \sqrt{2(\xi + cos\tau)}, \tag{2}$$

где $\xi > 1$. В заключение примем τ за новое время и получим систему

$$d\xi/d\tau = \varepsilon a \cos z - \varepsilon\sqrt{2(\xi + \cos\tau)}, \quad dz/d\tau = \frac{\nu}{\sqrt{2(\xi + \cos\tau)}}, \tag{3}$$

которую следует рассматривать в области $\xi > 1$.

Обозначим через $\big(z(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon), \xi(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon)\big)$ решение системы (3) с произвольно фиксированными условиями $z_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 > 1$ при $\tau = 0$ и рассмотрим уравнения

$$z(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) \equiv z_0 \pmod{2\pi}, \quad \xi(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) = \xi_0. \tag{4}$$

для определения начальных условий интересующих нас периодических движений. Далее подставим в систему (4) вытекающие из (3) асимптотические формулы

$$z(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon) = z_0(\tau) + \varepsilon z_1(\tau) + O(\varepsilon^2), \;\; \xi(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon) = \xi_0 + \varepsilon \xi_1(\tau) + O(\varepsilon^2), \tag{5}$$

$$z_0(\tau) = z_0 + \nu \int\limits_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}}, \quad \xi_1(\tau) = \int\limits_0^\tau a \cos z_0(s) - \sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}\, ds. \tag{6}$$

После сокращения и отбрасывания слагаемых порядка ε условия (4) примут вид

$$\nu \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos\tau)}} \;=\; 2\pi p\,, \quad \text{где } p \in \mathbb{N};$$

$$\int\limits_0^{2\pi} a \cos\Big(z_0 + \nu \int\limits_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}}\Big) - \sqrt{2(\xi_0 + \cos\tau)}\, d\tau = 0.$$

В последнем равенстве раскроем косинус по формуле косинуса суммы. Слагаемое, содержащее синусы, равняется нулю, поскольку оно представляет собой интеграл от периодической нечётной функции по периоду. Итак, мы пришли к системе

$$\begin{gathered} \nu \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos\tau)}} = 2\pi p, \quad \text{где } p \in \mathbb{N}, \\ a \cos z_0 \int\limits_0^{2\pi} \cos\Big(\nu \int\limits_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}}\Big) d\tau = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_0 + \cos\tau)}\, d\tau. \end{gathered} \tag{7}$$

При значениях $a > a_p^1 \;=\; \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_0 + \cos\tau)}\, d\tau \cdot \left| \int\limits_0^{2\pi} cos\bigg(\nu \int\limits_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}}\bigg)\, d\tau \right|^{(-1)}$, получившаяся система допускает наборы решений

$$(z_0,\, \xi_0) \;=\; (\varphi_{0,p}\,,\, \xi_{0,p}\,),\;\, (\varphi_{1,p}\,,\, \xi_{0,p}\,), \tag{8}$$

где $p = 1, 2, \ldots,\; \xi_{0,p} \searrow 1$ при $p \to \infty$, корни первого уравнения из (7) при всевозможных $p \in \mathbb{N}$ (так как левая часть уравнения как функция переменной ξ_0

монотонно убывает при $\xi_0 \in (1, \infty)$ от $+\infty$ до 0, то $\xi_{0,p}$, $p \geqslant 1$, определяются однозначно).

Если учесть в (7) отброшенные слагаемые порядка ε и применить к получившейся системе теорему о неявной функции по переменным z_0, ξ_0 в точке $z_0 = \varphi_{0,p}$, $\xi_0 = \xi_{0,p}$ или $z_0 = \varphi_{1,p}$, $\xi_0 = \xi_{0,p}$, то каждое решение (8) порождает при достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение $\big(z_p(\varepsilon), \xi_p(\varepsilon)\big)$: $z_p(0) = \varphi_{0,p}$ или $\varphi_{1,p}$, $\xi_p(0) = \xi_{0,p}$, исходной системы (4). Периодические движения рождаются парами в результате бифуркации типа седло-узел.

Условия применимости упомянутой теоремы здесь будут выполняться. Действительно, нам необходимо убедиться в отличии от нуля якобиана системы (7) на любом из решений (8), что сводится к проверке неравенства $I_p \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$, где

$$I_p = \int\limits_0^{2\pi} \cos\Big(\nu \int\limits_0^{\tau} \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_{0,p} + \cos s)}}\Big)\, d\tau. \tag{9}$$

Для вычисления интеграла (9) воспользуемся соотношениями

$$\nu = \frac{\pi p}{kF\Big(\pi/2, k\Big)}\,, \int\limits_0^{\tau} \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_{0,p} + \cos s)}} = kF\big(\tau/2,\, k\big), \tag{10}$$

где $k = \sqrt{2/\big(\xi_{0,p} + 1\big)}$, $F(\tau, k)$ - эллиптический интеграл первого рода, задающийся равенством $F(\tau, k) = \int\limits_0^{\tau} ds/\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}$. Подставим, далее, формулы (10) в (9) и выполним последовательно замены $s/2 \to s$, $\tau/2 \to \tau$, $\tau = am(u, k)$, где функция $am(u, k)$ определяется как неявная из уравнения $F(\tau, k) = u$.

$$I_p = 2\int\limits_0^{\pi} \cos\Big(\int\limits_0^{\tau} \frac{k\nu\, ds}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}}\Big)\, d\tau = \int\limits_0^{\pi} 2\cos\Big(k\nu F\big(\tau, k\big)\Big)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/\omega} 2\cos(k\nu u)\mathrm{dn}u\, du,$$

где $\mathrm{dn}u = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u}$, $\mathrm{sn}u = \sin\big(am(u, k)\big)$ - эллиптический синус, $\omega = \pi/\big(2F(\pi/2, k)\big)$.

То есть мы привели интересующий нас интеграл к виду $I_p = 2\int\limits_0^{\pi/\omega} \cos(2p\omega u)\mathrm{dn}u\, du$. Теперь учтём в I_p известные разложения Фурье (см, например,[1])

$$\mathrm{dn}u=\omega+4\omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos(2n\omega u),\ \text{ где }\ q=\exp\left(-\pi\frac{F(\pi/2,\sqrt{1-k^2})}{F(\pi/2,k)}\right),\tag{11}$$

$$k^2\mathrm{sn}^2u=1-\frac{2E\omega}{\pi}-8\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\cos(2n\omega u),\ \ E=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 s}ds\,.\tag{12}$$

$$\text{Таким образом}\qquad I_p=\frac{4\pi q^p}{1+q^{2p}}>0;\ \ \lim_{p\to\infty}I_p=\frac{4\pi e^{-\pi\nu/2}}{1+e^{-\pi\nu}}>0,\tag{13}$$

$$\text{а также}\qquad a_p^1=\frac{2E\big(1+q^{2p}\big)}{k\pi q^p},\qquad \lim_{p\to\infty}a_p^1=2\frac{1+e^{-\pi\nu}}{\pi e^{-\pi\nu/2}}\,.\tag{14}$$

Справедливость предельных переходов поясняет следующее выражение:

$$\lim_{p\to\infty}q^p=\exp\left(\lim_{p\to\infty}\left(-\pi p\,F(\pi/2,\sqrt{1-k^2})/F(\pi/2,k)\right)\right).$$

Поскольку $\xi_{0,p}\searrow 1$ при $p\to\infty$, то $k=\sqrt{2/(\xi_{0,p}+1)}\xrightarrow{p\to\infty}1$ и $F(\pi/2,\sqrt{1-k^2})$ стремится к $\pi/2$. Таким образом, установлено, что $\lim_{p\to\infty}q^p=e^{-\pi\nu/2}$, откуда сразу же следует справедливость предельных равенств из (13) и (14).

Остаётся заметить, что решениям (8) при $z_0=\varphi_{0,p}\,(\sin\varphi_{0,p}>0)$ отвечают седловые периодические решения исходного уравнения, а интересующие нас эллиптические решения получаются при $z_0=\varphi_{1,p}\,(\sin\varphi_{1,p}<0)$. Мультипликаторы решений – это спектр матрицы Якоби

$$\mathbb{J}=\begin{pmatrix}\partial z/\partial z_0\,(2\pi,z_0,\xi_0,\varepsilon) & \partial z/\partial\xi_0\,(2\pi,z_0,\xi_0,\varepsilon)\\ \partial\xi/\partial z_0\,(2\pi,z_0,\xi_0,\varepsilon) & \partial\xi/\partial\xi_0\,(2\pi,z_0,\xi_0,\varepsilon)\end{pmatrix},\tag{15}$$

вычисленный на найденных выше решениях системы (4). Рассмотрим подробнее характеристический многочлен матрицы (15) $\det(\mathbb{J}-\lambda\mathbb{I})=$

$$=\det\begin{pmatrix}1-\lambda+\varepsilon\,\partial z_1/\partial z_0(2\pi)+O(\varepsilon^2) & \partial z_0/\partial\xi_0(2\pi)+\varepsilon\,\partial z_1/\partial\xi_0 2\pi+O(\varepsilon^2)\\ \varepsilon\,\partial\xi_1/\partial z_0(2\pi)+O(\varepsilon^2) & 1-\lambda+\varepsilon\,\partial\xi_1/\partial\xi_0(2\pi)+O(\varepsilon^2)\end{pmatrix}.$$

Обозначим за $\mu=1-\lambda$ и раскроем определитель с точностью до слагаемых порядка ε. Получим многочлен

$$\mu^2+\varepsilon\Big(\partial z_1/\partial z_0(2\pi)+\partial\xi_1/\partial\xi_0(2\pi)\Big)\mu-\partial z_0/\partial\xi_0(2\pi)\,\partial\xi_1/\partial z_0(2\pi)\varepsilon=0.\tag{16}$$

Запишем его дискриминант, отбрасывая слагаемые порядка ε^2: $D=4\partial z_0/\partial\xi_0(2\pi)\cdot\partial\xi_1/\partial z_0(2\pi)\varepsilon$. То есть тип корней многочлена

(16) определяется знаком произведения $\partial z_0/\partial\xi_0(2\pi)\cdot\partial\xi_1/\partial z_0(2\pi) = \int\limits_0^{2\pi}\nu\sqrt{2(\xi_0+\cos s)}^{\,-3}ds\cdot a\sin z_0 I_p$, который совпадает со знаком $\sin z_0$.

Теперь перейдём к вопросу о существовании колебательных эллиптических периодических решений у рассматриваемой системы. Воспользуемся тем фактом, что при $\varepsilon=0$ система обладает семейством колебательных решений, задающихся равенствами

$$x = 2\arcsin\big(k\,\mathrm{sn}(\varphi/\omega,\,k)\big),\quad \dot{x} = 2k\,\mathrm{cn}(\varphi/\omega,\,k),\tag{17}$$

где $k\in(0,1)$ – произвольный параметр, пременная $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\pmod{2\pi}$ меняется по закону $\dot\varphi=\omega$, частота $\omega=\omega(k)$ определяется той же формулой, что и в (), а в эллиптическом синусе и косинусе подчёркнута явная зависимость от k.

Стандартным образом, произведя замену $\dot{x}=y$, $z=\nu t$, перейдём от исходного уравнения к трёхмерной системе; затем выполним в получившейся системе замену переменных $(x,y)\to(k,\varphi)$, исходя из формул (17) и, приняв φ за новое время, приходим к системе с 2π–приодическими по φ правыми частями, имеющей вид

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{\nu}{\omega}+O(\varepsilon),\quad \frac{dk}{d\varphi}=\frac{\varepsilon}{2\omega}\,\mathrm{cn}(\varphi/\omega,k)(a\cos z-2k\,\mathrm{cn}(\varphi/\omega,k))+O(\varepsilon^2).\tag{18}$$

Обозначим через $\big(z(\varphi,z_0,k_0,\varepsilon),k(\varphi,z_0,k_0,\varepsilon)\big)$ решение рассматриваемой системы с произвольно фиксированными начальными условиями $k_0\in(0,1)$, $z_0\in\mathbb{R}$, заданными при $\varphi=0$ и рассмотрим уравнения

$$z(2\pi,z_0,k_0,\varepsilon)=z_0\pmod{2\pi},\quad k(2\pi,z_0,k_0,\varepsilon)=k_0\tag{19}$$

для определения начальных условий интересующих нас периодических движений.

Подставим в (19) вытекающие из (18) и справедливые равномерно по $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ асимптотические представления для $z(\varphi,z_0,k_0,\varepsilon)$ и $k(\varphi,z_0,k_0,\varepsilon)$

$$z(\varphi,z_0,k_0,\varepsilon)=z_0(\varphi)+\varepsilon z_1(\varphi)+O(\varepsilon^2),\qquad k(\varphi,z_0,k_0,\varepsilon)=k_0+\varepsilon k_1(\varphi)+O(\varepsilon^2),$$

где $$z_0(\varphi)=z_0+\frac{\nu\varphi}{\omega},\quad k_1(\varphi)=\frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\varphi}\mathrm{cn}\Big(\frac{\tau}{\omega},k\Big)\bigg(a\cos\Big(z_0+\frac{\nu\tau}{\omega}\Big)-2k\mathrm{cn}\Big(\frac{\tau}{\omega},k\Big)\bigg)d\tau.$$

Таким образом, для определения k_0 приходим к равенству

$$\frac{\nu}{\omega(k_0)}=p,\ p\in\mathbb{N}.\tag{20}$$

При $0<k_0<1$ функция $1/\omega(k_0)$ монотонно возрастает от 1 до $+\infty$, откуда следует, что данное уравнение имеет единственное решение $k_{0,p}$ для каждого $p\in\mathbb{N}$, начиная с номера $p_0=[\nu]+1$ ($[*]$– целая часть). Условие для определения z_0 после всех упрощений, аналогичных указанным в случае вращательных режимов, примут вид

$$a\cos z_0\cdot\frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{cn}\Big(\frac{\varphi}{\omega},k\Big)\cos\Big(\frac{\nu\varphi}{\omega}\Big)d\varphi=\frac{k}{\omega}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{cn}^2\Big(\frac{\varphi}{\omega},k\Big)d\varphi, \tag{21}$$

здесь и везде далее $k = k_{0,p}$, $\omega = \omega(k_{0,p})$. Обозначим $I_p = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{cn}\Big(\frac{\varphi}{\omega},k\Big)\cos\Big(\frac{\nu\varphi}{\omega}\Big)d\varphi$.

Пользуясь разложением Фурье $\mathrm{cn}u=\frac{4\omega}{k}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}}\cos\big[(2n+1)\omega u\big]$, где q определяется формулой (11), легко видеть, что

$$I_p=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{k_{0,p}}\dfrac{q^{p/2}}{1+q^p}>0, & \text{если } p-\text{ нечётное число}\\ 0, & \text{если } p-\text{ чётное число}\end{cases} \tag{22}$$

и

$$\frac{k_{0,p}}{\omega}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{cn}^2\Big(\frac{\varphi}{\omega(k_{0,p})},k_{0,p}\Big)d\varphi=2\pi\frac{k_{0,p}^2-1}{\omega(k_{0,p})k_{0,p}}+\frac{4E}{k_{0,p}}.$$

Таким образом, при выполнении ограничений на параметры: $a>a_p^2$, где $a_p^2=2E(1+q^p)/(\pi q^{p/2})$ и p – нечётное, система, состоящая из равенств (20) и (21), допускает наборы решений

$$(z_0,k_0)=(\psi_{0,p},k_{0,p}),\ (\psi_{1,p},k_{0,p}),\quad p\in\mathbb{N},\ \text{нечётное}, \tag{23}$$

а $\psi_0,\ \psi_1\in[0,2\pi]$ и $\psi_0<\psi_1$.

Из соотношений (22) следует, что любому решению (23) с нечётным номером p в исходном уравнении соответствует колебательное периодическое движение. Для определения типа этого движения также следует рассмотреть матрицу Якоби на найденных решениях. Анализ характеристического многочлена матрицы Якоби, записанного с точностью до ε, показывает, что решениям (23) при $z_0=\psi_{0,p}\,(\sin\psi_{0,p}>0)$ отвечают седловые периодические решения исходной системы, а при $z_0=\psi_{1,p}\,(\sin\psi_{1,p}<0)-$ эллиптические.

В заключении отметим, что последовательности критических значений обладают общим пределом $a_\infty=\frac{2}{\pi}\big(e^{\pi\nu/2}+e^{-\pi\nu/2}\big)$ (см. (14)) и для их элементов выполняется неравенство: $a_p^1<a_p^2$.

Так же стоит отметить, что, если для систем (3) и (18) рассмотреть периодические условия (4) и (19) соответственно с периодами $2\pi m$, где $m>1$, то значения I_p, где p – взаимно просто с m, окажутся равными нулю и равенства для определения ξ_0 и k_0 будут иметь вид $0 = const > 0$. То есть такого типа периодических движений (называемых ультрасубгармониками) в исследуемой системе (1) не существует.

Таким образом, при выборе подходящего ε и $a > a_\infty$, можно гарантировать сосуществование в системе (1) любого наперёд заданного конечного числа устойчивых периодических движений как вращательного, так и колебательного типов. Что и требовалось доказать.

Литература

[1] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч.2. Трансцендентные функции. М.: Физматлит, 1963.

Сапрыкин М.А.

Задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных средах

1. Введение. Задачи о вычислении распределения температуры в полупрозрачных средах, при заданных граничных условиях, являются намного более сложными по своей математической постановке, в сравнении со стандартными задачами тепломассопереноса [4]. Это связано с тем, что при определении эволюции распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в таких средах, приходится учитывать перенос тепловой энергии посредством электромагнитного излучения. Физический механизм такого переноса энергии имеет нелокальный характер. Это приводит к тому, что эволюционное уравнение для распределения температуры становится, в общем случае, интегродифференциальным

$$\dot{T}(\mathbf{r}, t) = (\nabla, \varkappa(T)\nabla T)(\mathbf{r}, t) - (\nabla, \mathbf{P})(\mathbf{r}, t; T)\,, \tag{1}$$

где $\varkappa(T) > 0$, $T \in (0, \infty)$, $t \geq 0$, $\mathbf{r} \in \Omega$. В этом уравнении вектор-функция $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t; T)$, называемая потоком излучения в среде, получается действием на распределение температуры $T(\mathbf{r}, t)$ нелинейного интегрального оператора, зависящего от t как от параметра. Более того, уже для формулировки замкнутого эволюционного уравнения, то есть для определения явного вида указанного оператора и, следовательно, вектор-функции $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t; T)$, необходим учёт граничных условий. С физической точки зрения, последнее связано с тем, что сам процесс переноса тепла посредством излучения в области Ω, занимаемой средой, нелокальный и существенно зависит от условий на границе $\partial\Omega$ этой области для электромагнитного излучения. Излучение, распространяясь в области Ω, переизлучается в каждой её точке и, тем самым, оказывает влияние на значение распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in \Omega$. Процесс же распространения излучения состоит из быстрого, по сравнению с характерным временем переноса тепла посредством теплопроводности, многократного прохождения им области Ω, с многократными отражениями от границы $\partial\Omega$. Граничные условия для излучения как раз и являются условиями, описывающими математически каждое из этих отражений. Описание распространения излучения и формулировка условий его отражения от границы области существенно упрощаются, если изучается такая физическая ситуация, когда характерная частота излучения находится в видимой части спектра. В этом случае, электромагнитное излучение описывается в так называемом приближении геометрической оптики [2].

В настоящей работе, основываясь на приближении геометрической оптики, в условиях зеркального отражения излучения от границы с коэффициентом отражения $\theta \in [0, 1]$ и прямолинейного распространения лучей между отражениями, для области Ω с кусочно-плоской границей, даётся доказательство теоремы о том, что поток энергии $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t; T)$ излучения, который является нелинейным функционалом от текущего распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$, представляет собой потенциальное векторное поле

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t; T) = \nabla F(\mathbf{r}, t; T)\,, \tag{2}$$

где потенциал $F(\mathbf{r}, t; T)$ определяется действием нелинейного интегрального оператора, связанного с тем оператором, посредством которого вычисляется поток энергии $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t; T)$. Доказанное утверждение, в условиях, когда $\varkappa(T) = \mathrm{const}$, приводит задачу определения распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$ к решению начально-краевой задачи, связанной с уравнениями

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta U(\mathbf{r}, t; T)\,, \tag{3}$$

$$U(\mathbf{r}, t; T) \equiv \varkappa T - F(\mathbf{r}, t; T)\,. \tag{4}$$

Кроме того, в работе приведено явное вычисление потенциала $F(\mathbf{r}, t; T)$ в том случае, когда область Ω представляет собой плоский слой конечной толщины, $\Omega = \{\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle : x \in [0, L], \langle y, z\rangle \in \mathbb{R}\}$, $L > 0$.

2. Задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Рассмотрим область Ω, внутри которой имеется распределенный источник излучения. Этот источник, в каждый момент времени t, в каждой точке области Ω с радиус-вектором $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, мы охарактеризуем интенсивностью $P_0(\mathbf{r}, t)$ излучения. Функция $P_0(\mathbf{r}, t)$ имеет физическую размерность потока энергии. Она представляет собой относительную величину электромагнитной энергии, излучаемой изотропно по всем направлениям в единицу времени из области единичного объема, окружающей точку $\mathbf{r}$, по отношению к площади поверхности этой области. Далее, будем полагать, что пространственное распределение таких источников излучения однородно и обладает плотностью, равной α^3. Величина α является, в общем случае, функцией температуры T. При этом интенсивность излучения энергии этих источников зависит от пространственной точки $\mathbf{r}$. В этой работе, мы будем считать величину α постоянной. Кроме того, мы ограничиваемся изучением такого физического случая, при котором волновые свойства распространения излучения не оказывают влияния на передачу тепла, как об этом было сказано во введении. А именно, в этом случае, физический процесс радиационно-кондуктивного теплообмена допустимо изучать в приближении геометрической оптики. Тогда, можно считать, что тепло переносится световыми лучами внутри Ω, где каждый из лучей двигается со скоростью света, характерной для текущего состояния среды, заполняющей область Ω. Каждый луч, достигая границу области, испытывает частичное отражение от неё с положительной вероятностью (коэффициентом отражения) $\theta \leqslant 1$. Движение луча (той его части, которая остается внутри области Ω при каждом из отражений) с последовательными отражениями от границы продолжается неограниченно, если

$\theta > 0$. При этом, общий вектор потока энергии $P_\mu(\mathbf{r}, t)$, $\mu = 1, 2, 3$ электромагнитного излучения в какой-либо пространственной точке с радиус-вектором $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$ в момент времени t складывается из суммарной энергии, излучаемой с интенсивностью $P_0(\mathbf{r}', t)$ каждой точкой $\mathbf{r}'$ области, и достигшей, при движении луча, точки $\mathbf{r}$. В связи с этим, введем в рассмотрение вектор-функцию $Q_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\mu = 1, 2, 3$, которую будем называть *вероятностью перехода*. Она описывает долю электромагнитной энергии, излученной из точки $\mathbf{r}'$, которая даёт вклад в суммарный поток энергии в точке $\mathbf{r}$. При этом поток энергии $P_\mu(\mathbf{r}, t)$ в точке $\mathbf{r}$ представляется интегралом

$$P_\mu(\mathbf{r}, t) = \alpha^3 \int\limits_\Omega Q_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') P_0(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' , \quad \mu = 1, 2, 3 \tag{5}$$

по области Ω. Так как в рассматриваемом нами приближении геометрической оптики, энергия, излучаемая из точки $\mathbf{r}'$, переносится лучами, то можно считать, что функция $Q_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представляет собой сумму потоков энергии в точке $\mathbf{r}$, переносимых каждым из лучей $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, вышедших из точки $\mathbf{r}'$ и прошедших через точку $\mathbf{r}$. Причём единичный вектор направления $\mathbf{n}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ движения луча в точке $\mathbf{r}$ определяет направление части потока энергии в этой точке, которая переносится лучом $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Обозначим $Q_\mu[\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]$ часть потока энергии, переносимую указанным лучом. Множество $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ всех возможных лучей $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, при фиксированных точках $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ является счётным. Поэтому,

$$Q_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \in \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} Q_\mu[\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \, . \tag{6}$$

Определим вид функции $Q_\mu[\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]$. В геометрической оптике движение луча описывается вектор-функцией $\mathbf{r}(s)$ в естественной параметризации s – длине луча. Эта вектор-функция между точками отражения от границы определяется как решение системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{n}(s) \, , \tag{7}$$

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = \nabla g(\mathbf{r}(s), t) \, , \tag{8}$$

где $g(\mathbf{r}, t)$ – оптический показатель преломления среды, который является функцией $\mathbf{r} \in \Omega$ и времени t в среде, оптические свойства которой изменяются во времени и при переходе от точки к точке в области Ω, вследствие имеющегося в ней распределения температуры. В этом случае, можно считать, что $g(\mathbf{r}, t) = g[T(\mathbf{r}, t)]$, т.е. эта функция определяется функционально через зависимость от $\mathbf{r}$ и t распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$. Отражение луча от границы определяется на основе закона зеркального отражения.

При известном движении луча $\mathbf{r}(s)$, вектор потока энергии определяется на основе решения дифференциального уравнения

$$\frac{d}{ds} Q_\mu(s; \mathbf{r}', \mathbf{n}') = -\alpha Q_\mu(s; \mathbf{r}', \mathbf{n}') \, , \tag{9}$$

с начальным условием $Q_\mu(0;\mathbf{r}',\mathbf{n}') = n'_\mu$, посредством функционального соотношения

$$Q_\mu[\gamma(\mathbf{r}(s),\mathbf{r}')] = Q_\mu(s;\mathbf{r}',\mathbf{n}')\,. \tag{10}$$

Уравнение (9) является выражением так называемого закона Кирхгофа для потока энергии излучения.

Уравнения (1), (5) – (10) составляют полную систему уравнений в задаче радиационно-кондуктивного теплообмена в той физической ситуации, которая рассматривается в настоящей работе, если дополнительно указана зависимость от времени интенсивности излучения $P_0(\mathbf{r},t)$ тепловыми источниками среды. Эта зависимость, с физической точки зрения, связывается с тем, что она является однозначной функцией $P_0[T]$ температуры T и, поэтому, зависимость $P_0(\mathbf{r},t)$ определяется соотношением

$$P_0(\mathbf{r},t) = P_0[T(\mathbf{r},t)]\,. \tag{11}$$

Функция $P_0[T]$ считается известной. Она определяется свойствами среды.

Рассмотрим, отдельно, частный случай, когда показатель преломления g является постоянным. Тогда из уравнений (7), (8) следует, что лучи, между отражениями от границы, представляют собой прямолинейные отрезки. Поэтому вероятность перехода, на основании (9), (10), без отражений от границы, определяется формулой

$$Q^{(0)}_\mu[\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')] = n_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}')\exp(-\alpha|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,. \tag{12}$$

В рассматриваемом случае имеет место равенство $\mathbf{n}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \mathbf{n}'$.

В общем случае, если луч $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ испытал $l = 0,1,2,...$ отражений от границы области, то доля переносимой им энергии, излучённой из точки $\mathbf{r}'$ описывается множителем $\theta^l\exp(-\alpha|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|)$, где $|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|$ – длина пути между точками $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ вдоль луча $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, которая называется *длиной луча* $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Таким образом, для фиксированного луча с l отражениями, имеет место формула

$$Q^{(l)}_\mu[\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')] = \theta^l n_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}')\exp(-\alpha|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|)\,. \tag{13}$$

Множество лучей $\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, естественным образом, представляется дизъюнктивным объединением множеств $\Gamma_l(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $l = 0,12,...$ лучей, которые между прохождениями точек $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ испытывают l отражений от границы области Ω. В соответствии с этим, введем в рассмотрение функции

$$Q^{(l)}_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \theta^l \sum_{\gamma\in\Gamma_l(\mathbf{r},\mathbf{r}')} n_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}')\exp(-\alpha|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|)\,, \tag{14}$$

$$Q_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} Q^{(l)}_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,. \tag{15}$$

Это разложение вероятности перехода, в изучаемой нами задаче, мы будем называть *каноническим.*

Функция $Q_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ полностью определяется геометрией области Ω, которая формирует множества световых лучей, проходящих через точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Она не зависит от времени. Зависимость от времени потока энергии $P_\mu(\mathbf{r},t)$, определяемого формулой (5), появляется вследствие зависимости (11).

3. Потенциальность потока энергии. В этом пункте мы докажем, что, в случае, если область Ω обладает кусочно-плоской границей, векторное поле $\mathbf{P}(\mathbf{r},t;T)$ потока энергии излучения является потенциальным. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция* $\mathbf{n}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ *при* $\mathbf{r},\mathbf{r}'\in\Omega$ *определяется как значение направляющего единичного вектора* $\mathbf{n}(1)$ *луча* $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\{\mathbf{r}(s);s\in[0,1]\}$, *начинающего в точке с радиус- вектором* $\mathbf{r}'$ *и приходящего в точку с радиус-вектором* $\mathbf{r}$. *Тогда имеет место формула*

$$\nabla|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|=\mathbf{n}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,, \tag{16}$$

$\square$ Заменим, сначала, точку $\mathbf{r}$ на точку $\mathbf{r}+\lambda\mathbf{n}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, где $\lambda\in\mathbb{R}$ – настолько малое число, чтобы число отражений от границы области Ω луча $\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{n}(\mathbf{r},\mathbf{r}'),\mathbf{r}')$, который приходит в эту точку из точки $\mathbf{r}'$, совпадало с числом отражений луча $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. При этом луч $\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{n}(\mathbf{r},\mathbf{r}'),\mathbf{r}')$ получается из луча $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ колинеарным продолжением. В этом случае,

$$|\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{n}(1),\mathbf{r}')|=|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|+\lambda\,.$$

Тогда,

$$(\mathbf{n}(1),\nabla|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|)=\lim_{\lambda\to0}\frac{|\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{n}(1),\mathbf{r}'))|-|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|}{\lambda}=1\,.$$

Рассмотрим теперь случай, когда направление перемещения из точки $\mathbf{r}$, определяется единичным вектором $\mathbf{e}\perp\mathbf{n}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Кусочно-плоская граница $\partial\Omega$ получается склейкой множества областей $\Sigma_1,...,\Sigma_N$, которые содержатся, соответственно, в плоскостях Γ_1, ..., Γ_N в пространстве $\mathbb{R}^3$. Очевидно, что граница каждой из областей $\Sigma_1,...,\Sigma_N$ является кусочно линейной, т.е. представляет собой замкнутую ломанную. Необходимо вычислить

$$(\mathbf{e},\nabla|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|)=\lim_{\lambda\to0}\frac{|\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')|-|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|}{\lambda}\,. \tag{17}$$

Покажем, что этот предел равен нулю, что и завершит доказательство утверждения.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\Sigma_1,...,\Sigma_N$ являются теми областями из множества, составляющего границу области, от которых отражается луч $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ в процессе движения от точки $\mathbf{r}'$ к точке $\mathbf{r}$. Причём нумерация этих областей выбрана в порядке прохождения отражения от них луча. При такой нумерации, некоторые из областей в последовательности $\Sigma_1,...,\Sigma_N$ могут повторяться.

Заметим, что, для всех лучей $\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')$, при всех достаточно малых значениях $\lambda\geq0$, совпадает не только число отражений каждого из них от границы $\partial\Omega$ с числом отражений луча $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, но для каждого из них совпадают последовательности тех областей границы, от которых они отражаются в процессе движения, приходя в точки $\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e}$ и $\mathbf{r}$, соответственно. Обозначим последовательность точек отражения $\mathbf{r}_1,...,\mathbf{r}_N$ луча $\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ соответственно от областей $\Sigma_1,...,\Sigma_N$. Аналогично, введем последовательность точек отражения $\mathbf{r}_1(\lambda),...,\mathbf{r}_N(\lambda)$ для каждого луча $\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')$, где каждая из точек $\mathbf{r}_j(\lambda)$ принадлежит вместе с одноименной с ней точкой $\mathbf{r}_j$ к одной и той же области Σ_j, $j=1,...,N$.

Каждому лучу $\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')$, с допустимым значением $\lambda\geq 0$, сопоставим луч $\gamma(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}')$. Иными словами, луч $\gamma(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}')$ является частью луча $\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')$ до последнего N-го отражения.

Осуществим пошагово следующую конструкцию. На первом шаге, отразим зеркально луч $\gamma(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}')$ от плоскости Γ_N. В результате такого отражения, луч $\gamma(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}')$ перейдёт в луч $\gamma^{(1)}(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}^{(1)})$, у которого начальная точка $\mathbf{r}^{(1)}$ является образом точки $\mathbf{r}'$ при указанном отражении. Заметим, что она не зависит от λ, так как получена отражением от плоскости, независящей от λ. При этом точки $\mathbf{r}_1^{(1)}(\lambda),...,\mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda)$ отражения луча $\gamma_N^{(1)}(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}^{(1)})$ являются образами, соответственно, точек отражения $\mathbf{r}_1(\lambda),...,\mathbf{r}_{N-1}(\lambda)$. Эти образы лежат в соответствующих областях $\Sigma_1^{(1)},...,\Sigma_{N-1}^{(1)}$, которые являются образами зеркального отражения от плоскости Γ_N областей $\Sigma_1,..,\Sigma_{N-1}$. В свою очередь, области $\Sigma_1^{(1)},...,\Sigma_{N-1}^{(1)}$ расположены в плоскостях $\Gamma_1^{(1)},...,\Gamma_{N-1}^{(1)}$, которые получаются посредством того же зеркального отражения плоскостей $\Gamma_1,...,\Gamma_{N-1}$. Обозначим

$$\gamma^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{(1)},\lambda)=\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}_N(\lambda))\cup\gamma_N^{(1)}(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}^{(1)})$$

луч, который получается приклеиванием прямолинейного отрезка $\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}_N(\lambda))$ к лучу $\gamma_N^{(1)}(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}^{(1)})$, который начинается в точке $\mathbf{r}^{(1)}$ и заканчивается в точке $\mathbf{r}_N(\lambda)$. Он имеет $N-1$ точку отражения и обладает тем же самым направляющим вектором $\mathbf{n}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(1)})=\mathbf{n}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')$, $\lambda\geq 0$ и той же самой длиной

$$|\gamma^{(1)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(1)})|=|\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')|\,,$$

что и исходный луч $\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')$.

Обозначим, теперь, посредством $\gamma_{N-1}^{(1)}(\mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda),\mathbf{r}^{(1)})$ часть луча $\gamma^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{(1)},\lambda)$ до точки $\mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda)$ – $(N-1)$-й точки отражения. На втором шаге, отразим зеркально этот луч $\gamma_{N-1}^{(1)}(\mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda),\mathbf{r}^{(1)})$ от плоскости $\Gamma_{N-1}^{(1)}$. В результате такого отражения, луч $\gamma_{N-1}^{(1)}(\mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda),\mathbf{r}^{(1)})$ перейдёт в луч $\gamma_{N-1}^{(2)}(\mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda),\mathbf{r}^{(2)})$, у которого начальная точка $\mathbf{r}^{(2)}$ является образом точки $\mathbf{r}^{(1)}$ при указанном отражении, а точки $\mathbf{r}_1^{(2)}(\lambda),...,\mathbf{r}_{N-2}^{(2)}(\lambda)$ отражения луча $\gamma_{N-1}^{(2)}(\mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda),\mathbf{r}^{(2)})$ являются образами, соответственно, точек отражения $\mathbf{r}_1^{(1)}(\lambda),...,\mathbf{r}_{N-2}^{(1)}(\lambda)$. Эти образы лежат в областях $\Sigma_1^{(2)},...,\Sigma_{N-2}^{(2)}$, которые являются образами зеркального отражения от плоскости $\Gamma_{N-1}^{(1)}$областей

$\Sigma_1^{(1)}, .., \Sigma_{N-2}^{(1)}$. В свою очередь, области $\Sigma_1^{(2)}, ..., \Sigma_{N-2}^{(2)}$ расположены в плоскостях $\Gamma_1^{(2)}, ..., \Gamma_{N-2}^{(2)}$, которые получаются тем же зеркальным отражением плоскостей $\Gamma_1^{(1)}, ..., \Gamma_{N-2}^{(1)}$. Луч

$$\gamma^{(2)}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}^{(2)}) = \Big[\gamma(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}_N(\lambda)) \cup \gamma^{(1)}(\mathbf{r}_N(\lambda), \mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda))\Big] \cup \\ \cup \gamma_{N-1}^{(2)}(\mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda), \mathbf{r}^{(2)})$$

имеет $N - 2$ точки отражения и обладает тем же самым направляющим вектором $\mathbf{n}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}^{(2)}) = \mathbf{n}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}')$ и той же самой длиной

$$|\gamma^{(2)}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}^{(2)})| = |\gamma(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}')|, \quad \lambda \geq 0,$$

что и исходный луч $\gamma(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}')$.

Осуществим, далее, шаг за шагом процесс последовательного построения лучей $\gamma^{(i)}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}^{(i)})$, $i = 1, 2, ..., N - 1$ на основе лучей $\gamma_{N-i}^{(i)}(\mathbf{r}_{N-i}^{(i)}, \mathbf{r}^{(i)})$ $i = 1, 2, ..., N - 1$. Пусть на i-м шаге уже построены прямолинейные отрезки $\gamma^{(j)}(\mathbf{r}_{N+1-j}^{(j-1)}(\lambda), \mathbf{r}_{N-j}^{(j)}(\lambda))$, $j = 0, ..., i - 1$, где $\mathbf{r}_{N+1}^{(-1)}(\lambda) = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}$, $\mathbf{r}_N^{(0)}(\lambda) = \mathbf{r}_N(\lambda)$, $\gamma^{(0)} = \gamma(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}')$, а также луч $\gamma_{N-i}^{(i)}(\mathbf{r}_{N-i}^{(i-1)}(\lambda), \mathbf{r}^{(i)})$, который имеет $N - i$ точки отражения $\mathbf{r}_1^{(i)}(\lambda), ..., \mathbf{r}_{N-i}^{(i)}(\lambda)$. Эти точки отражения лежат в построенных плоских областях $\Sigma_1^{(i)}, ..., \Sigma_{N-i}^{(i)}$, которые расположены в плоскостях $\Gamma_1^{(i)}, ..., \Gamma_{N-i}^{(i)}$. Луч $\gamma^{(i)}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}^{(i)})$ на i-м шаге определяется формулой

$$\gamma^{(i)}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}^{(i)}) = \\ = \Big[\gamma(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}_N(\lambda)) \cup \gamma^{(1)}(\mathbf{r}_N(\lambda), \mathbf{r}_{N-1}^{(1)}(\lambda)) \cup ... \cup \gamma^{(i-1)}(\mathbf{r}_{N-i+2}^{(i-2)}(\lambda), \mathbf{r}_{N-i+1}^{(i-1)}(\lambda))\Big] \cup \\ \cup \gamma_{N-i+1}^{(i)}(\mathbf{r}_{N-i+1}^{(i-1)}(\lambda), \mathbf{r}^{(i)}).$$

Он имеет $N - i$ точек отражения, тот же направляющий вектор $\mathbf{n}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}^{(i)})$ и такую же длину,

$$|\gamma^{(i)}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}^{(i)})| = |\gamma(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}')|,$$

что и луч $\gamma(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}')$.

Тогда, на следующем шаге, луч $\gamma_{N-i}^{(i)}(\mathbf{r}_{N-i}^{(i)}(\lambda), \mathbf{r}^{(i)})$ перейдёт в луч $\gamma_{N-i}^{(i+1)}(\mathbf{r}_{N-i}^{(i)}(\lambda), \mathbf{r}^{(i+1)})$, у которого начальная точка $\mathbf{r}^{(i+1)}$ является образом точки $\mathbf{r}^{(i)}$ при зеркальном отражении в плоскости $\Gamma_{N-i}^{(i)}$, а точки отражения $\mathbf{r}_1^{(i+1)}(\lambda), ..., \mathbf{r}_{N-i-1}^{(i+1)}(\lambda)$ луча $\gamma_{N-i}^{(i+1)}(\mathbf{r}_{N-i}^{(i)}(\lambda), \mathbf{r}^{(i+1)})$ являются образами, при указанной операции зеркального отражения, соответственно, точек отражения $\mathbf{r}_1^{(i)}(\lambda), ..., \mathbf{r}_{N-i-1}^{(i)}(\lambda)$. Эти точки лежат, соответственно, в областях $\Sigma_1^{(i+1)}, ..., \Sigma_{N-i-1}^{(i+1)}$, которые являются образами зеркального отражения в плоскости $\Gamma_{N-i}^{(i)}$ областей $\Sigma_1^{(i)}, .., \Sigma_{N-i-1}^{(i)}$. Сами же области $\Sigma_1^{(i+1)}, ..., \Sigma_{N-i-1}^{(i+1)}$ расположены в плоскостях $\Gamma_1^{(i+1)}, ..., \Gamma_{N-i-1}^{(i+1)}$, которые получаются в результате того же зеркального отражения плоскостей $\Gamma_1^{(i)}, ..., \Gamma_{N-i-1}^{(i)}$. Луч

$$\gamma^{(i+1)}(\mathbf{r} + \lambda\mathbf{e}, \mathbf{r}^{(i+1)}) =$$

$$= \Big[\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}_N(\lambda)) \cup \gamma^{(1)}(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}^{(1)}_{N-1}(\lambda)) \cup ... \cup \gamma^{(i)}(\mathbf{r}^{(i-1)}_{N-i+1}(\lambda),\mathbf{r}^{(i)}_{N-i}(\lambda))\Big] \cup$$
$$\cup\, \gamma^{(i+1)}_{N-i}(\mathbf{r}^{(i)}_{N-i}(\lambda),\mathbf{r}^{(i+1)})$$

имеет $N-i-1$ точек отражения и обладает тем же самым направляющим вектором $\mathbf{n}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(i+1)}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')$ и той же самой длиной

$$|\gamma^{(i+1)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(i+1)})| = |\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')|\,,$$

что и исходный луч $\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')$.

На последнем шаге, при $i=N-1$, когда исчерпаются возможные плоскости отражения, мы получим луч $\gamma^{(N)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(N)})$, который представляет собой прямолинейный отрезок. Он является объединением

$$\gamma^{(N)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(N)}) =$$
$$= \gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}_N(\lambda)) \cup \gamma^{(1)}(\mathbf{r}_N(\lambda),\mathbf{r}^{(1)}_{N-1}(\lambda)) \cup ... \cup \gamma^{(N)}(\mathbf{r}^{(N-1)}_{N-1}(\lambda),\mathbf{r}^{(N)})\,.$$

Этот отрезок имеет направление, совпадающее с направлением $\mathbf{n}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')$, и длину

$$|\gamma^{(N)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(N)})| = |\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')|\,.$$

Обозначим посредством $\phi(\lambda)$ угол между лучами $\gamma^{(N)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(N)})$ и $\gamma^{(N)}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{(N)})$. Этот угол $\phi(\lambda)$ является непрерывной функцией от λ и, поэтому,

$$\lim_{\lambda\to+0}\phi(\lambda) = 0\,.$$

Так как эти лучи имеют общую начальную точку $\mathbf{r}^{(N)}$, то они образуют, вместе с вектором $\lambda\mathbf{e} = (\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e})-\mathbf{r}$, который соединяет концевые точки этих лучей, прямоугольный треугольник, $\mathbf{e}\perp[\mathbf{r}-\mathbf{r}^{(N)}]$. Гипотенузой этого треугольника служит луч $\gamma^{(N)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(N)})$, который представляется вектором $[\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e}-\mathbf{r}^{(N)}]$. Тогда, имеет место

$$\cos\phi(\lambda) = \frac{|\gamma^{(N)}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{(N)})|}{|\gamma^{(N)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(N)})|} = \frac{|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|}{|\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')|}\,, \tag{18}$$

т.е. угол $\phi(\lambda)$ между лучами, выходящими из точки $\mathbf{r}'$, не изменяется при отражениях лучей от плоскостей $\Gamma_N, \Gamma^{(1)}_{N-1}, ..., \Gamma^{(N-1)}_1$. Здесь, длина луча $\gamma^{(N)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(N)})$ равна

$$|\gamma^{(N)}(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}^{(N)})| = \frac{|[\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e}]-\mathbf{r}|}{\sin\,\phi(\lambda)} = \frac{\lambda}{\sin\,\phi(\lambda)}\,.$$

Из формулы (18) следует

$$\cos\,\phi(\lambda) = \lambda^{-1}|\gamma^{(N)}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{(N)})|\sin\,\phi(\lambda)\,, \quad |\gamma^{(N)}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{(N)})|^{-1} = \lambda^{-1}\mathrm{tg}\,\phi(\lambda)\,.$$

С другой стороны, из той же формулы получаем, что

$$\frac{|\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')| - |\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|}{|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|} = [\cos\,\phi(\lambda)]^{-1} - 1 = \frac{2\sin^2(\phi(\lambda)/2)}{1-2\sin^2(\phi(\lambda)/2)}\,.$$

Следовательно, на основании (17),

$$(\mathbf{e}, \nabla|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|) = \lim_{\lambda\to+0} \frac{|\gamma(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{e},\mathbf{r}')| - |\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|}{\lambda} =$$

$$= |\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')| \lim_{\lambda\to+0} \lambda^{-1} \frac{2\sin^2(\phi(\lambda)/2)}{1-2\sin^2(\phi(\lambda)/2)} = \frac{1}{2}|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')| \lim_{\lambda\to+0} \lambda^{-1}\phi^2(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2}|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')| \left(\lim_{\lambda\to+0} \lambda^{-1}\mathrm{tg}\,\phi(\lambda)\right) \lim_{\lambda\to+0} \phi(\lambda) =$$

$$= \frac{|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|}{2|\gamma^{(N)}(\mathbf{r},\mathbf{r}^{(N)})|} \lim_{\lambda\to+0} \phi(\lambda) = 0\,. \quad \blacksquare$$

Следствием доказанного утверждения является

Теорема 2. *Вектор-функция $P_\mu(\mathbf{r},t;T)$ представляет собой потенциальное поле при $\mathbf{r}\in\Omega$, $P_\mu(\mathbf{r},t;T) = \nabla_\mu F(\mathbf{r},t;T)$ с потенциалом*

$$F(\mathbf{r},t;T) = \alpha^3 \int_\Omega G(\mathbf{r},\mathbf{r}') P_0[T(\mathbf{r}',t)] d\mathbf{r}'\,, \tag{19}$$

где

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\alpha^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \theta^l \sum_{\gamma\in\Gamma_l(\mathbf{r},\mathbf{r}')} \exp\left(-\alpha|\gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')|\right)\,. \tag{20}$$

$\square$ В силу (14) – (16) имеет место $\nabla_\mu G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = Q_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, где градиент вычисляется по первому аргументу. Формулы (19), (20) непосредственно следует из формул (5), (11). $\blacksquare$

4. Вычисление потенциала в случае бесконечного слоя. В завершение работы вычислим потенциал $F(\mathbf{r},t;T)$ в частном случае задачи радиационно-кондуктивного теплообмена с постоянным показателем преломления g. Мы будем считать, что область Ω представляет собой бесконечно протяжённый слой толщины L, $\Omega = \{\mathbf{r} = \langle x,y,z\rangle : x\in[0,L]; y,z\in\mathbb{R}\}$.

Найдём длину пути $|\gamma_a(\mathbf{r},\mathbf{r}')|$, пройденного лучом между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, где $a=\pm$ – индекс, указывающий от какой границы области произошло последнее отражение прежде чем луч попал в точку $\mathbf{r}$. Знаки $+$ и $-$ указывают на то, что последние отражение произошло от границы области с координатами $\langle L,y,z\rangle$ и $\langle 0,y,z\rangle$, соответственно. Расстояние, пройденное лучом зависит от числа отражений l от границ области, которых может быть как чётное, так и нечётное число, и от пространственного расположения точек $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$.

Обозначим посредством $n_{\mu,a}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $\mu=1,2,3$ – вектор, показывающий направление прихода луча $\gamma_a(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ в точку $\mathbf{r}$ из $\mathbf{r}'$. Тогда положим $\langle\gamma_{\mu,a};\mu=1,2,3\rangle \equiv \langle\gamma_{\mu,a}(\mathbf{r},\mathbf{r}',l);\mu=1,2,3\rangle$, где

$$\gamma_{\mu,a}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = n_{\mu,a}(\mathbf{r},\mathbf{r}')|\gamma_a(\mathbf{r},\mathbf{r}')|\,.$$

По выбранному нами расположению системы координат, слой имеет толщину L вдоль оси x, поэтому компонента $\gamma_{1,a}$ – единственная компонента, которая зависит от числа отражений l и индекса a, в то время как компоненты $\gamma_{2,a}$ и $\gamma_{3,a}$ остаются неизменными при изменении l и a, ввиду бесконечных размеров области Ω в направлениях координатных осей y и z.

Остановимся подробнее на вычислении компоненты $\gamma_{1,a}$. Расстояние пройденное лучом, между первым и последним отражениями, равно $(l-1)L$, независимо от какой границы происходит последнее отражение. К этой величине добавляется расстояние, пройденное от точки $\mathbf{r}'$ до точки первого отражения от границы слоя и от точки последнего отражения до точки $\mathbf{r}$. Знак этой добавки зависит от того, совпадают или отличаются друг от друга эти плоскости, составляющие границу слоя. С учётом сказанного, первая компонента вектора $\gamma_{\mu,a}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ рассчитывается следующим образом. Если последнее отражение луча произошло от границы с $x=0$, то будем различать два случая: 1) первое отражение также произошло от границы с $x=0$, 2) первое отражение произошло от границы с $x=L$. В первом случае,

$$\gamma_{1,-} = x' + (l-1)L + x = (l-1)L + (x+x')\,,$$

во втором –

$$\gamma_{1,-} = (L-x') + (l-1)L + x = lL + (x-x')\,,$$

где $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{r}' = \langle x', y', z'\rangle$. Точно также рассчитываем формулу для $\gamma_{1,+}$. В случае, если первое отражение произошло от границы $x=0$, имеем

$$\gamma_{1,+} = -[x' + (l-1)L + L - x] = -lL + (x-x')\,,$$

а если от границы $x=L$ –

$$\gamma_{1,+} = -[(L-x') + (l-1)L + (L-x)] = -(l+1)L + (x+x')\,,$$

где знак (-) перед скобками учитывает то обстоятельство, что компоненты вектора должны быть отрицательными, если последнее отражение произошло от границы с $x=L$.

Объединим все эти выражения в одну формулу. Если первое отражение произошло от той же границы, от которой произошло последнее отражение, то первая компонента вектора имеет вид

$$\gamma_{1,a} = (x+x') - aL(l+a1)\,. \tag{21}$$

В противоположном случае, получаем

$$\gamma_{1,a} = (x-x') - alL\,. \tag{22}$$

Заметим, что эти формулы переходят друг в друга при перемене местами плоскостей отражений, так как при таком преобразовании, необходимо произвести замены $x \Rightarrow (L-x)$, $a \Rightarrow (-a)$ и изменить знак перед компонентой вектора, учитывая, что изменение правой системы координат на левую приводит к изменению знака компонент вектора $\gamma_{\mu,a}$. Теперь, объединим полученные выражения (21) и (22) в одну формулу. С этой целью, заметим, что формула (21) получается при нечётном числе отражений луча от плоскостей границы слоя, а вторая – при чётном. Поэтому, эти формулы записываются единым образом

$$\gamma_{1,a} \equiv \gamma_{1,a}(x,x') = (x-(-1)^l x') - aL\left[l + \frac{a}{2}(1-(-1)^l)\right] . \tag{23}$$

Так как компоненты $\gamma_{2,a} = y-y'$, $\gamma_{3,a} = z-z'$ не зависят от a и l, то длина пути, пройденного лучом от пространственной точки $\mathbf{r}'$ до $\mathbf{r}$ равна

$$|\gamma_{\mu,a}(\mathbf{r},\mathbf{r}')| = \left[(\gamma_{1,a}(x,x'))^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}} . \tag{24}$$

Найдём теперь выражение для потенциала в рассматриваемом случае. При этом будем предполагать, что распределение температуры зависит только от координаты x. Тогда, в интеграле, определяющем потенциал $F(\mathbf{r},t)$, можно явно выполнить интегрирование по поперечным координатам y,z, так как функция $P_0[T(x,t)]$ зависит только от координаты x. Подставляя явное выражение для ядра (20) в (19), воспользуемся формулой (24) для длины луча. Переходя, далее, к полярным координатам (ρ,ϕ) в плоскости $\langle y,z\rangle$ и совершая замену переменной интегрирования $\eta = |\gamma_{\mu,a}(\mathbf{r},\mathbf{r}')| = [(\gamma_{1,a})^2(x,x') + \rho^2]^{1/2}$ в полученном интеграле, найдём, в результате, следующее представление для потенциала, после интегрирования по η от $|\gamma_{1,a}(x,x')|$ до ∞,

$$F(x,t;T) = -2\pi\alpha \int_0^L P_0[T(x',t)] \sum_{a=\pm}\sum_{l=0}^{\infty} \theta^l [|\gamma_{1,a}(x,x')| + \alpha^{-1}] e^{-\alpha|\gamma_{1,a}(x,x')|} dx' .$$

Подставляя в него явное выражение (23) для $\gamma_{1,a}(x,x')$ и выполнив суммирование по a и l, находим формулу для потенциала $F(x,t;T)$, который, как естественно было ожидать, не зависит от y и z,

$$F(x,t;T) = -4\pi \int_0^L G(x,x') P_0[T(x',t)] dx' , \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} G(x,x') &= \alpha|x-x'|\exp[-\alpha|x-x'|] + \exp[-\alpha|x-x'|] + \\ &+ \frac{\alpha L\theta\exp(-2\alpha L)}{(1-\theta^2\exp(-2\alpha L))^2}[\exp(\alpha(x+x')) + 2\theta\cosh\alpha(x-x') + \theta^2\exp(-\alpha(x+x'))] + \\ &+ \frac{\alpha\theta}{1-\theta^2\exp(-2\alpha L)}\Big\{\theta(x-x')\exp(-2\alpha L)\sinh\alpha(x-x') + \\ &+ \frac{1}{2}(x+x')[\exp(-\alpha(x+x')) - \exp(-2\alpha L)\exp(\alpha(x+x'))]\Big\} + \end{aligned}$$

$$+\frac{\theta}{1-\theta^2\exp(-2\alpha L)}\left\{\theta\exp(-2\alpha L)\cosh\alpha(x-x')+\frac{1}{2}\exp(-\alpha(x+x'))+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\exp(-2\alpha L)\exp(\alpha(x+x'))\right\}.$$

Подставляя найденное выражение (25) в формулы (3) и (4), мы получаем эволюционное уравнение для распределения температуры в бесконечном слое. Для того чтобы завершить постановку начально-краевой задачи, необходимо добавить к нему зависимость интенсивности излучения $P_0[T]$ от температуры и, тем самым, сделать систему уравнений (3), (4) самосогласованной. Функция $P_0[T]$ определяется свойствами среды, в которой распространяется излучение. В общем, с физической точки зрения, случае, эта функция возрастает с ростом T не медленнее чем T^3.

Литература

[1] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. – М.: Наука. 1987. – 352 с.

[2] Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением. – Л.: Энергия. Ленинградское отделение. 1972. – 295с.

Смолкин Г.Г.

Разрешимость в L_p-пространстве парных операторов одномерной дискретной свертки с разрывным символом специального типа

В [1] исследуется разрешимость действующих в L_p-пространстве операторов Теплица, символы некоторых принадлежат L_p-мультипликаторному аналогу алгебры Дугласа $D = H_\infty + C$. В настоящей работе изучаются вопросы разрешимости некоторых парных операторов дискретной свертки с символом такого типа.

1. Пусть $p \in (1, \infty)$; $\mathbb{T}$ — единичная окружность в комплексной плоскости с обычной мерой; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел с дискретной мерой; $L_p(\mathbb{T})$ и $L_p(\mathbb{Z})$ — банаховы пространства суммируемых функций на $\mathbb{T}$ и $\mathbb{Z}$ соответственно; $L_\infty(\mathbb{T})$ — банахова алгебра измеримых существенно ограниченных функций; $L_0(\mathbb{Z})$ — линейное пространство всех финитных функций на $\mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{Z}))$ банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в $L_p(\mathbb{Z})$, и через $\mathcal{K}(L_p(\mathbb{Z}))$ — идеал компактных операторов в $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{Z}))$. Пусть I — единичный оператор в $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{Z}))$, P^+ — оператор умножения на характеристическую функцию множества $\{k \in \mathbb{Z} : k \geq 0\}$, $P^- = I - P^+$. Очевидно, что $\|P^+\| = \|P^-\| = 1$.

Напомним, что сверткой функций $\varphi(\in L_p(\mathbb{Z}))$ и $\psi(\in L_0(\mathbb{Z}))$ называется функция $\varphi * \psi$, которая определяется по правилу

$$(\varphi * \psi)(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(m-k)\psi(k), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{T}) \longrightarrow L_2(\mathbb{Z})$ — изометрический изоморфизм, определяемый преобразованием Фурье. Следуя [1], с. 48, через M^p обозначим множество всех $a \in L_1(\mathbb{T})$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

$$1) \forall \psi \in L_0(\mathbb{Z}) : \mathcal{F}(a) * \psi \in L_p(\mathbb{Z});$$

$$2) \sup_{\psi \in L_0(\mathbb{Z}),\, \psi \neq 0} \frac{\|\mathcal{F}(a) * \psi\|_p}{\|\psi\|_p} < +\infty.$$

Нетрудно видеть, что если $a \in M^p$, то на $L_0(\mathbb{Z})$ определен линейный ограниченный по норме $L_p(\mathbb{Z})$ оператор, действующий по правилу $\psi \mapsto \mathcal{F}(a) * \psi$, норма которого совпадает со значением выражения во втором условии определения M^p. Поскольку множество $L_0(\mathbb{Z})$ является всюду плотным в $L_p(\mathbb{Z})$, то по теореме Банаха этот оператор продолжается с сохранением нормы до оператора, действующего в $L_p(\mathbb{Z})$. Обозначим его $C_{\mathcal{F}(a)}$ и будем называть оператором одномерной дискретной свертки с ядром $\mathcal{F}(a)$.

Хорошо известно (см. [1], с. 68-70), что

1) множество M^p является банаховой алгеброй с определенной на ней нормой $\|a\|_{M^p} = \|C_{\mathcal{F}(a)}\|_{\mathcal{L}(L_p(\mathbb{Z}))}$,

2) $M^p \subset M^2 = L_\infty(\mathbb{T})$.

Пусть $H_\infty(\mathbb{T})$ — пространство Харди функций из $L_\infty(\mathbb{T})$, имеющих аналитическое продолжение на внутренность $\mathbb{T}$; $H^p_\infty(\mathbb{T}) = H_\infty(\mathbb{T}) \cap M^p$; $C^p(\mathbb{T})$ — замыкание в M^p множества тригонометрических полиномов $\mathcal{P} = \mathcal{F}^{-1}(L_0(\mathbb{Z}))$. В [1], с. 76, доказано, что множество $D_p = H^p_\infty(\mathbb{T}) + C^p(\mathbb{T})$ является замкнутой подалгеброй M^p, порожденной функциями из $H^p_\infty(\mathbb{T}) \cup \bar{t}$. Этот результат обобщает известный результат Сарасона для алгебры Дугласа $D = D_2$ (см. [2], с. 373). Обозначим $D^+_p = D_p$, $D^-_p = \overline{D_p} = \{\bar{a} : a \in D_p\}$.

Если $a \in M^p$, то операторы

$$H^\pm_{\mathcal{F}(a)} = P^\mp C_{\mathcal{F}(a)} P^\pm, \quad T^\pm_{\mathcal{F}(a)} = P^\pm C_{\mathcal{F}(a)} P^\pm,$$

называемые соответственно операторами Ганкеля и Теплица, принадлежат $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{Z}))$. Легко видеть, что

$$C_{\mathcal{F}(a)} P^\pm = H^\pm_{\mathcal{F}(a)} + T^\pm_{\mathcal{F}(a)}. \tag{1}$$

Следующая лемма является естественным обобщением теоремы П. Хартмана (см. [3], с. 63) на случай произвольного p. Для полноты приведем лемму с доказательством.

Лемма 1. *Если $a_\pm \in D^\pm_p$, то $H^\pm_{\mathcal{F}(a_\pm)} \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{Z}))$.*

Доказательство. Пусть $a_+ = h_+ + c$, где $h_+ \in H^p_\infty(\mathbb{T})$, $c \in C^p(\mathbb{T})$. Тогда $H^+_{\mathcal{F}(a_+)} = H^+_{\mathcal{F}(h_+)} + H^+_{\mathcal{F}(c)}$. Очевидно, что $H^+_{\mathcal{F}(h_+)} = 0$. Покажем, что $H^+_{\mathcal{F}(c)} \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{Z}))$. Действительно, найдется такая последовательность $\{c_n\}^{+\infty}_{n=1} \subset \mathcal{P}$, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \|c - c_n\|_{M^p} = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \|H^+_{\mathcal{F}(c)} - H^+_{\mathcal{F}(c_n)}\| = \lim_{n\to+\infty} \|H^+_{\mathcal{F}(c-c_n)}\| \leq$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \|C_{\mathcal{F}(c-c_n)}\| = \lim_{n\to+\infty} \|c - c_n\|_{M^p} = 0.$$

Поскольку операторы $H^+_{\mathcal{F}(c_n)}$ являются конечномерными, то $H^+_{\mathcal{F}(a_+)} = H^+_{\mathcal{F}(c)} \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{Z}))$.

Пусть $a_- \in D^-_p$. Обозначим $a_+ = \bar{a}_-$. Нетрудно видеть, что оператор $H^-_{\mathcal{F}(a_-)}$ является сопряженным к оператору $H^+_{\mathcal{F}(a_+)}$ и, следовательно, также принадлежит $\mathcal{K}(L_p(\mathbb{Z}))$. •

Парными операторами одномерной дискретной свертки будем называть операторы вида:

$$L = C_{\mathcal{F}(a_+)} P^+ + C_{\mathcal{F}(a_-)} P^-, \tag{2}$$

где $a_\pm \in D^\pm_p$.

2. Рассмотрим $\varphi \in D_p$. Обозначим через $\tilde{\varphi}$ непрерывное продолжение φ на внутренность $\mathbb{T}$. Пусть $\mathbb{T}_r$ — окружность радиуса $r \in (0,1)$; φ_r — ограничение $\tilde{\varphi}$ на $\mathbb{T}_r$. Через $G(D^\pm_p)$ обозначим множество функций, обратимых в $D^\pm_p$. В силу теоремы Дугласа (см. [1], с. 81) если $\varphi \in G(D_p)$, то существует такое число r_0, что $\varphi_r(t) \neq 0$, где $r_0 < r < 1$, $t \in \mathbb{T}_r$. При этом индекс φ корректно определяется следующим образом:

$$\operatorname{ind}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\Delta \arg(\varphi_{r_0}).$$

Обозначим через $\dim(\ker(L))$ размерность ядра оператора L. Оператор, сопряженный к L, будем обозначать L^*. Напомним, что если L фредгольмов, то его индекс определяется по формуле:

$$\operatorname{Ind}(L) = \dim(\ker(L)) - \dim(\ker(L^*)).$$

Теорема 1. *Парный оператор L вида* (2) *фредгольмов тогда и только тогда, когда*

$$a_\pm \in G(D_p^\pm). \tag{3}$$

В случае фредгольмовости:

$$\operatorname{Ind}(L) = -\operatorname{ind}(a_+ \cdot \bar{a}_-). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть L — оператор вида (2). Из соотношения (1) и леммы 1 вытекает, что

$$L = T^+_{\mathcal{F}(a_+)} + T^-_{\mathcal{F}(a_-)} + K,$$

где $K = H^+_{\mathcal{F}(a_+)} + H^-_{\mathcal{F}(a_-)} \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{Z}))$. Поскольку L фредгольмов тогда и только тогда, когда $L - K$ фредгольмов, причем $\operatorname{Ind}(L) = \operatorname{Ind}(L-K)$, то, не нарушая общности, далее будем предполагать, что $K = 0$.

Банахово пространство $L_p(\mathbb{Z})$ можно представить в виде прямой суммы своих подпространств:

$$L_p(\mathbb{Z}) = P^+(L_p(\mathbb{Z})) \oplus P^-(L_p(\mathbb{Z})).$$

Обозначим через $\tilde{T}^\pm_{\mathcal{F}(a_\pm)}$ ограничение $T^\pm_{\mathcal{F}(a_\pm)}$ на $P^\pm(L_p(\mathbb{Z}))$. Тогда оператор L можно записать в виде матрицы:

$$L = \begin{pmatrix} \tilde{T}^+_{\mathcal{F}(a_+)} & 0 \\ 0 & \tilde{T}^-_{\mathcal{F}(a_-)} \end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что L фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовы одновременно $\tilde{T}^+_{\mathcal{F}(a_+)}$ и $\tilde{T}^-_{\mathcal{F}(a_-)}$. В [1], с. 78, доказано, что $\tilde{T}^+_{\mathcal{F}(a_\pm)}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда выполняется (3). Очевидно, что аналогичное утверждение справедливо и для $\tilde{T}^-_{\mathcal{F}(a_\pm)}$.

Пусть L фредгольмов. Докажем (4). Легко видеть, что $L = L_+ L_-$, где

$$L_+ = \begin{pmatrix} \tilde{T}^+_{\mathcal{F}(a_+)} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, L_- = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{T}^-_{\mathcal{F}(a_-)} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что L_+, L_- фредгольмовы. Следовательно,

$$\mathrm{Ind}(L) = \mathrm{Ind}(L_+) + \mathrm{Ind}(L_-).$$

Нетрудно видеть, что

$$\dim(\ker(L_+)) = \dim(\ker(\tilde{T}^+_{\mathcal{F}(a_+)})), \quad \dim(\ker(L_+^*)) = \dim(\ker(\tilde{T}^+_{\mathcal{F}(\bar{a}_+)})).$$

Тогда $\mathrm{Ind}(L_+) = \mathrm{Ind}(\tilde{T}^+_{\mathcal{F}(a_+)})$. Аналогично, $\mathrm{Ind}(L_-) = \mathrm{Ind}(\tilde{T}^-_{\mathcal{F}(a_-)}))$. Нетрудно показать, что

$$\mathrm{Ind}(\tilde{T}^-_{\mathcal{F}(a_-)}) = \mathrm{Ind}(\tilde{T}^+_{\mathcal{F}(\bar{a}_-)}).$$

Известно (см. [1], с. 78), что $\mathrm{Ind}(\tilde{T}^+_{\mathcal{F}(a_+)}) = -\mathrm{ind}(a_+)$. Тогда

$$\mathrm{Ind}(L) = -\mathrm{ind}(a_+) - \mathrm{ind}(\bar{a}_-) = -\mathrm{ind}(a_+ \cdot \bar{a}_-).\bullet$$

Замечание 1. Рассмотрим два парных оператора

$$L_1 = C_{\mathcal{F}(a_+)}P^+ + C_{\mathcal{F}(a_-)}P^-, \quad L_2 = C_{\mathcal{F}(b_+)}P^+ + C_{\mathcal{F}(b_-)}P^-,$$

где $a_\pm, b_\pm \in D_p^\pm$. Очевидно, что $L_1 + L_2$ также является парным оператором. С учетом равенства $P^+ + P^- = I$ и леммы 1 получаем

$$L_1L_2 = C_{\mathcal{F}(a_+)}C_{\mathcal{F}(b_+)}P^+ - C_{\mathcal{F}(a_+)}H^+_{\mathcal{F}(b_+)} + C_{\mathcal{F}(a_+)}H^-_{\mathcal{F}(b_-)} +$$

$$+C_{\mathcal{F}(a_-)}H^+_{\mathcal{F}(b_+)} + C_{\mathcal{F}(a_-)}C_{\mathcal{F}(b_-)}P^- - C_{\mathcal{F}(a_-)}H^-_{\mathcal{F}(b_-)} =$$
$$= C_{\mathcal{F}(a_+b_+)}P^+ + C_{\mathcal{F}(a_-b_-)}P^- + K,$$

где $K \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{Z}))$. Таким образом, любой оператор L из незамкнутой алгебры, порожденной парными операторами вида (2), представим в виде

$$L = C_{\mathcal{F}(c_+)}P^+ + C_{\mathcal{F}(c_-)}P^- + K, \tag{5}$$

где $c_\pm \in D_p^\pm$, $K \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{Z}))$, и поэтому к нему применима терема 1.

Замечание 2. Особый интерес представляет L_p-мультипликаторный аналог C^*-алгебры Сарасона QC всех квазинепрерывных функций [4]:

$$\mathrm{QC}^p = D_p^+ \cap D_p^-.$$

В [5] доказано, что любой оператор из банаховой алгебры U, порожденной действующими в $L_2(\mathbb{Z})$ парными операторами дискретной свертки вида (2), где $a_\pm \in \mathrm{QC}$, однозначно представим в виде (5), где $c_\pm \in \mathrm{QC}$. Таким образом, теорема 1 применима для любого оператора из U.

Замечание 3. Рассмотрим оператор

$$L_1 = P^+C_{\mathcal{F}(a_-)} + P^-C_{\mathcal{F}(a_+)},$$

где $a_\pm \in D_p^\pm$. Тогда $L_1^* = C_{\mathcal{F}(\bar{a}_-)}P^+ + C_{\mathcal{F}(\bar{a}_+)}P^-$. Поскольку L_1 и L_1^* фредгольмовы одновременно, то в силу теоремы 1 оператор L_1 фредгольмов тогда и только тогда, когда выполняется (3). Причем в случае фредгольмовости

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{L}_1) = -\mathrm{Ind}(\mathrm{L}_1^*) = \mathrm{ind}(a_+ \cdot \bar{a}_-).$$

Замечание 4. Рассмотрим оператор

$$L_2 = C_{\mathcal{F}(a_-)}P^+ + C_{\mathcal{F}(a_+)}P^-,$$

где $a_\pm \in D_p^\pm$. С учетом (1)

$$L_2 = T^+_{\mathcal{F}(a_-)} + T^-_{\mathcal{F}(a_+)} + H^+_{\mathcal{F}(a_-)} + H^-_{\mathcal{F}(a_+)}.$$

Вообще говоря, операторы Ганкеля $H^+_{\mathcal{F}(a_-)}$, $H^-_{\mathcal{F}(a_+)}$ не принадлежат идеалу $\mathcal{K}(L_p(\mathbb{Z}))$ (см. [1], с. 77). Поэтому рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1, к операторам L_2 и L_2^* не применимы.

Литература

[1] Botcher A., Silbermann B. Analisys of Toeplitz operators Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. 1990. – 527 p.

[2] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции М.: Мир. 1984. – 469 с.

[3] Пеллер В.В., Хрущев С.В., Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы// Успехи математических наук. – 1982. – Т.37, №1(223). – С. 53–124

[4] Sarason D.E. Toeplitz Operators with Piecewise Quasicontinuous Symbols// Indiana University Mathematics Journal. – 1977. – V.26, №59. – P. 817-838.

[5] Деундяк В.М., Смолкин Г.Г. Операторы дискретной свертки с разрывными символами// Известия вузов. Математика. – 2007. – Т.8, №543. – С. 74-76.

Солодушкин С.И.

Линейно-квадратичная задача стабилизации систем с запаздыванием по времени.

Рассматриваются вопросы линейно-квадратичной стабилизации систем с последействием в управлении и фазовых координатах. Работа продолжает исследования свердловской математической школы по теории управления [1]—[3]. Исследование примыкает к работам [4]—[6].

Постановка задачи.

Рассмотрим систему с последействием вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \quad & Ax(t) + A_\tau x(t-\tau) + \int_{-\tau}^{0} A(s)x(t+s)\,ds + \\ & Bu(t) + B_\Delta u(t-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} B(\zeta)u(t+\zeta)\,d\zeta. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь τ и Δ — положительные константы,
A, A_τ — постоянные $n \times n$ матрицы,
B, B_Δ— постоянные $n \times r$ матрицы,
$A(\cdot)$ —$n \times n$ матрицы с непрерывными на $[-\tau; 0]$ элементами,
$B(\cdot)$ —$n \times r$ матрицы с непрерывными на $[-\Delta; 0]$ элементами,
$x \in R^n$ — фазовый вектор (траектория движения),
$u \in R^r$ — управление.

Управление системой (1) осуществляется за счет выбора конечномерного вектора $u(t) \in R^r$, при этом считаются известными предыстория управления $u(t+\cdot) = \{u(t+\zeta),\ -\Delta \leq \zeta < 0\}$, а также предыстория траектории $x(t+\cdot) = \{x(t+s),\ -\tau \leq s < 0\}$.

Фазовое пространство.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений для определения решений функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) (1) необходимо в каждый момент времени t знать вектор $x(t)$, а также функции предыстории $u(t+\zeta),\ -\Delta \leq \zeta < 0$, и $x(t+s),\ -\tau \leq s < 0$. Поэтому фазовым пространством ФДУ должно быть не конечномерное пространство R^n, а некоторое *функциональное* пространство.

Учитывая разделение конечномерных и бесконечномерных составляющих в структуре ФДУ, удобно в качестве фазового пространства рассматривать $H = R^n \times Q_{(n)}[-\tau; 0) \times Q_{(r)}[-\Delta; 0)$. Здесь $Q_{(n)}[-\tau; 0)$ — пространство кусочно-непрерывных на $[-\tau; 0)$ n-мерных функций, $Q_{(r)}[-\Delta; 0)$ — пространство кусочно-непрерывных на $[-\Delta; 0)$ r-мерных функций. Состоянием системы (1) будем называть тройку $\{x(t); x(t+s),\ s \in [-\tau; 0); u(t+\zeta),\ \zeta \in [-\Delta; 0)\} \in H$.

Условная запись ФДУ.

Будем использовать условные обозначения для ФДУ, следуя [4]. В фазовом пространстве H состояние системы (1) представляется в виде тройки $\{x(t); x(t+s),\ s\in[-\tau;0); u(t+\zeta),\ \zeta\in[-\Delta;0)\}$. Вводя обозначение $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\}$
$\{= x(t); x(t+s),\ s\in[-\tau;0); u(t+\zeta),\ \zeta\in[-\Delta;0)\}$, придем к следующей условной записи системы (1)

$$\dot{x} = Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} A(s)y(s)\,ds + Bu(t) + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} B(\zeta)w(\zeta)\,d\zeta. \quad (2)$$

Управление.

Состоянием системы (2) является тройка $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\}\in H$, поэтому управление для системы (2) ищется в классе отображений $u[t, x, y(\cdot), w(\cdot)]:\quad R\times R^n\times Q_{(n)}[-\tau;0)\times Q_{(r)}[-\Delta;0)\to R^r$. Конкретно, в классе линейных отображений

$$u[x, y(\cdot), w(\cdot)] = Ex + \int_{-\tau}^{0} L_\tau(s)y(s)\,ds + \int_{-\Delta}^{0} L_\Delta(\zeta)w(\zeta)\,d\zeta. \quad (3)$$

Здесь E —постоянная $r\times n$ матрица,
$L_\tau(\cdot)$ — $r\times n$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau;0]$ элементами,
$L_\Delta(\cdot)$ — $r\times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta;0]$ элементами.

Определение 1 *Отображение* $u[t, x(t), y(\cdot), w(\cdot)]: R\times R^n\times Q_{(n)}[-\tau;0)\times Q_{(r)}[-\Delta;0)\to R^r$ *называется синтезом управления, если для любых начальных данных* $\{t_0, x^0(t), y^0(\cdot), w^0(\cdot)\}\in R\times R^n\times Q_{(n)}[-\tau;0)\times Q_{(r)}[-\Delta;0)$ *существует единственное решение* $\{x(t),\ u(t)\}$, $t>0$, *системы функционально–дифференциальных уравнений*

$$\left\{\begin{array}{rl} \dot{x} = & Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} A(s)y(s)\,ds + Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} B(\zeta)w(\zeta)\,d\zeta \\ u = & Ex + \int_{-\tau}^{0} L_\tau(s)y(s)\,ds + \int_{-\Delta}^{0} L_\Delta(\zeta)w(\zeta)\,ds \end{array}\right. \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\left\{\begin{array}{l} x(0) = x^0, \\ x(t_0+s) = y^0(s),\ -\tau\le s<0, \\ u(t_0+\zeta) = w^0(\zeta),\ -\Delta\le\zeta<0. \end{array}\right. \quad (5)$$

Пара $\{x(t), u(t)\}$, $t>0$, называется *допустимым процессом*, а функция $x(t)$, $t>0$, — *траекторией* системы (2), соответствующей управлению (3), начальному моменту t_0 и начальной позиции $p^0 = \{x^0, y^0, w^0\}$.

Замечание. Здесь и далее без ограничения общности будем считать, что начальный момент времени $t_0 = 0$.

Система (4), называется замкнутой системой, соответствующей управлению с обратной связью (3).

Если матрицы $L_\tau(\cdot)$ и $L_\Delta(\cdot)$ кроме того, что непрерывны, имеют кусочно-непрерывные производные, то отображение (3) будет иметь в каждой точке $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\}$ производные:

$$\frac{\partial u[x, y(\cdot), w(\cdot)]}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial u[x, y(\cdot), w(\cdot)]}{\partial x} = E,$$

$$\partial_y u[x, y(\cdot), w(\cdot)] = L_\tau(0)x - L_\tau(-\tau)y(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \frac{d\,L_\tau(s)}{ds} y(s)\,ds,$$

$$\partial_w u[x, y(\cdot), w(\cdot)] = L_\Delta(0)u - L_\Delta(-\Delta)w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} \frac{d\,L_\Delta(\zeta)}{d\zeta} y(\zeta)\,d\zeta.$$

Продифференцировав по t обе части уравнения (3), придем к системе

$$\left\{\begin{array}{rl} \dot{x} = & Ax + A_\tau y(-\tau) + \displaystyle\int_{-\tau}^{0} A(s)y(s)\,ds + \\ & Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \displaystyle\int_{-\Delta}^{0} B(\zeta)w(\zeta)\,d\zeta, \\ \dot{u} = & E\dot{x} + L_\tau(0)x - L_\tau(-\tau)y(-\tau) + \displaystyle\int_{-\tau}^{0} \frac{d\,L_\tau(s)}{ds} y(s)\,ds + \\ & L_\Delta(0)u - L_\Delta(-\Delta)w(-\Delta) + \displaystyle\int_{-\Delta}^{0} \frac{d\,L_\Delta(\zeta)}{d\zeta} w(\zeta)\,d\zeta. \end{array}\right. \tag{6}$$

Подставив правую часть первого уравнения системы (6) вместо $\dot{x}$ во второе уравнение получаем *замкнутую систему в дифференциальной форме*

$$\left\{\begin{array}{rl} \dot{x} = & Ax + A_\tau y(-\tau) + \displaystyle\int_{-\tau}^{0} A(s)y(s)\,ds + \\ & Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \displaystyle\int_{-\Delta}^{0} B(\zeta)w(\zeta)\,d\zeta, \\ \dot{u} = & [EA + L_\tau(0)]x + [EA_\tau - L_\tau(-\tau)]y(-\tau) + \displaystyle\int_{-\tau}^{0} \left[EA(s) + \frac{L_\tau(s)}{ds}\right] y(s)\,ds + \\ & [EB + L_\Delta(0)]u + [EB_\Delta - L_\Delta(-\Delta)]w(-\Delta) + \displaystyle\int_{-\Delta}^{0} \left[EB(\zeta) + \frac{L_\Delta(\zeta)}{d\zeta}\right] y(\zeta)\,d\zeta. \end{array}\right. \tag{7}$$

Теорема 1 *Пусть в системе (4) матрицы $L_\tau(\cdot)$ и $L_\Delta(\cdot)$ непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные, тогда для любой начальной позиции $p^0 = \{x^0, y^0, w^0\} \in H$ существует единственный допустимый процесс $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$, удовлетворяющий*

1. *системе (4) при $t > 0$,*

2. *начальным условиям (5),*

3. условию $u(0) = Ex^0 + \int_{-\tau}^{0} L_\tau(s) y^0(s)\, ds + \int_{-\Delta}^{0} L_\Delta(\zeta) w^0(\zeta)\, ds.$

При этом функция $u(\cdot)$ *является непрерывной и кусочно-дифференцируемой при* $t > 0$ *и удовлетворяет системе (7).*

Доказательство теоремы приведем потом, а сначала покажем, что решение системы (7) с соответствующими начальными условиями существует и единственно. Для этого рассмотрим множество $E_\kappa[x^0, y^0(\cdot), u^0, w^0(\cdot)]$, $\kappa > 0$, состоящее из пар функций $\{x(t),\, u(t)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $x(\cdot) : [-\tau; \kappa] \to R^n$, $u(\cdot) : [-\Delta; \kappa] \to R^r$ непрерывны на $[0; \kappa]$;
2. $x(0) = x^0$, $u(0) = u^0$;
3. $x(s) = y^0(s),\ s \in [-\tau; 0)$;
4. $u(s) = w^0(s),\ s \in [-\Delta; 0)$.

Систему (7) можно записать в форме

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)],$$

где

$$F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)] =$$

$$\begin{pmatrix} Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} A(s) y(s)\, ds + \\ Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} B(\zeta) w(\zeta)\, d\zeta \\ (EA + L_\tau(0))x + (EA_\tau - L_\tau(-\tau)) y(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \left[EA(s) + \dfrac{L_\tau(s)}{ds} \right] y(s)\, ds + \\ (EB + L_\Delta(0))u + (EB_\Delta - L_\Delta(-\Delta)) w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} \left[EB(\zeta) + \dfrac{L_\Delta(\zeta)}{d\zeta} \right] y(\zeta)\, d\zeta \end{pmatrix}.$$

Справедлива (см. [4], стр. 73)

Теорема 2 *Пусть отображение* $F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)]$
1) локально липшецево по $\{x, y(\cdot), u, w(\cdot)\}$, *т.е. для любого ограниченного множества* $D \subset R^n \times Q_{(n)}[-\tau; 0) \times R^r \times Q_{(r)}[-\Delta; 0)$ *существуют положительные константы* L_1, L_2, L_3, L_4 *такие, что при* $\{x_1, y_1(\cdot), u_1, w_1(\cdot)\}$, $\{x_2, y_2(\cdot), u_2, w_2(\cdot)\} \in D$

$$\Big\| F[t, x_1, y_1(\cdot), u_1, w_1(\cdot)] - F[t, x_2, y_2(\cdot), u_2, w_2(\cdot)] \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant L_1 \|x_1 - x_2\|_{R^n} + L_2 \|y_1(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{Q_{(n)}[-\tau;0)} + L_3 \|u_1 - u_2\|_{R^r} + L_4 \|w_1(\cdot) - w_2(\cdot)\|_{Q_{(r)}[-\Delta;0)};$$

2) непрерывно по сдвигу, т.е. для каждой пятерки $\{t_0, x^0, y^0(\cdot), u^0, w^0(\cdot)\} \in R \times R^n \times Q_{(n)}[-\tau; 0) \times R^r \times Q_{(r)}[-\Delta; 0)$ *существует* $\kappa > 0$ *такое, что для всех* $\{x(\cdot), u(\cdot)\} \in E_\kappa[x^0, y^0(\cdot), u^0, w^0(\cdot)]$ *функция* $\Psi(t) = F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)]$ *непрерывна на* $[t_0; t_0 + \kappa]$.

Тогда для любых начальных данных $\{t_0, x^0, y^0(\cdot), u^0, w^0(\cdot)\} \in R \times R^n \times Q_{(n)}[-\tau; 0) \times R^r \times Q_{(r)}[-\Delta; 0)$ *существует* $\overline{\kappa} \in (0; \kappa]$ *такое, что на отрезке* $[t_0 - \min\{\tau, \Delta\}; t_0 + \overline{\kappa}]$ *решение системы (7), удовлетворяющее соответствующим начальным условиям существует и единственно.*

Отображение $F[t, x, y(\cdot), u, w(\cdot)]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим систему (7) как систему линейных автономных ФДУ относительно переменных $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$, с начальными условиями

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0, \\ x(t_0 + s) = y^0(s),\ s \in [-\tau, 0), \\ u(t_0) = Ex^0 + \displaystyle\int_{-\tau}^{0} L_\tau(s) y^0(s)\, ds + \int_{-\Delta}^{0} L_\Delta(\zeta) w^0(\zeta)\, ds, \\ u(t_0 + \zeta) = w^0(\zeta),\ \zeta \in [-\Delta, 0) \end{cases} \tag{8}$$

Задача Коши (7)—(8) согласно теореме 2 имеет единственное решение $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$. В силу линейности решение определено при всех $t > 0$ (см. [7]). Покажем, что пара $\{x^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ является допустимым процессом и удовлетворяет системе (4).

Так как $u^*(\cdot),\ t \geq 0$, удовлетворяет соотношению

$$\dot{u}^* =$$
$$[EA + L_\tau(0)]x^* + [EA_\tau - L_\tau(-\tau)]y^*(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \left[EA(s) + \frac{d\,L_\tau(s)}{ds}\right] y^*(s)\, ds +$$
$$[EB + L_\Delta(0)]u^* + [EB_\Delta - L_\Delta(-\Delta)]w^*(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} \left[EB(\zeta) + \frac{d\,L_\Delta(\zeta)}{d\zeta}\right] y^*(\zeta)\, d\zeta,$$

то, учитывая, что

$$\begin{aligned} \dot{x}^* = \ & Ax^* + A_\tau y^*(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} A(s) y^*(s)\, ds + \\ & Bu^* + B_\Delta w^*(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} B(\zeta) w^*(\zeta)\, d\zeta, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{u}^* = \ & E\dot{x}^* + L_\tau(0)x^* - L_\tau(-\tau)y^*(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \frac{d\,L_\tau(s)}{ds} y^*(s)\, ds + \\ & L_\Delta(0)u^* - L_\Delta(-\Delta)w^*(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} \frac{d\,L_\Delta(\zeta)}{d\zeta} w^*(\zeta)\, d\zeta. \end{aligned}$$

Далее интегрируем обе части получившегося выражения

$$u^*(t) - u^*(0) = \; E[x^*(t) - x^*(0)] + \int_{-\tau}^{0} L_\tau(s) y^*(s)\, ds - \int_{-\tau}^{0} L_\tau(s) y^0(s)\, ds + \int_{-\Delta}^{0} L_\Delta(\zeta) w^*(\zeta)\, ds - \int_{-\Delta}^{0} L_\Delta(\zeta) w^0(\zeta)\, ds.$$

Учитывая, что $u^*(0) = Ex^*(0) + \int_{-\tau}^{0} L_\tau(s) y^0(s)\, ds + \int_{-\Delta}^{0} L_\Delta(\zeta) w^0(\zeta)\, ds$, получаем

$$u^*(t) = \; Ex^*(t) + \int_{-\tau}^{0} L_\tau(s) y^*(s)\, ds + \int_{-\Delta}^{0} L_\Delta(\zeta) w^*(\zeta)\, ds.$$

Теорема доказана.

Таким образом система (4) эквивалентна системе (7), если матрицы $L_\tau(\cdot)$ и $L_\Delta(\cdot)$ непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные на $[-\tau, 0)$ и $[-\Delta, 0)$ соответственно.

Замечание. В дальнейшем будем работать именно с такими матрицами $L_\tau(\cdot)$ и $L_\Delta(\cdot)$ не оговаривая это каждый раз особо.

Задача стабилизации.

Основной целью настоящей работы является построение стабилизирующих управлений для системы (1).

Определение 2 *Линейное управление (3) стабилизирует систему (1), если тривиальное решение системы (7) асимптотически x-устойчиво, т.е. устойчиво по переменной x.*

Отметим, что из асимптотической устойчивости (7) по всем переменным следует x-устойчивость, поэтому в дальнейшем рассмотрим вопрос о построении управления, для которого вся система (7) будет асимптотически устойчива.

Одним из методов решения задачи стабилизации является введение в рассмотрение некоторого квадратичного функционала качества и замена задачи стабилизации задачей управления. Сразу отметим, что задача состоит именно в стабилизации системы, поэтому структуру и коэффициенты функционала надо выбирать так, чтобы упростить *исходную* задачу.

Вычисление коэффициентов стабилизирующего управления для систем с последействием сводится к решению системы обобщенных уравнений Риккати (ОУР) (подробнее в следующем разделе). Серьезной трудностью, возникающей на пути практического применения этого метода является необходимость решения системы ОУР, представляющей собой систему алгебраических, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с запаздыванием и дифференциальных уравнений с частными производными. Приближенные методы решения ОУР являются сложными и неэффективными, поэтому особенно остро встает вопрос нахождения способов упрощения системы ОУР и последующего её решения.

В статье предложен метод явного сведения системы к одному алгебраическому уравнению, которое решается численно. Разработанный метод основан на идее введения дополнительных слагаемых в функционал качества.

Обобщенный квадратичный функционал качества.

Во многих работах, посвященных аналитическому конструированию регуляторов, рассматривается квадратичный функционал качества вида

$$J_* = \int_0^\infty \Big(x'\Phi_0 x + u'Mu\Big)\,dt.$$

Однако, поскольку выбор структуры вводимого функционала подчинен требованиям задачи стабилизации, то выгоднее рассмотреть функционал вида

$$\begin{gathered} J = J[x(\cdot),u(\cdot)] = \int_0^\infty \Big[x'\Phi_0 x + u'Mu + \\ 2x'\int_{-\tau}^0 \Phi_1(s)y(s)\,ds + \int_{-\tau}^0 y'(s)\Phi_2(s)y(s)\,ds + \\ \int_{-\tau}^0\int_{-\tau}^0 y'(s)\Phi_3(s,\nu)y(\nu)\,ds\,d\nu + y'(-\tau)\Phi_4 y(-\tau) + \\ 2x'\int_{-\Delta}^0 \Psi_1(s)w(s)\,ds + \int_{-\Delta}^0 w'(s)\Psi_2(s)w(s)\,ds + \\ \int_{-\Delta}^0\int_{-\Delta}^0 w'(s)\Psi_3(s,\nu)w(\nu)\,ds\,d\nu + w'(-\Delta)\Psi_4 w(-\Delta) + \\ 2y'(-\tau)\int_{-\Delta}^0 \Upsilon_1(s)w(s)\,ds + y'(-\tau)\Upsilon_2(s)w(-\Delta) + \\ 2\int_{-\tau}^0\int_{-\Delta}^0 y'(s)\Upsilon_3(s,\nu)w(\nu)\,ds\,d\nu\Big]\,dt. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь Φ_0 и Φ_4 — постоянные симметричные $n\times n$ матрицы; $\Phi_1(s)$ — $n\times n$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau;0]$ коэффициентами; $\Phi_2(s)$ — симметричная $n\times n$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau;0]$ коэффициентами; $\Phi_3(s,\nu)$ — $n\times n$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau;0]\times[-\tau;0]$ коэффициентами; $\Psi_1(s)$ — $n\times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta;0]$ коэффициентами; $\Psi_2(s)$ — симметричная $r\times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta;0]$ коэффициентами; $\Psi_3(s,\nu)$ — $r\times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta;0]\times[-\Delta;0]$ коэффициентами; Ψ_4 — постоянная симметричная $r\times r$ матрица; $\Upsilon_1(s)$ — $n\times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta;0]$ коэффициентами; Υ_2 — постоянная симметричная $n\times r$ матрица;$\Psi_3(s,\nu)$ — $n\times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau;0]\times[-\Delta;0]$ коэффициентами; M симметричная положительно определенная $r\times r$ матрица.

Матрицы $\Phi_0, ..., \Upsilon_3$ являются некоторыми заранее не фиксированными параметрами; распоряжаясь ими мы сможем упростить систему ОУР и предложим эффективный метод её решения.

Все слагаемые кроме второго в подынтегральном выражении обозначим $Z = Z[x(\cdot), u(\cdot)]$. Теперь J можно записать коротко так

$$J[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_0^\infty \Big[Z[x(\cdot), u(\cdot)] + u'Mu\Big]\,dt.$$

Обобщенные уравнения Риккати.

При построении синтеза управления на основе теории АКОР принципиальным является нахождение решений системы ОУР, описывающей коэффициенты управления. Ниже мы выведем ОУР. Отметим, что ОУР выводятся на основе необходимых условий минимума функционала качества.

Обозначим через $W[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ — оптимальное значение функционала качества для задачи (4), (9) в позиции $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\} \in H$.

Теорема 3 *Предположим, что существует решение задачи (4), (9) и $W[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ имеет вид*

$$\begin{gathered} W = W[x, y(\cdot), w(\cdot)] = x'Px + \\ 2x'\int_{-\tau}^0 D(s)y(s)\,ds + \int_{-\tau}^0\int_{-\tau}^0 y'(s)R(s,\nu)y(\nu)\,ds\,d\nu + \int_{-\tau}^0 y'(s)\Pi(s)y(s)\,ds + \\ 2x'\int_{-\Delta}^0 \Lambda(s)w(s)\,ds + \int_{-\Delta}^0\int_{-\Delta}^0 w'(s)\Theta(s,\nu)w(\nu)\,ds\,d\nu + \int_{-\Delta}^0 w'(s)\Xi(s)w(s)\,ds + \\ 2\int_{-\tau}^0\int_{-\Delta}^0 y'(s)\beta(s,\nu)w(\nu)\,ds\,d\nu + 2y'(-\tau)\int_{-\Delta}^0 \gamma(s)w(s)\,ds. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь

1. *P — симметричная $n \times n$ матрица*

2. *элементы $n \times n$ матриц $D(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы на $[-\tau, 0]$*

3. *элементы $n \times r$ матриц $\Lambda(\cdot)$ и $\Xi(\cdot)$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы на $[-\Delta, 0]$*

4. *элементы $n \times n$ матрицы $R(\cdot,\cdot)$ и её производных $\dfrac{\partial R(s,\nu)}{\partial s}$ и $\dfrac{\partial R(s,\nu)}{\partial s}$ непрерывны всюду на $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$ исключая, быть может, линию $s = \nu$*

5. *элементы $n \times r$ матрицы $\Theta(\cdot,\cdot)$ и её производных $\dfrac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial s}$ и $\dfrac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial s}$ непрерывны всюду на $[-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0]$ исключая, быть может, линию $s = \nu$*

6. *для матрицы $R(\cdot,\cdot)$ выполнено условие $R(s,\nu) = R'(\nu, s)$ на $[-\tau, 0] \times [-\tau, 0]$*

7. *для матрицы* $\Theta(\cdot,\cdot)$ *выполнено условие* $\Theta(s,\nu) = \Theta'(\nu,s)$ *на* $[-\Delta,0]\times[-\Delta,0]$.

8. *элементы* $n\times r$ *матрицы* $\beta(\cdot,\cdot)$ *и её производных* $\dfrac{\partial\beta(s,\nu)}{\partial s}$ *и* $\dfrac{\partial\beta(s,\nu)}{\partial s}$ *непрерывны всюду на* $[-\tau,0]\times[-\Delta,0]$,

9. *элементы* $n\times r$ *матрицы* $\gamma(\cdot)$ *непрерывны и кусочно-дифференцируемы на* $[-\Delta,0]$

Тогда матрицы $P, D(\cdot), R(\cdot,\cdot), \Pi(\cdot), \Lambda(\cdot), \Theta(\cdot,\cdot), \Xi(\cdot)$ *являются решением системы ОУР*

$$
\begin{array}{l}
P'A + A'P + D(0) + D'(0) + \Pi(0) + \Phi_0 = [P'B + \Lambda(0)]K[B'P + \Lambda'(0)]\\
\dfrac{d\,D(s)}{ds} = P'A(s) + A'D(s) + R(0,s) - [P'B + \Lambda(0)]K[B'D(s) + \beta'(s,0)] + \Phi_1(s)\\
\dfrac{d\Lambda(s)}{ds} = P'B(s) + A'\Lambda(s) + \beta(0,s) - [P'B + \Lambda(0)]K[B'\Lambda(s) + \Theta(0,s)] + \Psi_1(s)\\
\dfrac{d\,\Pi(s)}{ds} = \Phi_2(s)\\
\dfrac{d\,\Xi(s)}{ds} = \Psi_2(s)\\
\dfrac{\partial R(s,\nu)}{\partial s} + \dfrac{\partial R(s,\nu)}{\partial \nu} = D'(s)A(\nu) + A'(\nu)D(s) -\\
\qquad [D'(s)B + \beta(s,0)]K[B'D(\nu) + \beta'(\nu,0)] + \Phi_3(s,\nu)\\
\dfrac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial s} + \dfrac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial \nu} = \Lambda'(s)B(\nu) + B'(\nu)\Lambda(s) -\\
\qquad [\Lambda'(s)B + \Theta(s,0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0,\nu)] + \Psi_3(s,\nu)\\
\dfrac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial s} + \dfrac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial \nu} = D'(s)B(\nu) + A'(s)\Lambda(s) -\\
\qquad [D'(s)B + \beta(s,0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0,\nu)] + \Upsilon_3(s,\nu)\\
\dfrac{d\,\gamma(s)}{ds} = A'_\tau\Lambda(s) - \beta(-\tau,s) + \gamma(0)K[B'\Lambda(s) + \Theta(0,s)] + \Upsilon_1(s)
\end{array}
\tag{11}
$$

с граничными условиями

$$
\begin{array}{l}
D(-\tau) = P'A_\tau + \gamma(0)K[B'P + \Lambda'(0)]\\
\Lambda(-\Delta) = P'B_\Delta\\
\Pi(-\tau) = \Phi_4 + \gamma(0)K\gamma'(0)\\
\Xi(-\Delta) = \Psi_4\\
R(-\tau,s) = A'_\tau D(s) + \gamma(0)K[B'D(s) + \beta'(s,0)]\\
\Theta(-\Delta,s) = B'_\Delta\Lambda(s)\\
\beta'(s,-\Delta) = B'_\Delta D(s)\\
\gamma(-\Delta) = \Upsilon_2
\end{array}
\tag{12}
$$

и условиями симметрии $P = P'$, $\quad R(s,\nu) = R'(\nu,s)$, $\quad \Theta(s,\nu) = \Theta'(\nu,s)$.

Доказательство. В силу свойств матриц $D(\cdot), R(\cdot,\cdot), \Pi(\cdot), \Lambda(\cdot), \Theta(\cdot,\cdot), \Xi(\cdot)$, $\beta(\cdot,\cdot)$ функционал $W[x,y(\cdot),w(\cdot)]$ является инвариантно дифференцируемым в каждой позиции $(x,y(\cdot),w(\cdot))\in H$.

Построим функцию

$$\alpha(u) = \frac{\partial W'[x,y(\cdot),w(\cdot)]}{\partial x}\left[Ax + A_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} A(s)y(s)\,ds + \right.$$
$$\left. Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} B(\zeta)w(\zeta)\,d\zeta\right] +$$
$$\partial_y W[x,y(\cdot),w(\cdot)] + \partial_w W[x,y(\cdot),w(\cdot)] + Z[x,y(\cdot),w(\cdot)] + u'Mu. \tag{13}$$

Так как функционал $W[(x,y(\cdot),w(\cdot)]$ не убывает вдоль допустимых траекторий, а вдоль оптимальной траектории постоянен, то оптимальное стабилизирующее управление $u^*(x,y(\cdot),w(\cdot))$ должно минимизировать функцию $\alpha(u)$ и, более того, $\alpha(u^*(x,y(\cdot),w(\cdot))=0$. Функция $\alpha(u)$ является квадратичной формой относительно $u \in R^r$; учитывая, что

$$\frac{\partial^2\alpha(u)}{\partial^2 u} = 2(\Xi(0) + M) > 0,$$

значение u^*, минимизирующее $\alpha(u)$, может быть найдено из соотношения

$$\frac{\partial\alpha(u)}{\partial u} = 0.$$

Найдем градиент и инвариантные производные.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2Px + 2\int_{-\tau}^{0} D(s)y(s)\,ds + 2\int_{-\Delta}^{0}\Lambda(s)w(s)\,ds,$$

$$\partial_y W = 2x'D(0)x - 2x'D(-\tau)y(-\tau) - 2x'\int_{-\tau}^{0}\frac{d\,D(s)}{ds}y(s)\,ds +$$
$$x'\int_{-\tau}^{0}(R(0,s) + R'(s,0))y(s)\,ds - y'(-\tau)\int_{-\tau}^{0}(R(-\tau,s) + R'(s,-\tau))y(s)\,ds -$$
$$\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} y'(s)\left(\frac{\partial R(s,\nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s,\nu)}{\partial \nu}\right)y(\nu)\,ds +$$
$$x'\Pi(0)x - y'(-\tau)\Pi(-\tau)y(-\tau) - \int_{-\tau}^{0} y'(s)\frac{d\,\Pi(s)}{ds}y(-\tau)\,ds +$$
$$2x'\int_{-\Delta}^{0}\beta(0,s)w(s)\,ds - 2y'(-\tau)\int_{-\Delta}^{0}\beta(-\tau,s)w(s)\,ds -$$
$$2\int_{-\tau}^{0}\int_{-\Delta}^{0} y'(s)\frac{\partial\beta(s,\nu)}{\partial s}w(\nu)\,ds\,d\nu,$$

$$
\partial_w W = 2x'\Lambda(0)u - 2x'\Lambda(-\Delta)w(-\Delta) - 2x'\int_{-\Delta}^{0}\frac{d\,\Lambda(s)}{ds}w(s)\,ds+
$$
$$
u'\int_{-\Delta}^{0}(\Theta(0,s)+\Theta'(s,0))w(s)\,ds - w'(-\Delta)\int_{-\Delta}^{0}(\Theta(-\Delta,s)+\Theta'(s,-\Delta))w(s)\,ds-
$$
$$
\int_{-\Delta}^{0}\int_{-\Delta}^{0}w'(s)\left(\frac{\partial\Theta(s,\nu)}{\partial s}+\frac{\partial\Theta(s,\nu)}{\partial\nu}\right)w(\nu)\,ds+
$$
$$
u'\Xi(0)u - w'(-\Delta)\Xi(-\Delta)w(-\Delta) - \int_{-\Delta}^{0}w'(s)\frac{d\,\Xi(s)}{ds}w(-\Delta)\,ds+
$$
$$
2\int_{-\tau}^{0}y'(s)\beta(s,0)\,dsu - 2\int_{-\tau}^{0}y'(s)\beta(s,-\Delta)\,dsw(-\Delta)-
$$
$$
2\int_{-\tau}^{0}\int_{-\Delta}^{0}y'(s)\frac{\partial\beta(s,\nu)}{\partial\nu}w(\nu)\,ds\,d\nu+
$$
$$
2y'(-\tau)\gamma(0)u - 2y'(-\tau)\gamma(-\Delta)w(-\Delta) - 2y'(-\tau)\int_{-\Delta}^{0}\frac{d\,\gamma(s)}{ds}w(s)\,ds,
$$

$$
\frac{\partial\alpha(u)}{\partial u} = B'\frac{\partial W}{\partial x} + 2\Lambda'(0)x + \int_{-\Delta}^{0}(\Theta(0,s)+\Theta'(s,0))w(s)\,ds+
$$
$$
2\int_{-\tau}^{0}\beta'(s,0)y(s)\,ds + 2\gamma'(0)y(-\tau) + 2\Xi(0)u + 2Mu = 0.
$$

Подставив выражение для $\frac{\partial W}{\partial x}$ и выразив u, получим

$$
\begin{aligned}
u^* = \; & -[\Xi(0)+M]^{-1}\Bigg[B'\left(Px + \int_{-\tau}^{0}D(s)y(s)\,ds + \int_{-\Delta}^{0}\Lambda(s)w(s)\,ds\right) + \\
& \gamma'(0)y(-\tau)\Lambda'(0)x + \int_{-\Delta}^{0}\Theta(0,s)w(s)\,ds + \int_{-\tau}^{0}\beta'(s,0)y(s)\,ds\Bigg].
\end{aligned}
$$

Введем обозначение $K = [\Xi(0)+M]^{-1}$, запишем выражение для u^* в виде

$$
\begin{aligned}
u^* = -K \; & \Bigg[\Big(B'P + \Lambda'(0)\Big)x + \int_{-\tau}^{0}\Big(B'D(s)y(s) + \beta'(s,0)\Big)y(s)\,ds+ \\
& \gamma'(0)y(-\tau) + \int_{-\Delta}^{0}\Big(B'\Lambda(s) + \Theta(0,s)\Big)w(s)\,ds\Bigg].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Опустим преобразования в равенстве $\alpha(u^*) = 0$, т.к. они не представляют принципиальной сложности. Заметим, что тройка $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\}$ является произвольным элементом из H, следовательно, квадратичный функционал $\alpha(u^*(x, y(\cdot), w(\cdot)))$ равен нулю, если его коэффициенты равны нулю. Отсюда и получаем искомые уравнения, граничные условия и условия симметричности. Теорема доказана.

Явные решения обобщенных уравнений Риккати.

В этом разделе описывается подход к нахождению явных решений ОУР. Подход основан на подходящем выборе матриц $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$, $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ в функционале качества (9). В рамках такого подхода матрицы $\Phi_0, ..., \Upsilon_3$ представляются через матрицы $P, D(s), R(s,\nu), \Lambda(s), \Theta(s,\nu), \beta(s,\nu)$, $\gamma(s)$ таким образом, чтобы упростить систему.

$$
\begin{aligned}
&\Phi_0 && = C_{\phi 0} \\
&\Phi_1 && = -P'A(s) - R(0,s) + [P'B + \Lambda(0)]K[B'D(s) + \beta'(s,0)] \\
&\Phi_2 && = \phi(s) \\
&\Phi_3 && = -D'(s)A(\nu) - A'(\nu)D(s) + [D'(s)B + \beta(s,0)]K[B'D(\nu) + \beta'(\nu,0)] \\
&\Phi_4 && = C_{\phi 4} \\
&\Psi_1 && = -P'B(s) - \beta(0,s) + [P'B + \Lambda(0)]K[B'\Lambda(s) + \Theta(0,s)] \\
&\Psi_2 && = \psi(s) \\
&\Psi_3 && = -\Lambda'(s)B(\nu) - B'(\nu)\Lambda(s) + [\Lambda'(s)B + \Theta(s,0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0,\nu)] \\
&\Psi_4 && = C_{\psi 4} \\
&\Upsilon_1(s) && = -A'_\tau\Lambda(s) + \beta(-\tau,s) + \gamma(0)K[B'\Lambda(s) + \Theta(0,s)] + \upsilon(s) \\
&\Upsilon_2 && = -\int_{-\Delta}^{0} \upsilon(s)\,ds \\
&\Upsilon_3 && = -D'(s)B(\nu) - A'(s)\Lambda(s) + [D'(s)B + \beta(s,0)]K[B'\Lambda(\nu) + \Theta(0,\nu)]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Здесь $C_{\phi 0}, C_{\phi 4}, C_{\psi 4}, \phi(s), \psi(s), \upsilon(s)$-произвольные матрицы соответствующих размерностей.

Система ОУР, соответствующая весовым матрицам (15), заметно упрощается и принимает вид

$$
\begin{aligned}
&P'A + A'P + D(0) + D'(0) + \Pi(0) + C_{\phi 0} = [P'B + \Lambda(0)]K[B'P + \Lambda'(0)] \\
&\frac{d\,D(s)}{ds} = A'D(s) \\
&\frac{d\Lambda(s)}{ds} = A'\Lambda(s) \\
&\frac{d\,\Pi(s)}{ds} = \phi_2(s) \\
&\frac{d\,\Xi(s)}{ds} = \psi_2(s) \\
&\frac{\partial R(s,\nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s,\nu)}{\partial \nu} = 0 \\
&\frac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial s} + \frac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial \nu} = 0 \\
&\frac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial s} + \frac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial \nu} = 0 \\
&\frac{d\,\gamma(s)}{ds} = \upsilon(s)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

с граничными условиями

$$\begin{array}{l} D(-\tau) = P'A_\tau \\ \Lambda(-\Delta) = P'B_\Delta \\ \Pi(-\tau) = C_{\phi 4} \\ \Xi(-\Delta) = C_{\psi 4} \\ R(-\tau, s) = A'_\tau D(s) \\ \Theta(-\Delta, s) = B'_\Delta \Lambda(s) \\ \beta'(s, -\Delta) = B'_\Delta D(s) \\ \gamma(-\Delta) = -\displaystyle\int_{-\Delta}^{0} \upsilon(s)\, ds \end{array} \tag{17}$$

и условиями симметрии $P = P', \quad R(s,\nu) = R'(\nu, s), \quad \Theta(s,\nu) = \Theta'(\nu, s).$

Теорема 4 *Пусть в системе ОУР* $C_{\phi 0}, C_{\phi 4}, C_{\psi 4}$ — *симметричные матрицы;* $\phi(s)$ — *симметричная матрица с кусочно-непрерывными на* $[-\tau; 0]$ *коэффициентами;* $\psi(s), \upsilon(s)$ — *симметричные матрицы с кусочно-непрерывными на* $[-\Delta; 0]$ *коэффициентами . Пусть* P *является решением матричного уравнения*

$$PA + A'P + e^{A'\tau} PA_\tau + A'_\tau P e^{A\tau} + \int_{-\tau}^{0} \phi_s(\zeta)\, d\zeta + C_{\phi 4} + C_{\phi 0} =$$

$$[PB + e^{A'\Delta} PB_\Delta] K [B'P + B_\Delta P e^{A\Delta}],$$

а матрицы $D(s)$, $\Lambda(s)$, $\Pi(s)$, $\Sigma(s)$, $R(s,\nu)$, $\Theta(s,\nu)$, $\beta(s,\nu)$, $\gamma(s)$ *заданы по формулам*

$$D(s) = e^{A'(s+\tau)} P' A_\tau, \qquad \Pi(s) = \int_{-\tau}^{s} \phi_2(\zeta)\, d\zeta + C_{\phi 4},$$

$$\Lambda(s) = e^{A'(s+\Delta)} P' B_\Delta, \qquad \Xi(s) = \int_{-\Delta}^{s} \psi_2(\zeta)\, d\zeta + C_{\psi 4},$$

$$R(s,\nu) = \begin{cases} T(s)D(\nu), & (s,\nu) \in \Omega_{\tau 1}, \\ D'(s)T'(\nu), & (s,\nu) \in \Omega_{\tau 2} \end{cases} \quad \Theta(s,\nu) = \begin{cases} Q(s)\Lambda(\nu), & (s,\nu) \in \Omega_{\Delta 1}, \\ \Lambda'(s)Q'(\nu), & (s,\nu) \in \Omega_{\Delta 2} \end{cases}$$

$$\beta(s,\nu) = D'(s - \nu - \Delta) B_\Delta, \qquad \gamma(s) = \int_{0}^{s} \upsilon(\zeta)\, d\zeta,$$

где

$$\Omega_{\tau 1} = \{(s,\nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s < \nu\},$$

$$\Omega_{\tau 2} = \{(s,\nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s > \nu\},$$

$$\Omega_{\Delta 1} = \{(s,\nu) \in [-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0] : s < \nu\},$$

$$\Omega_{\Delta 2} = \{(s,\nu) \in [-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0] : s > \nu\},$$

$$T(s) = A'_\tau e^{-A'(s+\tau)}, \quad Q(s) = B'_\Delta e^{-A'(s+\Delta)}.$$

Тогда матрицы $P, D(s), \Pi(s), R(s,\nu), \Lambda(s), \Xi(s), \Theta(s,\nu), \beta(s,\nu), \gamma(s)$ *являются решением ОУР.*

Доказательство проведем для наиболее трудных случаев
Матрица $R(s,\nu)$. В области $\Omega_{\tau 1} = \{(s,\nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s < \nu\}$ имеем $R(s,\nu) = T(s)D(\nu)$, поэтому $\dfrac{\partial R(s,\nu)}{\partial s} + \dfrac{\partial R(s,\nu)}{\partial \nu} = \dfrac{dT(s)}{ds}D(\nu) + T(s)\dfrac{dD(s)}{ds} = \dfrac{dT(s)}{ds}D(\nu) + T(s)A'D(\nu) = \left(\dfrac{dT(s)}{ds} + T(s)A'\right)D(\nu) = 0$. Поскольку $D(\nu) \neq 0$, то имеем $\dfrac{dT(s)}{ds} = -T(s)A'$. Откуда получаем $T(s) = C_T\, e^{-A'(s+\tau)}$. Константу C_T найдем из граничного условия $R(-\tau,\nu) = T(-\tau)D(\nu) =$ [граничное условие] $= A'_\tau D(\nu)$; следовательно, $T(-\tau) = A'_\tau$. С другой стороны $T(-\tau) = C_T e^0$; сопоставляя два последних равенства, получим $C_T = A'_\tau$ и

$$R(s,\nu) = A'_\tau e^{-A'(s+\tau)} D(\nu), \quad (s,\nu) \in \Omega_{\tau 1}.$$

В области $\Omega_{\tau 2} = \{(s,\nu) \in [-\tau, 0] \times [-\tau, 0] : s > \nu\}$ рассуждаем аналогично.

Матрица $\beta(s,\nu)$. Решение уравнения $\dfrac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial s} + \dfrac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial \nu} = 0$, т.е. восьмого уравнения системы (16) следует искать в виде $\beta(s,\nu) = \tilde{\beta}(s-\nu)$. В силу граничного условия имеем $\beta(s,-\Delta) = \tilde{\beta}(s+\Delta) =$ [граничное условие] $= D'(s)B_\Delta$. Откуда находим $\tilde{\beta}(s-\nu) = D'(s-\nu-\Delta)B_\Delta$ и в итоге получаем

$$\beta(s,\nu) = D'(s-\nu-\Delta)B_\Delta.$$

Матрица $\gamma(s)$. Решение уравнения $\dfrac{d\gamma(s)}{ds} = \upsilon(s)$, т.е. последнего уравнения системы (16), имеет вид $\gamma(s) = \displaystyle\int_{-\Delta}^{s} \upsilon(\zeta)\, d\zeta + C_\gamma$. Константу C_γ определим из начального условия $\gamma(-\Delta) = -\displaystyle\int_{-\Delta}^{0} \upsilon(s)\, ds$, получим $C_\gamma = -\displaystyle\int_{-\Delta}^{0} \upsilon(s)\, ds$. В итоге имеем

$$\gamma(s) = \int_0^s \upsilon(\zeta)\, d\zeta.$$

Вид остальных матриц устанавливается непосредственным интегрированием соответствующих уравнений. Теорема доказана.

Достаточные условия стабилизируемости.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений управление, найденное в ходе решения системы ОУР не обязательно стабилизирует систему с запаздыванием. Достаточное условие стабилизируемости дает следующая

Теорема 5 *Пусть весовой функционал (9) является положительно определенным на H. Если*
1) матрицы $P, D, R, \Pi, \Lambda, \Theta, \Xi, \beta, \gamma$ являются решением системы ОУР,
2) квадратичный функционал (10) является положительно определенным на H,
тогда система (1) стабилизируема и управление с обратной связью (14)

является решением ЛКЗР (1),(3) в классе стабилизирующих управлений, а минимальное значение функционала качества J, соответствующее начальной позиции $\{x, y(\cdot), w(\cdot)\}$, имеет вид (10).

Доказательство. Покажем, что замкнутая система (1) соответствующая управлению (14) является асимптотически устойчивой.

Рассмотрим положительно определенный функционал (10) как функционал Ляпунова для этой системы. С учетом того, что матрицы $P, D, R, \Pi, \Lambda, \Theta, \Xi, \beta, \gamma$ являются решением системы ОУР, полная производная функционала (10) в силу системы (1) имеет вид

$$\dot{W}_{(1)} = -Z[x, y(\cdot), w(\cdot)] - u'Mu.$$

Квадратичный функционал $Z[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ является положительно определенным, следовательно функционал $\dot{W}_{(1)}$ будет отрицательно определенным на H. Таким образом система (1), соответствующая управлению (14), асимптотически устойчива. Теорема доказана.

Литература

[1] Красовский Н.Н. Об аналитическом конструировании регулятора для систем с последействием. ПММ, 1962. Т. 26. № 1. стр. 39–51.

[2] Красовский Н.Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. Krasovskii N.N. Optimal Processes in Systems with Time Lag // Proc. 2nd IFAC Congress (Basel, 1963). Butterwoths, London. 1964.

[3] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования. Изв. АН СССР: Техн. Кибернетика. 1963. №6.

[4] Ким А.В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 1996. 236 с.

[5] Ким А.В., Ложников А.Б. Линейно-квадратичные задачи управления для систем с запаздыванием по состоянию. Точные решения уравнений Риккати. Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. стр. 15–31.

[6] Ким А.В., Волканин Л.С. К синтезу управления для систем с последействием в управляющих параметрах. Известия Уральского государственного университета. 2003. №26 стр. 81–86.

[7] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

Тарасенко О.В., Яковец В.П.

Условия управляемости и наблюдаемости вырожденных линейных процессов

Рассмотрим процесс управления, который задается системой дифференциальных уравнений

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)u(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — квадратные матрицы n-го порядка, $C(t)$ — $(n \times m)$-матрица, $x(t)$ — n-мерный вектор состояния, $u(t)$ — m-мерный вектор управления, $det B(t) \equiv 0$, $\forall t \in I = [0; T]$.

Вопросы управляемости и наблюдаемости линейных процессов данного типа в случае, когда $det B \equiv 0$, исследовались в основном для стационарных процессов, когда матрицы A, B, C являются постоянными [1]. Для переменных матриц рассматривался лишь случай, когда $B(t)$ — единичная матрица [2, 3, 4].

В работе [1] введено понятие R-управляемости и C-управляемости системы (1). Согласно [1] система (1) считается *C-управляемой*, если с помощью некоторого управления за конечное время t_1 ее можно перевести из любого допустимого состояния в любое заданное состояние $x(t_1) = x_1$. Если же ее можно перевести из любого допустимого состояния в любое достижимое состояние, то она называется *R-управляемой.* При этом *множеством допустимых управлений* $u(t)$ относительно заданного x_0 и класса управлений $\Omega(x_0; I)$ называют такие $u(t)$, для которых уравнение (1) с начальным условием

$$x(0) = x_0 \tag{2}$$

является разрешимым, а множество начальных условий, для которых множество допустимых управлений не пустое — *множеством допустимых состояний.*

В данной работе исходя из теоремы о приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме, доказаной в [5], найдены достаточные условия управляемости и наблюдаемости системы (1).

Будем предполагать, что выполняются все условия этой теоремы, а именно:

1. $rank B(t) = const = n - r$, $\forall t \in [0; T]$;

2. матрица $B(t)$ имеет на $[0; T]$ полный жорданов набор векторов относительно оператора $L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$, который состоит из r цепочек $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, длины $s_1, s_2, \ldots, s_r$;

3. $A(t)$, $B(t) \in C^{3p-2}[0;T]$, $C(t)$, $u(t) \in C^{p-1}[0;T]$, где $p = max_{i=\overline{1,r}} s_i$.

Пусть $\Psi(t) = [\psi_1^{(s_1)}(t), \ldots, \psi_1^{(1)}(t); \psi_2^{(s_2)}(t), \ldots, \psi_2^{(1)}(t); \ldots; \psi_r^{(s_r)}(t), \ldots, \psi_r^{(1)}(t)]$ – $(n \times s)$-матрица ($s = s_1 + s_2 + \ldots + s_r$), составленная из вектор-столбцов $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, которые образовуют жордановы цепочки матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt} B^*(t)$.

Согласно [5] система (1) с начальным условием (2) разрешима тогда и только тогда, когда будет выполняться условие

$$\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i} [\Psi^*(0) C(0) u(0)] + \sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i} [\Psi^*(0) A(0)] x_0 = 0, \tag{3}$$

где $I = diag[I_1, I_2, \ldots, I_r]$, I_j, $j = \overline{1, r}$ — нильпотентный блок Жордана размерности s_j. Исходя из этого, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1 *Если выполняются условия 1–3, то множеством допустимых управлений системы (1) относительно вектора x_0 является множество вектор-функций $u(t)$, которые удовлетворяют условию (3), а множество допустимых состояний образовуют те векторы x_0, для которых существует по крайней мере одно управление $u(t)$, удовлетворяющее условию (3).*

Как показано в [6] при выполнении условий 1–3 однородная система, соответствующая (1)

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t) x, \tag{4}$$

имеет общее решение типа Коши, которое является линейной комбинацией ее $(n - s)$ линейно независимых решений. Обозначим через $X_{n-s}(t)$ фундаментальную матрицу системы (4), составленную из этих решений, а через $Y_{n-s}(t)$ — фундаментальную матрицу сопряженной системы

$$\frac{d}{dt} \left(B^*(t) y \right) = -A^*(t) y. \tag{5}$$

Пусть $\Phi(t) = \left[\varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \ldots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \ldots; \varphi_r^{(1)}(t), \ldots, \varphi_r^{(s_r)}(t) \right]$ – матрица размерности $(n \times s)$, составленная из векторов, которые образовуют полный жорданов набор матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$.

Составим $(n \times n)$-матрицы

$$P(t) = [Y_{n-s}(t), \Psi(t)]^*, \qquad Q(t) = [X_{n-s}(t), \Phi(t)], \tag{6}$$

которые [6] будут неособенными при всех $t \in [0; T]$. Произведя в системе (1) замену $x = Q(t) y$ и умножив слева на матрицу $P(t)$, приведем ее к виду

$$\begin{pmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} Y_{n-s}^*(t) C(t) u(t) \\ R(t) \Psi^*(t) C(t) u(t) \end{pmatrix},$$

где $R(t) = [\Psi^*(t) L(t) \Phi(t)]^{-1}$, а E_s, E_{n-s} — единичные матрицы s-го и $(n - s)$-го порядка соответственно.

Обозначив $y = col(y_1, y_2)$, где y_1 — $(n-s)$-мерный вектор, а y_2 — s-мерный, будем иметь

$$\frac{dy_1}{dt} = G(t)u(t), \tag{7}$$

$$I\frac{dy_2}{dt} = y_2 + F(t)u(t), \tag{8}$$

где

$$G(t) = Y^*_{n-s}(t)C(t), \tag{9}$$

$$F(t) = R(t)\Psi^*(t)C(t). \tag{10}$$

Пусть $y_0 = col(y_1^0, y_2^0)$ — допустимое состояние системы (7), (8), а $y_1 = col(y_1^1, y_2^1)$ — произвольно заданное. Решением этой системы с начальным условием $y(0) = y_0$ будет

$$y_1(t) = y_1^0 + \int\limits_0^t G(\tau)u(\tau)d\tau; \qquad y_2(t) = -\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t)u(t)].$$

Тогда управление $u(t)$ переводит систему из состояния y_0 в состояние y_1 за конечный промежуток времени $t_1 \in [0; T]$, если оно будет удовлетворять интегральному уравнению

$$\int\limits_0^{t_1} G(\tau)u(\tau)d\tau = y_1^1 - y_1^0 \tag{11}$$

с условием

$$\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t_1)u(t_1)] + y_2^1 = 0. \tag{12}$$

Будем искать его в виде

$$u(t) = G^*(t)\xi + \omega(t), \tag{13}$$

где ξ — постоянный $(n-s)$-мерный вектор, а $\omega(t)$ — m-мерная вектор-функция, которая удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{t_1} G(\tau)\omega(\tau)d\tau = 0. \tag{14}$$

Подставив (13) в (11), (12), получим

$$W(0, t_1)\xi = y_1^1 - y_1^0, \tag{15}$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t_1)\omega(t_1)] = -\sum_{i=0}^{p-1} I^i \frac{d^i}{dt^i}[F(t_1)G^*(t_1)]\xi - y_2^1, \tag{16}$$

где

$$W(0,t_1)=\int\limits_0^{t_1} G(\tau)G^*(\tau)d\tau.$$

Если

$$detW(0,t_1)\neq 0, \tag{17}$$

то из уравнения (15) однозначно определяется вектор ξ при любых заданных y_1^0, y_1^1:

$$\xi=W^{-1}(0,t_1)(y_1^1-y_1^0).$$

Для определения вектор-функции $\omega(t)$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=0}^{p-1} I^i\frac{d^i}{dt^i}[F(t)\omega(t)]=-\sum_{i=0}^{p-1} I^i\frac{d^i}{dt^i}[F(t)G^*(t)]\xi-y_2^1.$$

Если оно имеет решение в некоторой окрестности точки t_1, то равенство (16) будет выполняться. Легко убедиться, что единственным решением этого уравнения относительно $F(t)\omega(t)$ является вектор-функция

$$F(t)\omega(t)=-F(t)G^*(t)\xi-y_2^1. \tag{18}$$

Обозначим

$$C(t)\omega(t)=v(t). \tag{19}$$

Тогда, приняв во внимание (9), (10), уравнения (14), (19) запишем в виде

$$\int\limits_0^{t_1} Y_{n-s}^*(\tau)v(\tau)d\tau=0, \tag{20}$$

$$\Psi^*(t)v(t)=d(t), \tag{21}$$

где

$$d(t)=-\Psi^*(t)C(t)G^*(t)\xi-R^{-1}(t)y_2^1.$$

Соотношение (20) будет выполняться, если

$$Y_{n-s}^*(t)v(t)=0, \qquad \forall t\in[0;t_1]. \tag{22}$$

Следовательно для определения вектор-функции $v(t)$ имеем систему уравнений (21), (22), которую согласно (6) можно записать в виде одного уравнения

$$P(t)v(t)=\tilde{d}(t),$$

где $\tilde{d}(t)=col(0;d(t))$, откуда

$$v(t)=P^{-1}(t)\tilde{d}(t).$$

Наконец, чтобы найти вектор-функцию $\omega(t)$, необходимо решить уравнение (19). Оно будет разрешимо, если $m\geq n$ и $rankC(t)=n$ на $[0;t_1]$.

Таким образом, если при некотором $t_1 \in [0;T]$ выполняется условие (17) и указанные выше условия разрешимости уравнения (19), то систему (7), (8), а значит, и исходную систему (1) за время t_1 можно перевести из любого допустимого состояния (которое определяется условием (3) и зависит от управления) в любое заданное состояние. Следовательно, в этом случае система будет C-управляемой. Если же выполняется только условие (17), то система (1) будет R-управляемой, поскольку ее можно перевести из состояния $y_0 = col(y_1^0, y_2^0)$ в состояние $y_1 = col(y_1^1, y_2^1)$, где $(n-s)$-мерные векторы y_1^0, y_1^1 — произвольно заданные, а s-мерные векторы y_2^0, y_2^1 подчинены управлению $u(t)$, которое определяется по формуле (13), в которой $\omega = 0$.

В результате доказана такая теорема.

Теорема 2 *Пусть выполняются условия 1–3, а также следующие:*

a) $det\left[\int\limits_0^{t_1} Y_{n-s}^*(\tau)C(\tau)C^*(\tau)Y_{n-s}(\tau)d\tau\right] \neq 0$ *при некотором* $t_1 \in [0;T]$*;*

b) $m \geq n$*;*

c) $rankC(t) = n, \forall t \in [0;t_1]$*,*

где $Y_{n-s}(t)$ *— фундаментальная матрица системы (5), сопряженной к однородной системе (4), соответствующей (1).*

Тогда система (1) C*-управляема.*

Если же выполняются лишь условия 1–3 и a), то данная система будет R*-управляемой.*

Условие *a)* равносильно положительной определенности квадратичной формы с матрицей $W(0,t_1)$. Так же, как и в [2], можно показать, что оно выполняется тогда и только тогда, когда уравнение

$$C^*(t)Y_{n-s}(t)c = 0$$

не имеет решений, отличимых от нулевого, относительно постоянных векторов c.

Предположим теперь, что для системы (1) задано уравнение выхода

$$z(t) = D(t)x(t), \tag{23}$$

где $D(t)$ — $(r \times n)$-матрица, $z(t)$ — r-мерный вектор выхода. Найдем условия наблюдаемости системы (1), (23).

Как показано в [6], при выполненнии условий 1–3 решение задачи Коши для системы (1) с допустимым начальным состоянием $x(0) = x_0$ можно представить в виде

$$x(t) = X_{n-s}(t)Y_{n-s}^*(0)B(0)x_0 + \tilde{x}(t), \tag{24}$$

где

$$\tilde{x}(t) = \int\limits_0^t X_{n-s}(\tau)Y_{n-s}^*(\tau)C(\tau)u(\tau)d\tau$$
$$- \Phi(t)\sum_{i=0}^{p-1} I^i \tfrac{d^i}{dt^i}[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)C(t)u(t),$$

если матрицы $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ определены так, чтобы выполнялось соотношение

$$Y^*_{n-s}(t)B(t)X_{n-s}(t) = E. \tag{25}$$

Тогда выход

$$z(t) = D(t)X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(0)B(0)x_0 + D(t)\tilde{x}(t).$$

Умножим это равенство слева на матрицу $X^*_{n-s}(t)D^*(t)$. Положив $x_0 = X_{n-s}(0)c$ и приняв во внимание (25), получим

$$X^*_{n-s}(t)D^*(t)D(t)X_{n-s}(t)c = X^*_{n-s}(t)D^*(t)z(t) - X^*_{n-s}(t)D^*(t)D(t)\tilde{x}(t),$$

откуда

$$N(0,t_1)c = \int\limits_0^{t_1} X^*_{n-s}(\tau)D^*(\tau)z(\tau)d\tau - \gamma(0,t_1), \tag{26}$$

где

$$N(0,t_1) = \int\limits_0^{t_1} X^*_{n-s}(\tau)D^*(\tau)D(\tau)X_{n-s}(\tau)d\tau, \tag{27}$$

$$\gamma(0,t_1) = \int\limits_0^{t_1} X^*_{n-s}(\tau)D^*(\tau)D(\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau.$$

Если при некотором $t_1 \in [0;T]$ $det N(0,t_1) \neq 0$, то из (26) однозначно определяется вектор c, а значит, и x_0, что дает возможность по известному выходу $z(t)$ на отрезке $[0;t_1]$ определить начальное состояние системы (1):

$$x_0 = X_{n-s}(0)N^{-1}(0,t_1)\int\limits_0^{t_1} X^*_{n-s}(\tau)D^*(\tau)z(\tau)d\tau - X_{n-s}(0)N^{-1}(0,t_1)\gamma(0,t_1).$$

А это значит, что система (1), (23) вполне наблюдаема.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3 *Если выполняются условия 1–3 и*

$$det\left[\int\limits_0^{t_1} X^*_{n-s}(\tau)D^*(\tau)D(\tau)X_{n-s}(\tau)d\tau\right] \neq 0$$

при некотором $t_1 \in [0;T]$, где $X_{n-s}(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы (4), то система (1), (23) вполне наблюдаема на $[0;t_1]$.

Литература

[1] Campbell S.L. Singular systems of differential equations 2 S. Francisko, London, Melbourne: Pitman Adv. Publishing Co. 1982. – 234 p.

[2] Абгарян К.А., Хрусталев М.М., Жирнова Э.Б. Управляемость и наблюдаемость линейных систем М.: Московский авиационный институт. 1977. – 78 с.

[3] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов М.: Наука. 1971. – 508 с.

[4] Квакернаак X., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления М.: Мир. 1977. – 650 с.

[5] Самойленко А.М., Яковец В.П. О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. АН Украины. 1993. – № 4. – С.10-15.

[6] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями К.: Вища шк. 2000. – 294 с.

Фролова Е.В.

Достаточные условия обратимости оператора с частными интегралами в пространстве непрерывных и ограниченных на полуполосе функций

Различные задачи математической физики [1] приводятся к уравнениям с частными интегралами вида

$$x = Kx + f, \tag{1}$$

где $K = L + M + N$, операторы L, M, N определяются равенствами

$$(Lx)(t,s) = \int_a^{+\infty} l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau, \quad (Mx)(t,s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \int_a^{+\infty}\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau;$$

$t, \tau \in [a, +\infty), s, \sigma \in [c, d]$, l, m, n — заданные измеримые функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Операторы L и M называют обычно частично-интегральными операторами, так как неизвестная функция интегрируется по части переменных, при этом оператор K называют оператором с частными интегралами. Свойства операторов с частными интегралами зависят от пространств, в которых они изучаются, и принципиально отличаются от свойств обычных интегральных операторов. В прикладных задачах часто приходится рассматривать достаточно большой временной промежуток, поэтому представляют интерес свойства оператора K и условия однозначной разрешимости уравнения (1) в классах функций, заданных на неограниченном множестве $D = [a, \infty) \times [c, d]$. Эти свойства существенно отличаются от свойств операторов и уравнений, изучаемых в пространствах функций, определенных на $[a, b] \times [c, d]$. Простые примеры показывают, что уравнения с частными интегралами могут быть однозначно разрешимыми, а определенные на D их решения не принадлежат выбранному классу функций на D.

В различных функциональных пространствах свойства операторов и уравнений с частными интегралами изучались в [1-5].

В статье рассматриваются достаточные условия обратимости оператора $I - K$ и условия однозначной разрешимости уравнения (1) в пространстве $C(D)$ — непрерывных и ограниченных на D функций.

Из [6] вытекает

Теорема 1. *Если оператор K действует в пространстве $C(D)$, то он непрерывен.*

Пусть $\Omega \in \{[a,+\infty),[c,d],D\}$ и $\omega \in \{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D\times\Omega$ функция $u(t,s,\omega)$ называется непрерывной в целом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|u(t_1,s_1,\cdot)-u(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$ при $|t_1-t_2|$, $|s_1-s_2| < \delta$, и интегрально ограниченной, если $\|u(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \le U < \infty$.

Критерии действия линейных операторов с частными интегралами в пространстве $C(D)$ неизвестны. Непосредственными оценками доказываются следующие достаточные условия действия оператора K в $C(D)$.

Теорема 2. *Оператор K с непрерывными в целом и интегрально ограниченными ядрами l,m,n действует в пространстве $C(D)$ и непрерывен. При этом*

$$\|K\| \le \sup_{(t,s)\in D}\left(\int\limits_a^{+\infty}|l(t,s,\tau)|\,d\tau + \int\limits_c^{d}|m(t,s,\sigma)|\,d\sigma + \int\limits_a^{+\infty}\int\limits_c^{d}|n(t,s,\tau,\sigma)|\,d\sigma d\tau\right).$$

Пусть ядра l,m,n имеют вид

$$l(t,s,\tau)=\sum_{i=1}^{p} l_i(t)\bar{l}_i(s)a_i(\tau), \quad m(t,s,\sigma)=\sum_{j=1}^{q} m_j(t)\bar{m}_j(s)b_j(\sigma), \tag{2}$$

$$n(t,s,\tau,\sigma)=\sum_{k=1}^{r} n_k(t)\bar{n}_k(s)c_k(\tau,\sigma),$$

где $l_i,\bar{l}_i$ $(i=1,\dots,p)$, $m_j,\bar{m}_j$ $(j=1,\dots,q)$, $n_k,\bar{n}_k$ $(k=1,\dots,r)$ — непрерывные и ограниченные функции; $\int_a^{+\infty}|a_i(\tau)|d\tau < A < \infty$ $(i=1,\dots,p)$, $\int_c^d|b_j(\sigma)|d\sigma < B < \infty$ $(j=1,\dots,q)$, $\int_a^{+\infty}\int_c^d|c_k(\tau,\sigma)|d\sigma d\tau < C < \infty$ $(k=1,\dots,r)$; а системы функций $\{a_i \mid i=1,\dots,p\}$, $\{b_j \mid j=1,\dots,q\}$ ортонормированы.

Очевидно, ядра (2) непрерывны в целом и интегрально ограничены.

Рассмотрим подробнее уравнения

$$(I-L)x=f, \tag{3}$$

$$(I-M)x=f. \tag{4}$$

Уравнение (3) можно записать в виде

$$x(t,s)=f(t,s)+\sum_{i=1}^{p} l_i(t)\bar{l}_i(s)\int_a^{+\infty} a_i(\tau)x(\tau,s)\,d\tau,$$

или

$$x(t,s)=f(t,s)+\sum_{i=1}^{p} y_i(s)l_i(t)\bar{l}_i(s), \tag{5}$$

где

$$y_i(s)=\int_a^{+\infty} a_i(\tau)x(\tau,s)\,d\tau. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (6), получим

$$y_i(s) = \int_a^{+\infty} a_i(\tau) f(\tau, s)\, d\tau + \sum_{j=1}^{p} \int_a^{+\infty} a_i(\tau) y_j(s) l_j(\tau) \bar{l}_j(s)\, d\tau.$$

Вводя обозначения

$$f_i(s) = \int_a^{+\infty} a_i(\tau) f(\tau, s)\, d\tau, \quad \mu_{ij}(s) = \int_a^{+\infty} a_i(\tau) l_j(\tau) \bar{l}_j(s)\, d\tau,$$

получим систему

$$y_i(s) - \sum_{j=1}^{p} y_j(s)\mu_{ij}(s) = f_i(s) \quad (i = 1, \ldots, p). \tag{7}$$

Определитель этой системы есть непрерывная функция

$$D_1(s) = \begin{vmatrix} 1 - \mu_{11}(s) & \ldots & -\mu_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu_{p1}(s) & \ldots & 1 - \mu_{pp}(s) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Аналогично, для уравнения (4) получим систему

$$z_j(t) - \sum_{k=1}^{q} z_k(t)\nu_{jk}(t) = f_j(t) \quad (j = 1, \ldots, q), \tag{9}$$

определитель которой есть непрерывная и ограниченная функция

$$D_2(t) = \begin{vmatrix} 1 - \nu_{11}(t) & \ldots & -\nu_{1q}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\nu_{q1}(t) & \ldots & 1 - \nu_{qq}(t) \end{vmatrix}, \tag{10}$$

где

$$z_j(t) = \int_c^d b_j(\sigma) x(t, \sigma)\, d\sigma, \quad f_j(t) = \int_c^d b_j(\sigma) f(t, \sigma)\, d\sigma,$$

$$\nu_{jk}(t) = \int_c^d b_j(\sigma) m_k(t) \bar{m}_k(\sigma)\, d\sigma.$$

Рассмотрим уравнение (3) и систему (7). Если определитель $D_1(s) \neq 0$, то, очевидно, система (7) и уравнение (3) имеют единственное непрерывное и ограниченное решение для любой функции $f \in C(D)$, оператор $I - L$ обратим и его обратный имеет вид

$$(I - L)^{-1} x(t, s) = x(t, s) + \int_a^{+\infty} r_1(t, s, \tau) x(\tau, s)\, d\tau, \tag{11}$$

где

$$r_1(t, s, \tau) = \frac{1}{D_1(s)} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} D_{1ji}(s) l_i(t) \bar{l}_i(s) a_j(\tau) \tag{12}$$

— резольвентное ядро оператора L. Действительно, решение системы (7) имеет вид

$$y_i(s) = \frac{1}{D_1(s)} \sum_{j=1}^{p} D_{1ji}(s) f_j(s),$$

где $D_{1ji}(s)$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} $(i, j = 1, \dots, p)$ в (8). Отсюда, (5) и равенства для $f_j(s)$ получим решение уравнения (3)

$$x(t,s) = f(t,s) + \int_a^{+\infty} \frac{1}{D_1(s)} \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} D_{1ji}(s) l_i(t) \bar{l}_i(s) a_j(\tau) f(\tau, s)\, d\tau.$$

С учетом (12) из последнего равенства вытекает (11). В силу неравенства $D_1(s) \neq 0$, непрерывности функций $D_1(s)$, $D_{1ji}(s)$ $(i, j = 1, \dots, p)$, $\bar{l}_i(s)$ $(i = 1, \dots, p)$, непрерывности и ограниченности $l_i(t)$ $(i = 1, \dots, p)$ и суммируемости $a_j(\tau)$ $(j = 1, \dots, p)$ $r_1(t, s, \tau)$ — непрерывная и ограниченная функция.

Если теперь $|D_2(t)| \geq \beta > 0$, то система (9) и уравнение (4) также имеют единственное непрерывное и ограниченное решение для любой функции $f \in C(D)$. Аналогично показывается, что $(I - M)^{-1}$ существует и представим в виде

$$(I - M)^{-1} x(t,s) = x(t,s) + \int_c^{d} r_2(t, s, \sigma) x(t, \sigma)\, d\sigma, \tag{13}$$

где

$$r_2(t, s, \sigma) = \frac{1}{D_2(t)} \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} D_{2ji}(t) m_i(t) \bar{m}_i(s) b_j(\sigma), \tag{14}$$

$D_2(t)$ — определитель (10), а D_{2ji} — алгебраическое дополнение элемента b_{ij} $(i, j = 1, \dots, q)$ в (10).

В силу неравенства $|D_2(t)| \geq \beta > 0$, непрерывности функций $\bar{m}_i(s)$ $(i = 1, \dots, q)$, непрерывности и ограниченности $D_2(t)$, $D_{2ji}(t)$ $(i, j = 1, \dots, q)$, $m_i(t)$ $(i = 1, \dots, q)$ и суммируемости $b_j(\sigma)$ $(j = 1, \dots, q)$ $r_2(t, s, \sigma)$ является непрерывной и ограниченной функцией.

Так как

$$I - K = (I - L)(I - M) - (LM + N) = (I - M)(I - L) - (ML + N),$$

то уравнение (1) с ядрами (2) при $D_1(s) \neq 0$ и $|D_2(t)| \geq \beta > 0$ равносильно уравнениям

$$(I - H)x = u, \tag{15}$$

$$(I - P)x = v, \tag{16}$$

где $H = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1}(LM + N)$, $P = (I - L)^{-1}(I - M)^{-1}(ML + N)$, $u = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1} f$, $v = (I - L)^{-1}(I - M)^{-1} f$. Если теперь обратимы операторы $I - H$ и $I - P$, то обратим и оператор $I - K$.

Рассмотрим подробнее уравнение (15). С использованием теоремы Фубини и с учетом (2), (12) и (14) показывается, что H — компактный интегральный оператор с вырожденным ядром $\sum_{i=1}^{k} h_i(t) \bar{h}_i(s) g_i(\tau, \sigma)$, где $h_i, \bar{h}_i$ $(i =$

$1, \ldots, k)$ — непрерывные и ограниченные функции, $\int_a^{+\infty}\int_c^d |g_i(\tau,\sigma)| d\sigma d\tau < G < \infty$ $(i = 1, \ldots, k)$. Уравнение (15) можно записать в виде

$$x(t,s) = u(t,s) + \sum_{i=1}^{k} h_i(t)\bar{h}_i(s) \int_a^{+\infty}\int_c^d g_i(\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\, d\sigma d\tau.$$

Тогда

$$x(t,s) = u(t,s) + \sum_{i=1}^{k} h_i(t)\bar{h}_i(s) y_i, \tag{17}$$

где

$$y_i = \int_a^{+\infty}\int_c^d g_i(\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\, d\sigma d\tau. \tag{18}$$

Подставляя (17) в (18), получим систему

$$y_i - \sum_{j=1}^{k} y_j \mu_{ij} = w_i \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{19}$$

Здесь

$$w_i = \int_a^{+\infty}\int_c^d g_i(\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)\, d\sigma d\tau, \quad \mu_{ij} = \int_a^{+\infty}\int_c^d g_i(\tau,\sigma)h_j(\tau)\bar{h}_j(\sigma)\, d\sigma d\tau.$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\mu_{11} & \ldots & -\mu_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mu_{k1} & \ldots & 1-\mu_{kk} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Если $\Delta \neq 0$, то система (19) и уравнение (15) имеют единственное непрерывное и ограниченное решение, а оператор $I - H$ обратим. Решение системы (19) имеет вид

$$y_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{k} \Delta_{ji} w_j \quad (i = 1, \ldots, k),$$

где Δ_{ji} — алгебраическое дополнение элемента c_{ij} $(i, j = 1, \ldots, k)$ в (20). Тогда решением уравнения (15) будет

$$x(t,s) = u(t,s) + \int_a^{+\infty}\int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)\, d\sigma d\tau, \tag{21}$$

где

$$r_3(t,s,\tau,\sigma) = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \Delta_{1ji} h_i(t)\bar{h}_i(s) g_j(\tau,\sigma)$$

— непрерывная и ограниченная функция.

Подставляя функцию $u(t,s)$ в (21), получим решение уравнения (1)

$$x(t,s) = f(t,s) + \int_a^{+\infty} r_1(t,s,\tau) f(\tau,s)\,d\tau + \int_c^d r_2(t,s,\sigma) f(t,\sigma)\,d\sigma \tag{22}$$

$$+ \int_a^{+\infty}\int_c^d r(t,s,\tau,\sigma) f(\tau,\sigma)\,d\sigma d\tau,$$

где

$$r(t,s,\tau,\sigma) = r_3(t,s,\tau,\sigma) + r_2(t,s,\sigma) r_1(t,\sigma,\tau)$$

$$+ \int_a^{+\infty} r_3(t,s,\tau_1,\sigma) r_1(\tau_1,\sigma,\tau)\,d\tau_1 + \int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma_1) r_2(\tau,\sigma_1,\sigma)\,d\sigma_1$$

$$+ \int_a^{+\infty}\int_c^d r_3(t,s,\tau_1,\sigma_1) r_2(\tau_1,\sigma_1,\sigma) r_1(\tau_1,\sigma,\tau)\,d\sigma_1 d\tau_1.$$

r_1, r_2, r (r_1, r_2, r_3) — называют резольвентными ядрами оператора K с частными интегралами (операторов L, M и H соответственно).

Из приведенных выше рассуждений вытекает

Теорема 3. *Пусть ядра* l, m, n *оператора* K *имеют вид* (2) *и* $D_1(s) \neq 0$, $|D_2(t)| \geq \beta > 0$, $\Delta \neq 0$. *Тогда оператор* $I - K$ *обратим в пространстве* $C(D)$, *а уравнение* (1) *имеет единственное решение* (22).

Обратимость оператора $I - P$ рассматривается аналогично.

Литература

[1] Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations. New York, 2000. – 560 p.p.

[2] Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ. 2000. – 252 с.

[3] Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. Липецк:ЛГПУ. 2004. – 195 с.

[4] Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ. 2006. – 177 с.

[5] Калитвин А.С. Нелинейные операторы с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ. 2002. – 208 с.

[6] Калитвин А.С. Теорема о замкнутом графике в теории операторов с частными интегралами // Операторы с частными интегралами 2. Липецк: ЛГПИ. 1997. С. 3 – 7.

Хорькова Т. А.

Однородные β-равномерные алгебры на локально компактных абелевых группах.

Введение

Пусть $C_b(X)$ — алгебра всех ограниченных непрерывных функций на локально компактном пространстве X.

С помощью подалгебры $C_0(X)$, состоящей из тех функций алгебры $C_b(X)$, которые обращаются в нуль в бесконечности, определим семейство полунорм $\{P_g\}_{g\in C_0(X)}$ следующим образом

$$P_g(f) = \sup_X |fg|, \quad f \in C_b(X)$$

Известно: топология на $C_b(X)$, порожденная семейством полунорм P_g, $g \in C_0(X)$, является локально выпуклой, алгебра $C_b(X)$ полна в этой топологии, пространство сопряженное к $C_b(X)$ совпадает с регулярными конечными борелевскими мерами на X.

Топология на $C_b(X)$, порожденная семейством полунорм P_g, $g \in C_0(X)$, называется *β-топологией*. Алгебру $C_b(X)$, наделенную β-топологией, будем в дальнейшем обозначать $C(X)_\beta$.

Замкнутую подалгебру $\mathcal{A}$ алгебры $C(X)_\beta$ называют β-равномерной, если она содержит константы и разделяет точки множества X. Впервые β-равномерные алгебры рассматривались в работе [1].

Заметим, если X компактное множество, то β-топология на $C(X)_\beta$ совпадает с равномерной топологией, и β-равномерная алгебра в этом случае называется равномерной алгеброй.

Пусть G — локально компактная абелева группа. Каждый элемент γ из G порождает оператор сдвига $T_\gamma : C(X)_\beta \to C(X)_\beta$, $(T_\gamma f)(\alpha) = f(\gamma\alpha)$. Можно проверить, что операторы сдвига являются непрерывными отображениями в β-топологии. Если β-равномерная алгебра A на G инвариантна относительно сдвигов элементами группы G, то алгебру A называют *G-однородной* (или просто *однородной*). Однородные β-равномерные алгебры на локально компактных абелевых группах можно разбить на два класса: β-равномерные алгебры, которые порождаются некоторой подполугруппой группы характеров группы G и которые не являются такими. Первый класс β-равномерных алгебр имеет более простую конструкцию, чем второй. В данной работе укажем общие свойства β-равномерных алгебр, не акцентируя внимание какому классу они принадлежат.

§1. Необходимые сведения.

Пространство $M(X)$ всех регулярных конечных борелевских мер на локально компактном пространстве X можно отождествить с пространством $C(X)^*_\beta$ всех непрерывных в β-топологии линейных функционалов на $C(X)_\beta$. Поэтому верна следующая теорема Стоуна — Вейерштрасса.

Лемма 1 *Пусть A — такая β-равномерная алгебра на X, что вместе с каждой функцией f из A сопряженная функция $\overline{f}$ также принадлежит A. Тогда $A = C(X)_\beta$.*

Пусть F — замкнутое подмножество локально компактного пространства X, и $C_b(F)$ — алгебра всех ограниченных непрерывных функций на множестве F. Алгебру $C_b(F)$ в β-топологии, порожденной функциями из $C_0(F)$, будем обозначать $C(F)_\beta$.

Лемма 2 *Пусть F — замкнутое множество в X. β-топология на $C_b(F)$ совпадает с индуцированной на F β-топологией алгебры $C(X)_\beta$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 3 *Пусть K — некоторое подпространство в $M(X)$ и $K^\perp = \{f \in C(X)_\beta : \ f \perp K\}$. Тогда $K^\perp$ — замкнутое в β-топологии пространство в $C(X)_\beta$.*

Доказательство. Пусть сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ в $K^\perp$ β-сходится к f_0 из $C(X)_\beta$. Зафиксируем меру μ из K, и пусть g такая функция в $C_0(X)$, что мера $\nu = \frac{1}{g}\mu$ также принадлежит $M(X)$. Тогда $\lim_I P_g(f_i - f_0) = 0$, т. е. $\lim_I \sup_X |f_i g - f_0 g| = 0$. Поэтому,

$$\left| \int_X (f_i g - f_0 g) d\nu \right| = 0.$$

Но $\int_X (f_i g - f_0 g) d\nu = \int (f_i - f_0) d\mu = -\int f_0 d\mu$. Следовательно, $\int f_0 d\mu = 0$, т. е. f_0 из $K^\perp$. Лемма доказана.

Пусть A — β-равномерная алгебра на X. $A^\perp$ — пространство всех мер на X, ортогональных к алгебре A. Замкнутое множество F в X называется *множеством пика* для алгебры A, если существует функция f в A такая, что $f(x) = 1$, если $x \in F$ и $|f(x)| < 1$ если $x \in X \setminus F$.

Лемма 4 *Пусть F — множество пика для алгебры A. Тогда сужение A на F есть β-равномерная алгебра на F.*

Доказательство. Алгебра A полна в равномерной топологии и в этой топологии A есть равномерная алгебра. Пусть $\triangle(A)$ пространство мультипликативных функционалов алгебры A. Обозначим через $\overline{F}$ замыкание множества F в $\triangle(A)$. Множество $\overline{F}$ есть подмножество множества $\widetilde{F} = \{m \in \triangle(A) :$

$m(f) = 1\}$, где f — функция из A, достигающая пика на множестве F. Пусть $\widetilde{A}$ — представление Гельфанда алгебры A. Тогда множество $\widetilde{F}$ есть множество пика для алгебры $\widetilde{A}$. Поэтому $\mu|_{\widetilde{F}}$ сужение меры μ из $\widetilde{A}^{\perp}$, пространства всех мер на $\triangle(A)$ ортогональных к алгебре $\widetilde{A}$, на множество $\widetilde{F}$ также принадлежит $\widetilde{A}^{\perp}$. Локально компактное множество X есть подмножество множества $\triangle(A)$, и $A^{\perp}$ есть подпространство в $\widetilde{A}^{\perp}$, $A^{\perp} = \widetilde{A}^{\perp} \cap M(X)$. Следовательно, $\mu|_F$ принадлежит $A^{\perp}$, для любого μ из $A^{\perp}$. Т. о. $(A^{\perp}|_F)^{\perp} = A|_F$, и $A|_F$ β-замкнутая равномерная алгебра на F. Лемма доказана.

Замкнутое множество F в X называется *p-множеством для* A, если F есть пересечение множеств пика алгебры A.

Следствие 2 *Если F — p-множество пика для A, то сужение A на F есть β-равномерная подалгебра алгебры $C(F)_\beta$.*

Если p-множество состоит из одной точки, то такую точку называют *p-точкой.* Замыкание в X всех p-точек алгебры A будем называть *β-границей Шилова* алгебры A. Как хорошо известно, у банаховых алгебр всегда существует граница Шилова. Ниже приведем пример β-равномерной антисимметричной алгебры не имеющей β-границу Шилова.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ — открытый единичный диск комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и A — алгебра всех ограниченных аналитических функций на $\mathbb{D}$. Эта алгебра есть β-равномерная антисимметричная алгебра на $\mathbb{D}$ и у нее нет β-границы Шилова.

§2. Однородные β-равномерные алгебры.

Везде в этой работе будем подразумевать, что G — связная σ-компактная абелева группа. Пространство $M(G)$ всех регулярных конечных борелевских мер на локально компактной группе G можно отождествить с пространством $C(G)^*_\beta$ всех непрерывных в β-топологии линейных функционалов алгебры $C(G)_\beta$. Как хорошо известно, $M(G)$ является банаховой алгеброй относительно нормы — полной вариации и произведения — свертки. Пространство $L(G)$ всех мер из $M(G)$ абсолютно непрерывных относительно меры Хаара μ группы G есть замкнутый идеал в $M(G)$. Известно, что $L(G) = \mathcal{L}_1(G, \mu) * \mu$, где $f * \mu$ — свертка функции f и меры μ.

Пусть A — однородная β-равномерная алгебра на G. *Спектром* алгебры A будем называть полугруппу $S(A) = A \cap \widehat{G}$. Пусть $A^{\perp}$ — пространство всех регулярных борелевских мер на G, ортогональных к алгебре A. Для любых ξ из $A^{\perp}$ и ζ из $M(G)$ свертка $\xi * \zeta$ также принадлежит $A^{\perp}$, т. е. $A^{\perp}$ идеал в алгебре $M(G)$. В частности, $L(G) * A^{\perp}$ есть подпространство как в $A^{\perp}$, так и в $L(G)$.

Лемма 5 *Пространство $L_A(G) = A^{\perp} \cap L(G)$ плотно в β^*-топологии в $A^{\perp}$.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что пространство $L_A^{\perp}(G) = \{f \in C(G)_\beta : \ f \perp L_A(G)\}$ совпадает с A.

Алгебра $L(G)$ обладает ограниченной аппроксимативной единицей, сходящейся в *-слабой топологии к мере Дирака δ_e, сосредоточенной в единичном элементе группы G. Так как $\delta_e * \eta = \eta$, для любого $\eta \in M(G)$, и операция свертки сохраняет сходимость в *-слабой топологии, то $L(G) * A^{\perp}$ содержится в $L_A(G)$ и плотно в *-слабой топологии в $A^{\perp}$. Отсюда, $L_A^{\perp}(G) = A$. Лемма доказана.

Теорема 1 *$S(A)$ — нетривиальная замкнутая подполугруппа группы $\widehat{G}$.*

Доказательство. Пространство дуальное к $\mathcal{L}_1(G,\mu)$ есть $\mathcal{L}_\infty(G,\mu)$. Пусть H^∞ замыкание алгебры A в *-слабой топологии пространства $\mathcal{L}_\infty(G,\mu)$. Пространство $(H^\infty)^\perp$ в $\mathcal{L}_1(G,\mu)$ можно отождествить с пространством $L_A(G)$. Поэтому $H^\infty \neq \mathcal{L}_\infty(G,\mu)$. Из однородности алгебры A следует однородность и пространства H^∞. Таким образом, H^∞ — *-слабое инвариантное подпространство в $\mathcal{L}_\infty(G,\mu)$. Согласно теореме 40(7) из [2], спектр $S(H^\infty)$ алгебры H^∞ это нетривиальная замкнутая подполугруппа группы $\widehat{G}$. Покажем, что $S(A) = S(H^\infty)$. Очевидно, $S(A)$ содержится в $S(H^\infty)$. Пусть χ – характер из $S(H^\infty)$. Тогда χ ортогональна к пространству $L_A(G)$ и, следовательно, χ принадлежит A (см. лемму 5). Теорема доказана.

Граница Шилова банаховых алгебр в частном случае равномерных алгебр отражает многие свойства самой алгебры. Для β-равномерных алгебр это не так, не каждая β-равномерная алгебра имеет β-границу Шилова. В случае же с однородными β-равномерными алгебрами, как будет показано ниже, мы сталкиваемся с ситуацией, когда β-граница Шилова совпадает с областью определения, т. е. с границей G.

Лемма 6 *Пусть A — β-равномерная однородная алгебра на локально компактной абелевой группе G. Тогда каждая точка из G является p-точкой для алгебры A.*

Доказательство. В силу однородности достаточно доказать, что e — единичный элемент группы G, является p-точкой для алгебры A. Пусть

$$F = \{\alpha \in G : \ \chi(\alpha) = 1, \text{ для всех } \chi \text{ из } S(A)\}.$$

Очевидно, F — локально компактная подгруппа группы G и $F \neq G$, согласно теореме 1. Функция $f(\alpha) = \frac{1+\chi(\alpha)}{2}$, где χ характер из $S(A)$, достигает пика на множестве $F_\chi = \{\alpha \in G : \ \chi(\alpha) = 1\}$, т. е. F_χ — есть множество пика для алгебры A. Поэтому $F = \cap_{S(A)} F_\chi$ есть p-множество для A.

Согласно следствию 2, алгебра A_F, полученная сужением алгебры A на множество F, является β-равномерной подалгеброй алгебры $C(F)_\beta$. Из однородности алгебры A следует однородность алгебры A_F. По теореме 1, подполугруппа $S(A_F)$ есть нетривиальное множество в $\widehat{F}$ — группе характеров группы G. Множество

$$F_1 = \{\alpha \in F : \ \chi(\alpha) = 1, \text{ для всех } \chi \text{ из } S(A_F)\}$$

будет p-множеством для алгебры A_F и, согласно общей теории равномерных алгебр, для алгебры A. Продолжая этот процесс, мы получим, что e — p-точка для A. Лемма доказана.

Теорема 2 *β-граница Шилова однородной β-равномерной алгебры A совпадает с группой G.*

Доказательство непосредственно следует из леммы 5.

§3. Антисимметричные свойства β-равномерных алгебр.

Замкнутое множество F в X называется множеством *антисимметрии* для алгебры A, если из условия, что сужение f из A на F — вещественная на F функция, следует, что f на F принимает постоянное значение. Множество F называется *максимальным множеством антисимметрии* для алгебры A, если F есть множество антисимметри и не является подмножеством другого множества антисимметрии для алгебры A. По теореме Бишопа — Шилова, компактное множество X можно представить в виде объединения непересекающегося семейства максимальных множеств антисимметрии для равномерной алгебры A (см. [3]). И. Гликсберг обобщил эту теорему на случай β-равномерных алгебр (см. [4]). В данном параграфе опишем максимальные множества антисимметрии β-равномерных однородных алгебр на локально компактных абелевых группах.

Лемма 7 *Пусть A — β-равномерная однородная алгебра на локально компактной абелевой группе G, и F — максимальное множество антисимметрии алгебры A, содержащее единичный элемент e группы G. Тогда F — локально компактная абелева группа.*

Доказательство. Из однородности алгебры A следует, что если F — множество антисимметрии, то βF также множество антисимметрии, для любого β из G. Действительно. Пусть βF не является множеством антисимметрии. Тогда найдется f из A такая функция, что сужение f на βF есть вещественная непостоянная функция. Тогда функция f_β из A, $f_\beta(\alpha) = f(\beta\alpha)$, будет непостоянной вещественной функцией на F. Пришли к противоречию. Аналогично можно доказать, что если F — максимальное множество антисимметрии для A, то βF — также максимальное множество антисимметрии для любого β из G. Так как максимальные множества антисимметрии либо не пересекаются, либо сопадают и множество F содержит единичный элемент, то $\beta^{-1}F$, для любого β из G, также содержит единичный элемент, и, следовательно, $\beta^{-1}F = F$, т. е. F — группа. Замкнутость группы F очевидна. Лемма доказана.

Попутно было показано, что каждое максимальное множество антисимметрии алгебры A является классом смежности группы G по подгруппе F.

Пусть $\mathcal{B}$ — подалгебра алгебры A, порожденная всеми вещественными функциями алгебры A. Очевидно, алгебра $\mathcal{B}$ замкнута в β-топологии и инвариантна относительно сдвигов элементами группы G. Поэтому множество

$$F = \{\alpha \in G : \ f(\alpha) = f(e), \text{ для всех } f \text{ из } \mathcal{B}\}$$

есть локально компактная абелева группа, и каждая функция f из $\mathcal{B}$ постоянна на классах смежности βF, $\beta \in G$. Следовательно, алгебру $\mathcal{B}$ можно отождествить с некоторой подалгеброй $\widetilde{\mathcal{B}}$ алгебры $C(G/F)_\beta$, где G/F — фактор-группа группы G по подгруппе F; каждой функции $f(\alpha)$ из $\mathcal{B}$ можно поставить в соответствие функцию $f([\alpha]) = f(\alpha)$, где $[\alpha] = \alpha F$ — класс смежности элемента α по подгруппе F.

Лемма 8 *Алгебра $\widetilde{\mathcal{B}}$ совпадает с алгеброй $C(G/F)_\beta$.*

Доказательство. Нам достаточно показать, согласно лемме 1, что $\mathcal{B}$ — β-замкнутая подалгебра алгебры $C(G/F)_\beta$.

Пусть последовательность функций $\{\widetilde{f}_n\}_{n=1}^\infty$ из $\widetilde{\mathcal{B}}$ сходится в β-топологии к некоторой функции $\widetilde{f}_0$. Нам надо показать, что $\widetilde{f}_0$ также принадлежит $\widetilde{\mathcal{B}}$. Для этого достаточно показать, что соответствующая последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ в A является β-последовательностью Коши.

Пусть g функция из $C_0(G)$. Рассмотрим на группе G/F функцию ϕ:

$$\phi(\alpha) = \sup_{\alpha F} |g|.$$

Так как группу G можно представить в виде декартова произведения $U \times V$, где U — открытое множество в F, а V — открытое множество в группе G/F, и, при этом, функция в таком представлении является непрерывной функцией двух переменных, то ϕ также непрерывная функция на фактор группе G/F.

Можно проверить, что эта функция принадлежит $C_0(G/F)$. Действительно, если последовательность $\{[\alpha_n]\}_{n=1}^\infty$ сходится к "бесконечности"в G/F, то последовательность $\{\alpha_n\beta_n\}_{n=1}^\infty$, где $\alpha_n\beta_n$ такой элемент класса смежности $\alpha_n F$, что $|g(\alpha_n\beta_n)| = \sup_{\alpha_n F}|g|$, также сходится к "бесконечности"в G, но

$$\lim_{n\to\infty} |g(\alpha_n\beta_n)| = 0, \ (g \in C_0(F)).$$

Отсюда ϕ принадлежит $C_0(G/F)$. Следовательно,

$$P_g\left(f_n - f_m\right) = \sup_G |gf_n - gf_m| = \sup_{\alpha\in G}\left(\sup_{\alpha F}|gf_n - gf_m|\right) =$$

$$= \sup_{[\alpha]}\left|\phi\widetilde{f}_n - \phi\widetilde{f}_m\right| = P_\phi\left(\widetilde{f}_n - \widetilde{f}_m\right).$$

Из условия $\{\widetilde{f}_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к $\widetilde{f}_0$ следует, что $\{\widetilde{f}_n\}_{n=1}^\infty$ β-последовательность Коши в $C(G/F)_\beta$. Приведенное выше равенство показывает, что $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — β-последовательность Коши в A, и, следовательно, f_0 принадлежит A. Таким образом, $\widetilde{f}_0$ принадлежит алгебре $\widetilde{\mathcal{B}}$, и, следовательно, $\widetilde{\mathcal{B}}$ — β-замкнутая равномерная подалгебра алгебры $C(G/F)_\beta$. Применим теорему Стоуна — Вейерштрасса для β-равномерных алгебр, получим $\widetilde{\mathcal{B}} = C(G/F)_\beta$. Лемма доказана.

Теорема 3 *Следующие условия эквивалентны*

(a) A — антисимметричная β-равномерная алгебра на G

(b) Полугруппа $S(A)$ не содержит нетривиальную группу.

Доказательство. $(a) \Rightarrow (b)$ — очевидно.

$(b) \Rightarrow (a)$. Предположим, $S(A)$ не содержит нетривиальную группу. Допустим, A не антисимметричная алгебра. Обозначим через $\mathcal{B}$ β-замкнутую подалгебру алгебры A, порожденную вещественными функциями. Согласно лемме 8, алгебра $\widetilde{\mathcal{B}}$ совпадает с $C(G/F)_\beta$. Поэтому $\widetilde{\mathcal{B}}$ содержит все характеры группы G, которые равны единице на F. Отсюда $S(A)$ содержит нетривиальную группу. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Литература

[1] Buck R. C. Bounded continuous functions on a locally compact space. – Michigan Math. Journal, v. 5, №2, 1958, 95-104.

[2] Хьюитт Е., Росс К. Абстрактный гармонический анализ, т.2. – М.: Мир. 1975.

[3] Гамелин Т. Равномерные алгебры, 2-ое изд. – Челси, Нью-Йорк, 1984.

[4] Gliksberg I. Bishop's generalized Stone-Weierstrass theorem for the strict topology. – Proc. Amer. Math. Soc. v. 14, 1963, 329-333.

Шамин Р.В., Геогджаев В.В.

Статистическое исследование существования решений, описывающих поверхностные волны

Проблемам моделирования поверхностных волн идеальной жидкости посвящено много работ (например, [1], [2], [3]). Математические проблем, возникающие при исследовании динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью, являются достаточно сложными как для теоретического исследования, так и для проведения вычислительных экспериментов. В настоящей работе рассматривается применение статистических методов для исследования вопросов существования решений на конечном временном интервале со случайными начальными данными.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y), ограниченную свободной поверхностью

$$-\infty < y \leq \eta(x,t),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Считая движение жидкости потенциальным, мы имеем

$$v(x,y,t) = \nabla\Phi(x,y,t),$$

где $v(x,y,t)$ — двумерное поле скоростей, $\Phi(x,y,t)$ — потенциал скоростей. Из условия несжимаемости жидкости $\operatorname{div} v = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x,y,t) = 0.$$

С уравнением $\Delta\Phi = 0$ связываются следующие граничные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x\eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$
$$(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$
$$\Phi_y|_{y=-\infty} = 0,$$

здесь g — ускорение поля тяжести.

Как известно, эти уравнения являются достаточно сложными для исследования. В настоящей работе мы будем использовать уравнения Дьяченко, полученные в работе [4].

Рассмотрим интегродифференциальные уравнения относительно аналитичных в нижней полуплоскости $\{w = u + iv : v < 0\}$ функций $R(w,t)$ и $V(w,t)$:

$$\begin{gathered} R_t = i(\mathrm{P}(V\overline{R} + \overline{V}R)R_w - (\mathrm{P}(V\overline{R} + \overline{V}R))_w R), \\ V_t = i((\mathrm{P}(V\overline{R} + \overline{V}R))V_w - (\mathrm{P}(V\overline{V}))_w R) + g(R-1), \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathrm{P} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{I} + i\mathrm{H})$, H — оператор Гильберта. Функции R и V являются 2π-периодичными по переменной u и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &R(w,t) \to 1, \quad |w| \to \infty, \quad \operatorname{Im} w \leq 0,\\ &V(w,t) \to 0, \quad |w| \to \infty, \quad \operatorname{Im} w \leq 0. \end{aligned}$$

Существование и единственность аналитических решений задачи (1) численные методы, а также конструктивная оценка времени существования аналитических решений рассматривались в работах: [2], [5], [6], [7], [8].

Опишем проекционную схему для получения приближенных решений. Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(u,t) = 1 + \sum_{k=1}^{N} r_k(t) e^{-iku}, \ V^N(u,t) = \sum_{k=1}^{N} v_k(t) e^{-iku}. \tag{2}$$

Введем бинарную операцию «$*$», которая является замкнутой для множества функций вида (2). Пусть $A = \sum\limits_{k=-N}^{N} a_k e^{-iku}$, $B = \sum\limits_{k=-N}^{N} b_k e^{-iku}$. Тогда для $C = AB$ имеем $C = \sum\limits_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}$. Операцию «$*$» введем следующим образом $A * B = \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{-iku}$. Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений

$$\begin{aligned} R_t^N &= i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N),\\ V_t^N &= i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{aligned} \tag{3}$$

где $U^N = \mathrm{P}(V^N * \overline{R}^N + \overline{V}^N * R^N)$, $B = \mathrm{P}(V^N * \overline{V}^N)$.

Опишем схему нашего вычислительного эксперимента.

1. Выбираем временной интервал, на котором будем исследовать наши решения — фиксируем положительное число T.

2. Выбираем параметр дискретизации — фиксируем число $N > 1$

3. Фиксируем положительное число β.

4. Выбираем число α такое, что $0 < \alpha < \beta$.

5. Строим случайные начальные данные следующим образом:

$$\begin{aligned} R_0(u) &= 1 + \sum_{k=1}^{N} (\xi_k^r e^{-\alpha k}) e^{-iuk},\\ V_0(u) &= \sum_{k=1}^{N} (\xi_k^v e^{-\alpha k} i) e^{-iuk}, \end{aligned} \tag{4}$$

   где ξ_k^r, ξ_k^v, $k = 1, 2, \ldots, N$ суть независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[-1, 1]$.

6. Находим численные решения задачи (1) с начальными условиями, выбранными на предыдущем шаге.

7. Нахождение численного решения прекращаем в при выполнении одного из двух условий: 1) $t = T$, 2) на текущем шаге по времени нарушено одно из условий:
$$\begin{aligned} |r_k^N(t)| \leq e^{-\beta k}, \\ |v_k^N(t)| \leq e^{-\beta k}, \end{aligned} \tag{5}$$
для всех $k = 1, \ldots, N$ и $t < T$.

8. В первом случае считаем, что эксперимент закончился «неудачей», а во втором случае будем считать, что эксперимент закончился «успешно».

Считая, параметры T, N, β фиксированными, мы имеем случайное событие $\kappa(\alpha)$, зависящее от параметра α. Это случайное событие может принимать два взаимно исключающих значения: «успех» и «неудача». Припишем значению «успех» числовое значение 1, а значению «неудача» — числовое значение 0. Таким образом будем рассматривать случайную величину $\kappa(\alpha)$. Эта случайная величина имеет биномиальное распределение. С вероятностью p_α принимает значение 1 и с вероятностью $q_\alpha = 1 - p_\alpha$ принимает значение 0. Поскольку наша случайная величина зависит от параметра, то можно говорить о случайной функции, заданной на множестве $\Omega \subset (0, \beta)$.

Разумеется, мы не знаем истинного распределения вероятностей случайной величины $\kappa(\alpha)$, поэтому мы будем получать статистические оценки для вероятностей p_α и q_α, проводя серии вычислительных экспериментов. Как известно наиболее употребительной оценкой вероятности события является его частота появления. Эта оценка является состоятельной несмещенной оценкой с минимальной дисперсией. В дополнение к полученной оценке вероятности «успеха» (выхода численного решения из исследуемой области, т.е. нарушения неравенств (5)) мы будем вычислять доверительный интервал для нашей оценки.

Опишем параметры наших вычислительных экспериментов.

Исследуемый временной интервал	$[0, 10]$
Параметр дискретизации	1024
Шаг по времени	0.001
Параметр β	0.040475
Количество серий вычислений	1000

Параметр β выбран из условия
$$\beta = -\frac{\ln 10^{-9}}{(N/2)}.$$
Переменный параметр α мы будем выбирать из множества $\Omega = \{0.55;\ 0.65;\ 0.75;\ 0.85;\ 0.95;\ 1.05;\ 1.15;\ 1.25;\ 1.35;\ 1.45;\ 1.55\}$. Для каждого значения параметра α мы проведем серию из 1000 испытаний. На основе этой выборке

мы оценим вероятность того, что на отрезке $[0, 10]$ решение из класса (4) нарушит условие (5).

На рисунке 1 приведена зависимость вероятности p_α от значения параметра α. Как и следовало ожидать, с увеличением параметра α вероятность «успехов», т.е. нарушения условий (5), уменьшается.

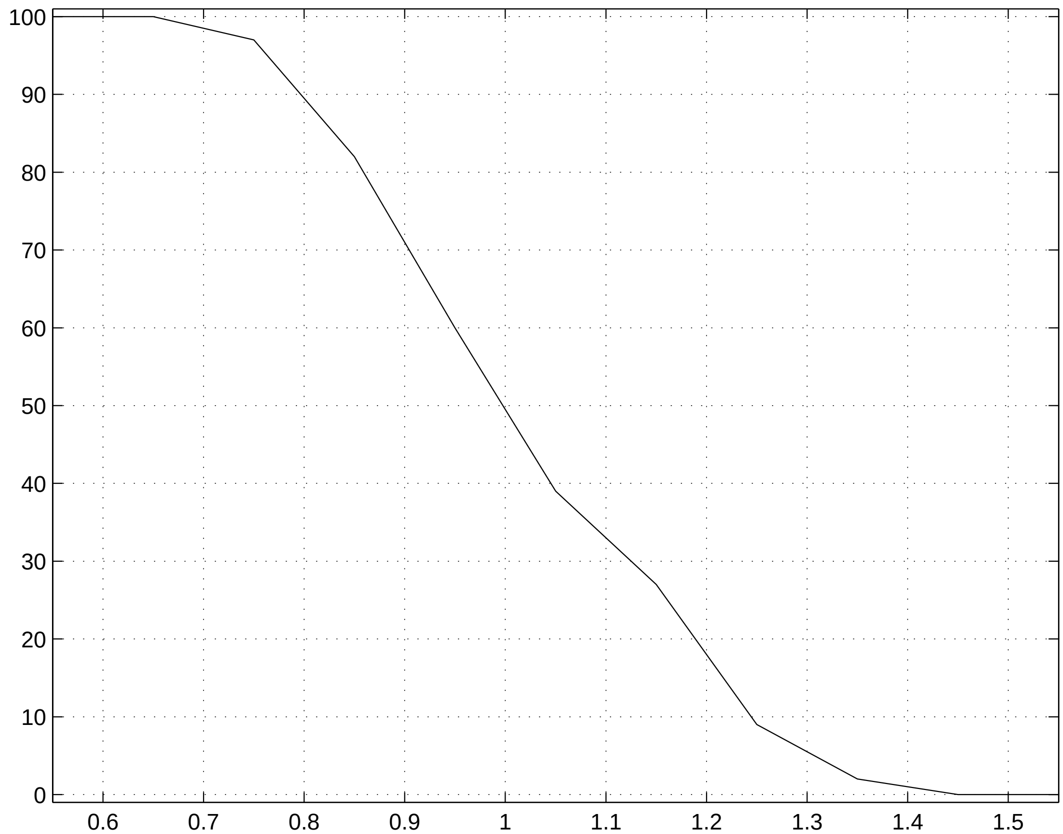


Рис. 1:

Литература

[1] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и и хаотическая динамика», 2003, 416 с.

[2] Шамин Р.В. Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. — М.: Наука, 2008.

[3] Craig W., Sulem C. Numerical simulation of gravity waves // J. Comput. Phys. — 1993. — *108*. — p. 73–83.

[4] Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // European Journal of Mechanics B/Fluids 21, 2002, p. 283–291.

[5] Шамин Р. В. К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления — 2007. — *21*, — С. 133–148.

[6] Шамин Р. В. Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью// Сиб. журн. выч. мат. — 2006. — *9*, № 4. — С. 325–340.

[7] Шамин Р. В. О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. — 2006. — *406*, № 5. — С. 112-113.

[8] Шамин Р. В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Докл. АН. — 2008. — *418*, № 5. — С. 112-113.

Шапошников К.С.

Метод расчета стационарного магнитного поля в присутствии поверхностей с краем и бесконечной магнитной проницаемостью

Многие инженерные задачи требуют расчета магнитного поля в присутствии тонких ферромагнитных слоев (оболочек, пластин). Их толщина может быть очень мала по сравнению с остальными геометрическими размерами. Если ферромагнетик не насыщен, обычной идеализацией является наделение вышеупомянутых слоев идеальными магнитными свойствами. В такой постановке естественно рассматривать задачу расчета магнитного поля в присутствии поверхностей с краем и бесконечной магнитной проницаемостью.

В данной работе обосновывается применение метода ортогональных проекций к решению такого рода задач и показывается его практическая эффективность. Теория этого метода сравнительно проста и наглядна, благодаря геометрическому подходу, а получаемая численная модель экономна в том смысле, что ее размерность зависит только от степени дискретизации поверхностей.

Рассмотрим задачу расчета стационарного магнитного поля в трехмерном пространстве $\Omega = E_3$ в присутствии кусочно-гладких липшицевых поверхностей $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_N$ с бесконечной магнитной проницаемостью, которые вместе с заданными источниками $\boldsymbol{\delta}$ первичного поля $\mathbf{H}^0$ умещается в шаре Ω_R с границей Γ_R достаточно большого радиуса R. Внешнюю среду будем считать однородной с конечной положительной магнитной проницаемостью $\mu = const$ (см. рис. 1).

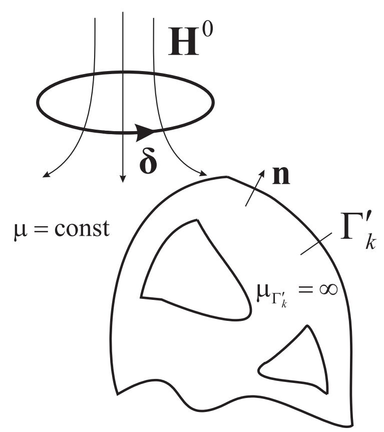


Рис. 1: К постановке задачи

В отношении заданных источников примем, что их магнитное поле до внесения намагничиваемой поверхности обладало конечной энергией, то есть

$$\int\limits_{\Omega} |\mathbf{H}^0|^2 d\Omega < \infty. \tag{1}$$

В противном случае будем понимать под $\mathbf{H}^0$ напряженность эквивалентного в смысле [1] поля, т. е. совпадающего с исходным на $\Gamma'_k, k = \overline{1, N}$, но удовлетворяющего неравенству (1).

Для расчета магнитного поля в нашей постановке получим краевую задачу:

$$\varphi^* = 0 \text{ вне } \Gamma', \quad \varphi^* = C_k - \varphi^0 \text{ на } \Gamma'_k, k = \overline{1, N}, \quad \varphi^*(M) \underset{M \to \infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2}$$

где φ^* — скалярный магнитный потенциал напряженности поля реакции поверхностей Γ'_k; $C_k = const$, $k = \overline{1, N}$; φ^0 — потенциал первичного (невозмущенного) или ему эквивалентного в смысле [1] поля напряженности $\mathbf{H}^0$, которое до внесения намагничиваемых поверхностей обладало конечной энергией $\int\limits_{\Omega} |\mathbf{H}^0|^2 \, d\Omega < \infty$. Будем полагать, что в нашем случае φ^0 определен хотя бы на Γ. Здесь Γ — объединение ориентируемых замкнутых поверхностей $\Gamma_k, k = \overline{1, N}$, таких что $\Gamma_k = \Gamma'_k \cup \Gamma''_k$; Γ''_k — дополнения Γ'_k до замкнутых поверхностей Γ_k, $\Gamma' = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Gamma'_k$, $\Gamma'' = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Gamma''_k$.

К задаче (2) добавим условие

$$\oint\limits_{\Sigma} \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Gamma = 0 \tag{3}$$

для любой замкнутой ориентируемой поверхности Σ, отстоящей от Γ' на положительное расстояние, и неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi^*|^2 d\Omega < \infty, \tag{4}$$

означающее, что нас интересует решение, при котором энергия поля реакции конечна.

В силу неравенства (4) будет естественно искать решение задачи (2), (3) в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$ с одной из подходящих эквивалентных метрик.

Рассмотрим пространство $\mathrm{H}(\Omega)$, введенное в [2]. Оно состоит из вещественных функций $\{\psi\}$ с конечным интегралом Дирихле в Ω, квадратично-суммируемых в шаре Ω_R, гармонических вне Ω_R, а также имеющих нулевые средние значения на Γ_R и исчезающих в бесконечно-удаленной точке. Скалярное произведение и норма в $\mathrm{H}(\Omega)$ выглядят следующим образом:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\mathrm{H}} = \int\limits_{\Omega} \nabla \psi_1 \nabla \psi_2 d\Omega, \quad \|\psi\|_{\mathrm{H}} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{\mathrm{H}}}. \tag{5}$$

Производные в (5) понимаются в смысле Соболева [3], а интеграл — в смысле Лебега [3].

Согласно [2], имеет место ортогональное разложение: $\mathrm{H}(\Omega) = \mathrm{H}^*(\Omega) \oplus \mathrm{H}^0_\sigma(\Omega)$, где $\mathrm{H}^*(\Omega)$ образовано функциями, принимающими на Γ_k постоянные значения, а $\mathrm{H}^0_\sigma(\Omega)$ — функциями, предcтавимыми в виде потенциалов простого слоя с плотностями, распределенными на Γ и имеющими на Γ_k нулевые средние значения, то есть

$$\psi \in \mathrm{H}^0_\sigma(\Omega) \Rightarrow \psi(M) = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\Gamma} \frac{\sigma(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q, \quad \oint\limits_{\Gamma_k} \sigma d\Gamma = 0 \quad k = \overline{1, N}. \tag{6}$$

Плотности σ в (6) являются обобщенными функциями, которые согласно [2] определяются на Γ как функционалы на основе первого тождества Грина [4]. Поэтому будем понимать операции, выполняемые над элементами $\mathrm{H}^0_\sigma(\Omega)$, как операции над сходящимися по норме (5) к соответствующим элементам $\mathrm{H}^0_\sigma(\Omega)$ последовательностей из плотного в $\mathrm{H}^0_\sigma(\Omega)$ множества. Роль такого множества согласно [2] может играть множество потенциалов с ограниченными кусочно-непрерывными плотностями.

Нами установлено, что в свою очередь, $\mathrm{H}^0_\sigma(\Omega) = \mathrm{H}^{0(1)}_\sigma(\Omega) \oplus \mathrm{H}^{0(2)}_\sigma(\Omega)$, где $\mathrm{H}^{0(1)}_\sigma(\Omega)$ образовано потенциалами с нулевыми плотностями на Γ'', $\mathrm{H}^{0(2)}_\sigma(\Omega)$ — потенциалами, принимающими на Γ'_k постоянные значения. Очевидно, что в рамках нашей задачи $\varphi^* \in \mathrm{H}^{0(1)}_\sigma(\Omega)$.

Отметим, что если φ^0 на Γ допустимо рассматривать как след функции из $W^1_2(\Omega_R)$ (правильной непрерывности φ^0 на Γ для этого достаточно), согласно [5] при подходящей калибровке константы его можно рассматривать как значения на Γ некоторой функции из $\mathrm{H}(\Omega)$. То есть φ^0 можно продолжить в Ω и фактически заменить исходное первичное соленоидальное поле эквивалентным потенциальным полем во всем пространстве. Как будет показано ниже, это продолжение понадобится нам только для обоснования метода, то есть, достаточно лишь факта его существования.

Далее определим потенциал φ эквивалентного результирующего поля в виде $\varphi = \varphi^0 + \varphi^*$. Тогда из краевого условия задачи (2) и принадлежности φ^0, φ^* пространствам $\mathrm{H}(\Omega)$, $\mathrm{H}^{0(1)}_\sigma(\Omega)$ соответственно следует, что $\varphi \in \mathrm{H}^*(\Omega) \oplus \mathrm{H}^{0(2)}_\sigma(\Omega)$.

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению проекции известного потенциала φ^0 на подпространство $\mathrm{H}^{0(1)}_\sigma(\Omega)$, а именно

$$\varphi^* = -\mathrm{P}\varphi^0,$$

где P — оператор ортогонального проектирования $\mathrm{H}(\Omega)$ в $\mathrm{H}^{0(1)}_\sigma(\Omega)$.

Решение задачи ортогонального проектирования можно свести к нахождению координат $\{c_i\}_{i=1}^n$ известного поля φ^0 в некотором базисе $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ из подпространства $\mathrm{H}^{0(1)}_\sigma(\Omega)$. Тогда разложение решения по данному базису будет выглядеть следующим образом: $\varphi^* \cong \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$.

Координаты разложения определяются из СЛАУ с матрицей Грамма:

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1)_{\mathrm{H}} & \dots & (\varphi_1, \varphi_n)_{\mathrm{H}} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_n, \varphi_1)_{\mathrm{H}} & \dots & (\varphi_n, \varphi_n)_{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\varphi^0, \varphi_1)_{\mathrm{H}} \\ \dots \\ (\varphi^0, \varphi_n)_{\mathrm{H}} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

В качестве координатных функций представляется удобным взять потенциалы простого слоя с финитными кусочно-постоянными плотностями σ_i, равными нулю на Γ'' и обладающими на Γ'_k, $k = \overline{1, N}$ нулевыми средними значениями. Выбранная таким образом система координатных функций образует плотное множество в смысле аппроксимативной сходимости в $\mathrm{H}^0_\sigma(\Omega)$. Остается лишь позаботиться о ее линейной независимости.

При таком выборе координатных функций элементы основной матрицы и столбца свободных членов системы (7) вычисляются по формулам:

$$\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle_{\mathrm{H}} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma'} \sigma_i(M) \int\limits_{\Gamma'} \frac{\sigma_k(Q)}{r_{QM}} d\Gamma_Q d\Gamma_M, i, j = \overline{1, N} \tag{8}$$

$$\langle \varphi^0, \varphi_i \rangle_{\mathrm{H}} = \int\limits_{\Gamma'} \sigma_i \varphi^0 d\Gamma i = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Причем, при использовании описанной выше системы координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ оказывается осуществимым ряд преобразований, позволяющих получить удобное для численной реализации представление выражения (8). Из (9) видно, что для решения задачи достаточно знания значений φ^0 только на Γ', где эквивалентное первичное поле совпадает с исходным. Поэтому, как отмечалось выше, явного представления эквивалентного поля не требуется.

Очевидно, матрица системы (7) симметрична. Согласно [6], итеррационный метод Гаусса-Зейделя для решения СЛАУ с такими матрицами сходится при любом начальном приближении.

Отметим также, что численная модеь метода ортогональных проекций совпадает с моделью, получаемой применением метода Галеркина к интегральному уравнению первого рода со слабоособым ядром. Однако, при обосновании описанной здесь модели не пришлось обращаться к теории интегральных уравнений на липшицевых поверхностях. Эта теория является весьма сложной, хотя и содержательной [5, 7].

Для численного решения задачи создан программный пакет, разработанный с использованием языка высокого уровня Microsoft Visual C# 2005. Примеры расчетов для пластин различной конфигурации приведены на рис. 2. Первичное поле создаеся витком с током, расположенным над пластинами.

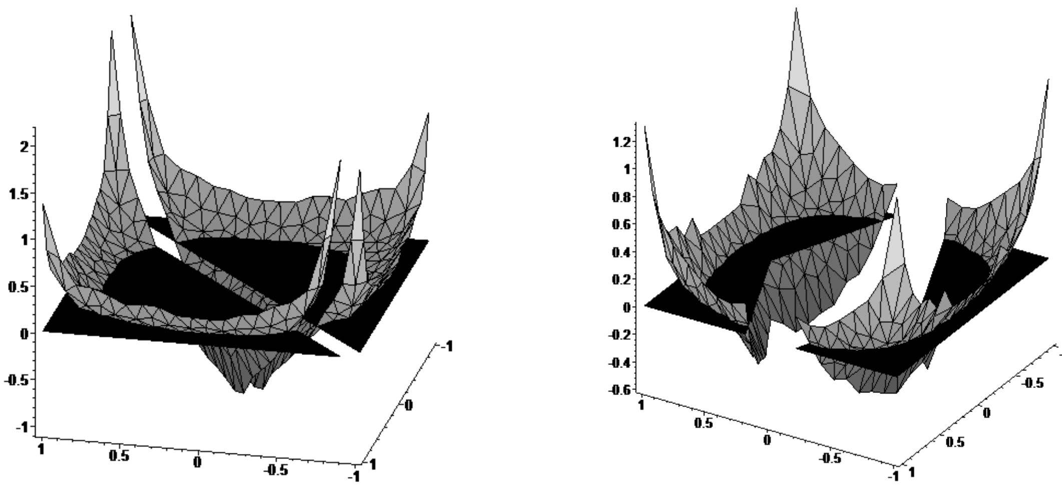


Рис. 2: Распределения плотностей потенциалов поля реакции

Литература

[1] Астахов В. И. О допустимости идеализации границ поляризуемых тел и некоторых энергетических соотношениях для стационарного магнитного и электростатического полей // Изв. вузов. Электромеханика. 2000. № 1. С. 3–14.

[2] Астахов В. И. Поверхностные потенциалы и операторы теории потенциала в пространствах Дирихле // Изв. вузов. Электромеханика. 2000. № 2. С. 3–18.

[3] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа, М.: Наука, 1965. – 520 с.

[4] Кочин Н. Е Векторный анализ и начала тензорного исчисления, М.: Изд. АН СССР, 1961. – 219 с.

[5] Астахов В. И. Уравнения первого рода в задачах расчета статических и стационарных полей. Часть 1 // Изв. вузов. Электромеханика. 2005. № 3. с. 3–14.

[6] Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 288 с.

[7] Астахов В. И. Уравнения первого рода в задачах расчета статических и стационарных полей. Часть 2 // Изв. вузов. Электромеханика. 2005. № 4. с. 3–16.

Яковец В.П., Вира М.Б.

Построение асимптотических решений двухточечных краевых задач для вырожденной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(1,\varepsilon) = d, \tag{2}$$

где $x(t,\varepsilon)$ - искомый n-мерный вектор, $t \in [0;1]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]-$ малый вещественный параметр, $h \in N$; $A(t,\varepsilon), B(t)$ - вещественные или комплекснозначные $(n \times n)$-матрицы, d, $f(t,\varepsilon)$ - n-мерные векторы-столбцы; $M, N - (n \times n)$-матрицы с постоянными элементами.

Предполагается, что выполняются такие условия:

1) матрицы $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ и вектор $f(t,\varepsilon)$ допускают на отрезке $[0;1]$ равномерные асимптотические разложения

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t); B(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k B_k(t); f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(t); \tag{3}$$

2) коэффициенты $A_k(t), B_k(t), f_k(t)$ разложений (3) бесконечно дифференцированы на отрезке $[0;1]$;

3)
$$\det B_0(t) = 0, \forall t \in [0;1]. \tag{4}$$

Краевые задачи типа (1),(2) исследовались в работах [1-3] при условии $B(t,\varepsilon) = E$, где $E-$единичная матрица. При этом в [1] для построения асимптотики их решений использовался метод регуляризации, а в [2],[3]- метод пограничных функций. В данной статье изучается возможность построения асимптотического решения краевой задачи (1),(2) с использованием результатов асимптотического анализа общего решения системы (1), осуществлённого в работах [4],[5].

Пусть предельный пучок матриц

$$A_0(t) - \lambda B_0(t) \tag{5}$$

регулярный [6] и имеет постоянную кронекерову структуру при всех $t \in [0;1]$. Рассмотрим случай, когда этот пучок имеет лишь простые элементарные делители, а именно: $n-1$ конечных элементарных делителей и один - бесконечный. Тогда [5] матрица $A_0(t)$ будет иметь $n-1$ собственных векторов $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, относительно матрицы $B_0(t)$, которые соответствуют собственным значениям $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, а матрица $B_0(t)$ - один собстенный вектор $\widetilde{\varphi}(t)$, который соответствует её нулевому собственному значению. Если $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$ - нули матриц $(A_0-\lambda_i B_0)^*$, а $\widetilde{\psi}(t)$ - нуль матрицы $B_0^*(t)$, то их можно определить так, чтобы выполнялись соотношения

$$(B_0\varphi_i,\psi_i)=\delta_{ij}, i,j=\overline{1,n-1}, \tag{6}$$

$$(A_0\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})=1, \tag{7}$$

где $\delta_{ij}-$ символ Кронекера.

Будем предполагать, что векторы ψ_i, $i=\overline{1,n-1}$, $\widetilde{\psi}$ определены именно так.

Исходя из структуры общего асимптотического решения системы (1), построеного в работах [1],[2] решение краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}u_i(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\alpha_i}^{t}\lambda_i(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+v(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_{\alpha_n}^{t}\xi^{-1}(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}(t,\varepsilon), \tag{8}$$

где α_i, $i=\overline{1,n}$ - числа, которые будут определены ниже,$u_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$; $v(t,\varepsilon)$, $\widetilde{v}(t,\varepsilon)$ - $n-$ мерные вектор-функции,$\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\xi(t,\varepsilon)$ - скалярные функции, изображающиеся формальными разложениями:

$$u_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \lambda_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t), i=\overline{1,n-1}, \tag{9}$$

$$v(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(t), \xi(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\xi_k(t), \widetilde{v}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\widetilde{v}_k(t). \tag{10}$$

Покажем, что коэффициенты разложений (9),(10) можно определить так, чтобы вектор (8) формально удовлетворял систему (1) и краевое условие (2). Подставив вектор (8) в систему (1) и приравняв выражения при одинаковых экспонентах, а также выражения без экспонент, будем иметь

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)(u_s(t,\varepsilon))'+\lambda_s(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)u_s(t,\varepsilon)=A(t,\varepsilon)u_s(t,\varepsilon), s=\overline{1,n-1}; \tag{11}$$

$$\varepsilon^{h+1}\xi(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)(v(t,\varepsilon))'+B(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon)=\varepsilon\xi(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon); \tag{12}$$

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)(\widetilde{v}(t,\varepsilon))'=A(t,\varepsilon)\widetilde{v}(t,\varepsilon)+f(t,\varepsilon). \tag{13}$$

Каждое из этих уравнений решим методом [7]. Учитывая разложения (9), (10) приравняв в (11) коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$(A_0(t)-\lambda_0^{(s)}(t)B_0(t))u_0^{(s)}=0, \tag{14}$$

$$(A_0(t)-\lambda_0^{(s)}(t)B_0(t))u_k^{(s)}=b_k^{(s)}(t), k=1,2,...,\ s=\overline{1,n-1}, \tag{15}$$

где

$$b_k^{(s)}(t) = \lambda_k^{(s)}(t) B_0(t) u_0^{(s)}(t) + g_k^{(s)}(t), k = 1, 2, ..., \ s = \overline{1, n-1}, \tag{16}$$

$$g_k^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i} \lambda_i^{(s)} B_j u_{k-i-j}^{(s)} + \lambda_s \sum_{j=1}^{k} B_j u_{k-j}^{(s)} - \sum_{i=1}^{k} A_i u_{k-i}^{(s)} + \sum_{i=0}^{k-h} B_i (u_{k-h-i}^{(s)})'.$$

Из уравнения (14) найдём

$$u_0^{(s)}(t) = c_0^{(s)} \varphi_s(t), \lambda_0^{(s)}(t) = \lambda_s(t), \ s = \overline{1, n-1}. \tag{17}$$

При выполнении условия разрешимости - ортогональности векторов $b_k^{(s)}(t)$ к вектору $\psi_s(t)$ - из уравнений (15) будем иметь

$$u_k^{(s)}(t) = H_s(t) b_k^{(s)}(t) + c_k^{(s)} \varphi_s(t), \ s = \overline{1, n-1}, \tag{18}$$

где $H_s(t) = (A_0(t) - \lambda_0^{(s)}(t) B_0(t))^-$ - матрица, полуобратная к матрице $A_0(t) - \lambda_0^{(s)}(t) B_0(t)$, а $c_k^{(s)}$- постоянные множители, подлежащие определению из краевых условий.

Подставляя (17),(18), в (16), выражение для векторов $b_k^{(s)}(t)$ преобразуем к виду

$$b_k^{(s)}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(s)} \widetilde{b}_{k-i}^{(s)},$$

$$\widetilde{b}_k^{(s)}(t) = \lambda_k^{(s)}(t) B_0(t) \varphi_s(t) + m_k^{(s)}(t),$$

$$m_k^{(s)}(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1-i} \lambda_i^{(s)}(t) B_j(t) H_s(t) \widetilde{b}_{k-i-j}^{(s)}(t) + \lambda_0^{(s)} \sum_{j=1}^{k-1} B_j(t) H_s(t) \widetilde{b}_{k-j}^{(s)}(t) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} A_i(t) H_s(t) \widetilde{b}_{k-i}^{(s)}(t) + \sum_{i=0}^{k-1-h} B_i(t) (H_s(t) \widetilde{b}_{k-h-i}^{(s)}(t))' + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i^{(s)}(t) B_{k-i}(t) \varphi_s(t) -$$

$$- A_k(t) \varphi_s(t) + B_{k-h}(t) (\varphi_s(t))', \ s = \overline{1, n-1}, k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда, учитывая (6), из условия разрешимости получим

$$\lambda_k^{(s)}(t) = -(m_k^{(s)}(t), \psi_s(t)), \ s = \overline{1, n-1}. \tag{19}$$

Аналогично, решая уравнение (12), потребовав, чтобы

$$(B_1 \varphi(t), \psi(t)) \neq 0, \ \forall t \in [0; 1], \tag{20}$$

получим

$$v_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(n)} G(t) \widetilde{a}_{k-i}(t) + c_k^{(n)} \widetilde{\varphi}, \ k = 1, 2, \ldots; \tag{21}$$

$$\widetilde{a}_k(t) = \xi_{k-1}(t) A_0(t) \widetilde{\varphi}(t) + n_k(t), \ k = 1, 2, \ldots;$$

где

$$n_k(t) = \sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2-i}\xi_i(t)A_j(t)G(t)\widetilde{a}_{k-1-i-j}(t) - \sum_{i=1}^{k-1}B_i(t)G(t)\widetilde{a}_{k-i}(t) -$$

$$-\sum_{i=0}^{k-h-1}\sum_{j=0}^{k-h-2-i}\xi_i(t)B_j(t)(G(t)\widetilde{a}_{k-h-1-i-j}(t))' + \sum_{i=0}^{k-2}\xi_i(t)A_{k-1-i}(t)\widetilde{\varphi}(t) - B_k\widetilde{\varphi}(t) -$$

$$-\sum_{i=0}^{k-h-1}\xi_i(t)B_{k-h-1-i}(t)(\widetilde{\varphi}(t))',\ k=1,2,\ldots;$$

$G(t) = B_0^-(t)$- матрица, полуобратная к матрице $B_0(t)$,

$$\xi_0(t) = (B_1\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t)), \tag{22}$$

$$\xi_{k-1} = -(n_k(t), \widetilde{\psi}(t)),\ k=2,3,\ldots, \tag{23}$$

$c_k^{(n)},\ k=0,1,\ldots,$- постоянные, которые подлежат определению.

Наконец, наложив условие

$$\det A_0(t) \neq 0,\ \forall t \in [0;1], \tag{24}$$

из (13) получим рекурентные соотношения для определения коефициентов $\widetilde{v}_k(t), k=0,1,\ldots:$

$$\widetilde{v}_0(t) = -A_0^{-1}(t)f_0(t),$$

$$\widetilde{v}_k(t) = A_0^{-1}(t)[\sum_{i=0}^{k-h}B_i(t)(\widetilde{v}_{k-h-i}(t))' - \sum_{i=1}^{k}A_i(t)\widetilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t)],\ k=1,2,\ldots. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь $m-$приближения, оборвав ряды (9),(10)на m-м члене:

$$\begin{gathered} u_m^{(k)}(t,\varepsilon) = \textstyle\sum_{j=0}^m u_j^{(k)}(t)\varepsilon^j; \lambda_m^{(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^m \lambda_j^{(k)}(t)\varepsilon^j;\ k=\overline{1,n-1}; \\ v_m(t,\varepsilon) = \textstyle\sum_{j=0}^m v_j(t)\varepsilon^j; \widetilde{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^m \widetilde{v}_j(t)\varepsilon^j; \xi_m(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^m \xi_j(t)\varepsilon^j. \end{gathered} \tag{26}$$

Исследуем поочерёдно два случая:

1)устойчивый случай, когда

$$Re\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) \leqslant 0,\ i=\overline{1,n-1}, Re\xi_m(t,\varepsilon) \leqslant 0,\ \forall t \in [0;1], \tag{27}$$

2)условно устойчивый случай, когда

$$\begin{gathered} Re\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) \leqslant 0,\ i=\overline{1,l}, Re\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon) \geq 0,\ i=\overline{l+1,n-1}, \\ Re\xi_m(t,\varepsilon) \geq 0,\ \forall t \in [0;1]. \end{gathered} \tag{28}$$

В первом случае приближённое решение задачи (1),(2) представим в виде

$$x_m(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+v_m(t,\varepsilon)exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon). \qquad (29)$$

Подставив это выражение в краевое условие (2), получим

$$M\sum_{i=1}^{n-1}u_m^{(i)}(0,\varepsilon)+Mv_m(0,\varepsilon)+M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon)+$$

$$+N\sum_{i=1}^{n-1}u_m^{(i)}(1,\varepsilon)exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+Nv_m(1,\varepsilon)exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^1\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon)=d. \qquad (30)$$

Поскольку согласно (27)

$$\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)=o(\varepsilon^{m+1}),i=\overline{1,n-1},$$

$$\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt)=o(\varepsilon^{m+1}),$$

то, пренебрегая соответствующими слагаемыми, вместо (30) рассмотрим равенство

$$M\sum_{i=1}^{n-1}u_m^{(i)}(0,\varepsilon)+Mv_m(0,\varepsilon)+M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon)+N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon)-d=0, \qquad (32)$$

из которого определим постоянные множители $c_i^{(k)},\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{0,m}.$

Приравнивая в (32) коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра и учитывая (26), имеем

$$M\sum_{i=1}^{n-1}u_k^{(i)}(0)+Mv_k(0)+M\widetilde{v}_k(0)+N\widetilde{v}_k(1)-\delta_{k,0}d=0,\ k=\overline{0,m}. \qquad (33)$$

Подставив в эти равенства выражения (18), (21), (25), получим

$$M\sum_{j=1}^{n-1}(\sum_{i=0}^{k-1}c_i^{(j)}H_j(0)\widetilde{b}_{k-i}^{(j)}(0)+c_k^{(j)}\varphi_j(0))+M(\sum_{i=0}^{k-1}c_i^{(n)}G(0)\widetilde{a}_{k-i}^{(n)}(0)+c_k^{(n)}\widetilde{\varphi}(0))+$$

$$+MA_0^{-1}(0)[\sum_{i=0}^{k-h}B_i(0)(\widetilde{v}_{k-h-i}(0))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(0)\widetilde{v}_{k-i}(0)-f_k(0)]+$$

$$+NA_0^{-1}(1)[\sum_{i=0}^{k-h} B_i(1)(\widetilde{v}_{k-h-i}(1))' - \sum_{i=1}^{k} A_i(1)\widetilde{v}_{k-i}(1) - f_k(1)] - \delta_{k,0}d = 0, \quad (34)$$

$$k = \overline{0, m}.$$

Пусть выполняется условие

$$\det M \neq 0. \quad (35)$$

Введём обозначения

$$c_k = col(c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \ldots, c_k^{(n)}), k = 0, 1, \ldots;$$

$$U_0 = (\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_{n-1}(0), \widetilde{\varphi}(0));$$

$$\Phi_k = (H_1(0)\widetilde{b}_k^{(1)}(0), H_2(0)\widetilde{b}_k^{(2)}(0), \ldots, H_{n-1}(0)\widetilde{b}_k^{(n-1)}(0), G(0)\widetilde{a}_k(0)), \ k = 1, 2, \ldots;$$

$$l_k = A_0^{-1}(0)[\sum_{i=0}^{k-h} B_i(0)(\widetilde{v}_{k-h-i}(0))' - \sum_{i=1}^{k} A_i(0)\widetilde{v}_{k-i}(0) - f_k(0)] +$$

$$+M^{-1}NA_0^{-1}(1)[\sum_{i=0}^{k-h} B_i(1)(\widetilde{v}_{k-h-i}(1))' - \sum_{i=1}^{k} A_i(1)\widetilde{v}_{k-i}(1) - f_k(1)] - M^{-1}\delta_{k,0}d,$$

$$k = 0, 1, \ldots.$$

Тогда равенства (34) запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi_i c_{k-i} + U_0 c_k + l_k = 0, \ k = \overline{0, m}. \quad (36)$$

Ввиду неособенности матрицы U_0 отсюда однозначно определяются векторы c_k:

$$c_0 = -U_0^{-1} l_0,$$

$$c_k = -U_0^{-1}(l_k + \sum_{i=1}^{k} \Phi_i c_{k-i}), \ k = \overline{1, m}. \quad (37)$$

Покажем, что выражение (29), построеное таким образом, является асимптотическим изображением точного решения краевой задачи (1), (2). Подставив (29) в дифференциальное выражение

$$L(x) = \varepsilon^h B(t, \varepsilon)\frac{dx}{dt} - A(t, \varepsilon)x - f(t, \varepsilon), \quad (38)$$

имеем

$$L(x_m) = \sum_{i=1}^{n-1} [\varepsilon^h B(t, \varepsilon)(u_m^{(i)}(t, \varepsilon))' + \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)u_m^{(i)}(t, \varepsilon) - A(t, \varepsilon)u_m^{(i)}(t, \varepsilon)] \times$$

$$\times \exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon)dt) + \frac{1}{\varepsilon\xi_m(t, \varepsilon)}[B(t, \varepsilon)v_m(t, \varepsilon) - \varepsilon\xi_m(t, \varepsilon)A(t, \varepsilon)v_m(t, \varepsilon) +$$

$$+\varepsilon^{h+1}\xi_m(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)(v_m(t,\varepsilon))'] \exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt) - [\varepsilon^h B(t,\varepsilon)(\widetilde{v}_m(t,\varepsilon))' -$$

$$-A(t,\varepsilon)\widetilde{v}_m(t,\varepsilon) - f(t,\varepsilon)]$$

Согласно указанному алгоритму определения функций $\lambda_m(t,\varepsilon)$, $\xi_m(t,\varepsilon)$ и вектор-функций $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $v_m(t,\varepsilon)$, $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ выражения в квадратных скобках являются величинами порядка $O(\varepsilon^{m+1})$. Кроме того, в силу условия (20) функция $\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)$ равномерно ограниченная некоторой постоянной, не зависящей от ε. Следовательно,

$$L(x_m) = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^{m+1} a_i(t,\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt) +$$

$$+\varepsilon^m a_n(t,\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt) + \varepsilon^{m+1} b(t,\varepsilon),$$

где $a_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, $b(t,\varepsilon)$ -n-мерные вектор-функции, равномерно ограниченые на $[0;1]$. Учитывая (31), последнее равенство представим в виде

$$L(x_m) = \varepsilon^m a(t,\varepsilon),$$

где $a(t,\varepsilon)-$ вектор-функция, равномерно ограниченная на $[0,1]$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $x(t,\varepsilon)-$ точное решение задачи (1), (2). Обозначим

$$y_m(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon). \tag{39}$$

Тогда вектор $y_m(t,\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dy_m}{dt} = A(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon^m a(t,\varepsilon), \tag{40}$$

$$My_m(0,\varepsilon) + Ny_m(1,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} b(\varepsilon), \tag{41}$$

где $b(\varepsilon)-$ ограниченый $n-$мерный вектор.

Как показано в [4,с.81], условие (20) обезпечивает неособенность матрицы $B(t,\varepsilon)$ при достаточно малых ε, отличных от нуля. Поскольку

$$\det B(t,\varepsilon) = \varepsilon(B_1\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}) + O(\varepsilon^2),$$

то обратная матрица $B^{-1}(t,\varepsilon)$ имеет полюс первого порядка при $\varepsilon = 0$ и её можно представить в виде

$$B^{-1}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}Q(t,\varepsilon),$$

где $Q(t,\varepsilon)-$некоторая $n \times n-$ матрица, равномерно ограниченная на $[0;1]$. Умножив систему (40) слева на $\varepsilon^{-h-1}Q(t,\varepsilon)$, получим

$$\frac{dy_m}{dt} = \widetilde{A}(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon^{m-h-1}Q(t,\varepsilon)a(t,\varepsilon), \tag{42}$$

где
$$\widetilde{A}(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-h-1}Q(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon).$$

Наряду с краевой задачей (42), (41) рассмотрим соответствующую однородную задачу
$$\frac{dx}{dt}=\widetilde{A}(t,\varepsilon)x, \qquad (43)$$
$$Mx(0,\varepsilon)+Nx(1,\varepsilon)=0, \qquad (44)$$
а также систему, сопряжёную с (43)
$$\frac{dx}{dt}=-\widetilde{A}^{*}(t,\varepsilon)x. \qquad (45)$$

Согласно [5] фундаментальная матрица однородной системы (43) в данном случае имеет вид
$$X(t,\varepsilon)=(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt), \qquad (46)$$
где $\Lambda_m=diag\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon),\varepsilon^{-1}\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)\}$, $U_m(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}U_k(t)$, а матрицы $U_i(t)$ состоят из вектор-столбцов, определённых по формулам (18), (21), в которых $c_0^{(s)}=1,\ c_i^{(s)}=0, i=\overline{1,n}$.

Подобную структуру имеет и фундаментальная матрица сопряжёной системы (45):
$$Y(t,\varepsilon)=(\widehat{U}_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m^{*}(t,\varepsilon)dt), \qquad (47)$$
где $\widehat{U}_m(t,\varepsilon)-$ матрица, элементы которой определяются по тому же алгоритму, что и элементы матрицы $U_m(t,\varepsilon)$; $\Lambda^{*}-$матрица, комплексно сопряжёная с Λ_m. Тогда общее решение системы (42) представим в виде
$$\begin{gathered}y_m(t,\varepsilon)=(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)c+\\ +\int_0^t(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\times\\ \times(\widehat{U}_m^{*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))q(\tau,\varepsilon)d\tau,\end{gathered} \qquad (48)$$
где
$$q(t,\varepsilon)=\varepsilon^{m-h-1}Q(t,\varepsilon)a(t,\varepsilon).$$

Определив вектор c из краевого условия (41), и приняв во внимание (27), (31), получим асимптотическое решение неоднородной краевой задачи (42), (41):
$$y_m(t,\varepsilon)=(Gq)(t,\varepsilon)+(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\times$$

$$\times([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^m))\varepsilon^{m+1}b(\varepsilon), \qquad (49)$$

где $(Gq)(t,\varepsilon)$ - оператор Грина краевой задачи (40),(41), то есть решение полуоднородной краевой задачи (42), (44). Второе слагаемое выражения (49)- решение полуоднородной задачи (43), (41). Оператор Грина для даного случая имеет вид

$$(Gq)(t,\varepsilon)=\int_0^1 G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau, \qquad (50)$$

где $G_0(t,\tau,\varepsilon)$ - матрица Грина однородной краевой задачи (43), (44), которая имеет следующую структуру:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases} -(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\times \\ \times([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^m))NU_m(1,\varepsilon)\times \\ \times\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^1\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^m)), \\ \text{если}\quad 0\leqslant t<\tau\leqslant 1, \\ (U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^t\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)\times \\ \times(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))-(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\times \\ \times\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^m))\times \\ \times NU_m(1,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^1\Lambda_m(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^m)), \\ \text{если}\quad 0\leqslant \tau\leqslant t\leqslant 1. \end{cases} \qquad (51)$$

Переходя в равенстве (49) к оценкам по норме, получим

$$\|y_m(t,\tau,\varepsilon)\|\leqslant\varepsilon^{m-h-1}\int_0^1\|G_0(t,\tau,\varepsilon)\|\cdot\|Q(\tau,\varepsilon)\|\cdot\|a(\tau,\varepsilon)\|d\tau+$$
$$+\varepsilon^{m+1}(\|U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1})\|)\|\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\|\times$$
$$\times\|[MU_m(0,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^m)\|\cdot\|b(\varepsilon)\|. \qquad (52)$$

Учитывая условие (27) и ограниченость всех матричных и векторных функций, которые содержатся в (52), будем иметь

$$\|y_m(t,\varepsilon)\|\leqslant\varepsilon^{m-h-1}c, \qquad (53)$$

где c- некоторая постоянная, не зависящая от ε. Возвратившись к замене (39), получим окончательную оценку

$$\|x_m(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)\|\leqslant\varepsilon^{m-h-1}c. \qquad (54)$$

В результате доказана следующая теорема.

Теорема 6 *Если пучок предельных матриц (5) имеет на отрезке* $[0;1]$ $n-1$ *простых конечных элементарных делителей и один бесконечный и выполняются условия (20), (24),(27), (35), то при достаточно малых* ε *краевая задача (1), (2) имеет единственное решение, которое выражается асимптотической формулой*

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+v_m(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int\limits_0^t\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m-h-1}),$$

где $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$; $v_m(t,\varepsilon)$, $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$– *n-мерные вектор-функции,* $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\xi_m(t,\varepsilon)$– *скалярные функции, представляющиеся в виде разложений (26), коефициенты которых определяются с помощью рекуррентных формул (17)-(19), (21)-(23), (25), (37).*

Приближённое решение задачи (1), (2) в условно устойчивом случае ищем в виде

$$x_m(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{l}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{n-1}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(-\varepsilon^{-h}\int\limits_t^1\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+v_m(t,\varepsilon)\exp(-\varepsilon^{-h-1}\int\limits_t^1\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon). \tag{55}$$

Подставив (55) в краевое условие (2), получим

$$M\sum_{i=1}^{l}u_m^{(i)}(0,\varepsilon)+M\sum_{i=l+1}^{n-1}u_m^{(i)}(0,\varepsilon)\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^1\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+Mv_m(0,\varepsilon)\exp(-\varepsilon^{-h-1}\int_0^1\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)dt)+M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon)+$$

$$+N\sum_{i=1}^{l}u_m^{(i)}(1,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+N\sum_{i=l+1}^{n-1}u_m^{(i)}(1,\varepsilon)+Nv_m(1,\varepsilon)+N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon)=d. \tag{56}$$

Приняв во внимание (28) и пренебрегая величинами порядка $o(\varepsilon^{m+1})$, вместо (56) рассмотрим равенство

$$M\sum_{i=1}^{l} u_m^{(i)}(0,\varepsilon)+M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon)+N\sum_{i=l+1}^{n-1} u_m^{(i)}(1,\varepsilon)+Nv_m(1,\varepsilon)+N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon)=d,$$

из которого определим постоянные множители $c_i^{(k)}, i=\overline{1,n}, k=\overline{0,m}$. Приравнивая в нём коэффициенты при одинаковых степенях ε с учетом (26), получим систему уравнений

$$M\sum_{s=1}^{l} u_k^{(s)}(0)+M\widetilde{v}_k(0)+N\sum_{s=l+1}^{n-1} u_k^{(s)}(1)+Nv_k(1)+N\widetilde{v}_k(1)=\delta_{k,0}d, k=\overline{0,m}.$$

Используя (18), (21), (25), представим её в виде

$$M\sum_{s=1}^{l}(\sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(s)}H_s(0)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)}(0)+c_k^{(s)}\varphi_s(0))+N\sum_{s=l+1}^{n-1}(\sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(s)}H_s(1)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)}(1)+$$

$$+c_k^{(s)}\varphi_s(1))+N(\sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(n)}G(1)\widetilde{a}_{k-i}(1)+c_k^{(n)}\varphi(1))=\delta_{k,0}d-M\widetilde{v}_k(0)-N\widetilde{v}_k(1),$$

$$k=\overline{0,m}. \quad (57)$$

Пусть выполняется условие:

$$\det(M\varphi_1(0),M\varphi_2(0),\ldots,M\varphi_l(0),N\varphi_{l+1}(1),\ldots,N\varphi_{n-1}(1),N\widetilde{\varphi}(1))\neq 0. \quad (58)$$

Введём обозначения

$$\widetilde{l}_k=M\widetilde{v}_k(0)+N\widetilde{v}_k(1)-\delta_{k,0}d, k=0,1,\ldots,$$

$$\widetilde{U}_0=(M\varphi_1(0),M\varphi_2(0),\ldots,M\varphi_l(0),N\varphi_{l+1}(1),\ldots,N\varphi_{n-1}(1),N\widetilde{\varphi}(1)),$$

$$c_k=col(c_k^{(1)},c_k^{(2)},\ldots,c_k^{(n)}),$$

$$\Phi_k=(MH_1(0)\widetilde{b}_k^{(1)}(0),\ldots,MH_l(0)\widetilde{b}_k^{(l)}(0),$$

$$NH_{l+1}(1)\widetilde{b}_k^{(l+1)}(1),\ldots,NH_{n-1}(1)\widetilde{b}_k^{(n-1)}(1),NG(1)\widetilde{a}_k(1)).$$

Тогда равенства (57) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{k}\widetilde{\Phi}_i c_{k-i}+\widetilde{U}_0c_k+\widetilde{l}_k=0, k=\overline{0,m},$$

откуда:

$$c_0=-\widetilde{U}_0^{-1}\widetilde{l}_0,$$

$$c_k=-\widetilde{U}_0^{-1}(\widetilde{l}_k+\sum_{i=1}^{k}\widetilde{\Phi}_i c_{k-i}), k=\overline{1,m}. \quad (59)$$

С целью получения асимптотической оценки приближённого решения (55), как и в предыдущем случае, рассмотрим уравнение (42) из краевым условием (41), которые удовлетворяют вектор невязки

$$y_m(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon).$$

В данном случае фундаментальная матрица однородной системы (43) изображается асимптотической формулой

$$X(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m)]diag\{\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon)dt),$$

$$\exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^1 \Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon)dt)\},$$

где

$$\Lambda_m^{(1)} = diag\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_m^{(l)}(t,\varepsilon)\},$$
$$\Lambda_m^{(2)} = diag\{\lambda_m^{(l+1)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon),\varepsilon^{-1}\xi_m^{-1}(t,\varepsilon)\},$$

$U_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^m U_k(t)$, а матрицы $U_k(t)$ состоят из векторов-столбцов, определяющихся по формулам (18), (21), в которых $c_0^{(s)} = 1,\ c_i^{(s)} = 0,\ i = \overline{1,n}$, [4, 5]. Аналогично представим и фундаментальную матрицу сопряжёной системы (45):

$$Y(t,\varepsilon) = [\widehat{U}_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m)]diag\{\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)*}(t,\varepsilon)dt),$$

$$\exp(\varepsilon^{-h}\int_t^1 \Lambda_m^{(2)*}(t,\varepsilon)dt)\},$$

где $\widehat{U}_m^{(i)}(t,\varepsilon),\ i = 1,2-$ прямоугольные матрицы соответствующих размеров.

Введём обозначения

$$Y_m^{(1)}(t,\varepsilon) = diag\{\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon)dt), 0\};$$

$$Y_m^{(2)}(t,\varepsilon) = diag\{0, \exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^1 \Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon)dt)\},$$

где нулевые блоки имеют размерность $(n-l)\times(n-l)$ и $(l\times l)$ соответственно. Тогда

$$X(t,\varepsilon) = X_1(t,\varepsilon) + X_2(t,\varepsilon),$$

где

$$X_i(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m)]Y_m^{(i)}(t,\varepsilon),\ i = 1,2,$$

и общее решение системы (42) можно представить в виде

$$y_m(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon)c + \int_0^t X_1(\tau,\varepsilon)Y^*(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_1^t X_2(\tau,\varepsilon)Y^*(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau.$$

Определяя постоянный вектор c из краевого условия (41)и, принимая во внимание условие (28), для решения задачи (40), (41) получим выражение

$$y_m(t,\varepsilon) = (Gq)(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}X(t,\varepsilon)([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon); NU_m^{(2)}(1,\varepsilon)] + \\ + O(\varepsilon^m))^{-1}b(\varepsilon). \tag{60}$$

Здесь $U_m^{(1)}(t,\varepsilon)-$ прямоугольная $(n\times l)-$ матрица, столбцами которой являются векторы $u_m^{(i)}(t,\varepsilon), i=\overline{1,l}$, $U_m^{(2)}(t,\varepsilon)-$ $(n\times n-l)-$ матрица, столбцами которой являются векторы $u_m^{(i)}(t,\varepsilon),\ i=\overline{l+1,n-1},\ v_m(t,\varepsilon)$.

$$(Gq)(t,\varepsilon) = \int_0^1 G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau, \tag{61}$$

где $G_0(t,\tau,\varepsilon)$- матрица Грина краевой задачи (43), (44), которая имеет следующую структуру:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon) = \begin{cases} (U_m^{(1)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^t \Lambda_m^{(1)}(s,\varepsilon)ds)\times \\ \times[\widehat{U}_m^{(1)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^m)] + K_m(t,\tau,\varepsilon), \\ \text{если} \quad 0\leqslant \tau < t \leqslant 1, \\ (U_m^{(2)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^\tau \Lambda_m^{(2)}(s,\varepsilon)ds)\times \\ \times(\widehat{U}_m^{(2)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^m)) + K_m(t,\tau,\varepsilon), \\ \text{если} \quad 0\leqslant t\leqslant \tau\leqslant 1. \end{cases}$$

в которой

$$K_m(t,\tau,\varepsilon) = (U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))(Y_m^{(1)}(t,\varepsilon)+Y_m^{(2)}(t,\varepsilon))\times \\ \times([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon); NU_m^{(2)}(1,\varepsilon)] + O(\varepsilon^m))^{-1}\times \\ \times[(MU_m^{(2)}(0,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^\tau \Lambda_2(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^{(2)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^m)) - \\ -(NU_m^{(1)}(1,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^1 \Lambda_1(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^{(1)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^m))].$$

Исходя из условий (28), (58), несложно убедиться в том, что все матричные и векторные функции, входящие в (60), (61), равномерно ограничены при всех $t\in[0;1]$ и достаточно малых ε. Тогда, оценив по норме соотношение (60), получим асимптотическую оценку вида (53), (54).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4 *Если пучок предельных матриц (5) имеет на отрезке* $[0;1]$ $n-1$ *простых конечных елементарных делителей и один - бесконечный и выполняются условия (20), (24), (28), (58), то при достаточно малых* ε *краевая задача (1), (2) имеет единственное решение, изображающееся асимптотической формулой*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{l} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt) +$$

$$+\sum_{i=l+1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_1^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt) +$$

$$+ v_m(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_1^t \xi_m(t,\varepsilon)dt) + \widetilde{v}_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h-1}),$$

где $u_m^{(i)}(t,\varepsilon), i=\overline{1,n-1}$; $v_m(t,\varepsilon), \widetilde{v}_m(t,\varepsilon)-n-$*мерные вектор-функции,* $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\xi_m(t,\varepsilon)-$*скалярные функции, которые представляются в виде разложений (26), коефициенты которых определяются с помощью рекуррентных формул (17)-(19), (21)-(23), (25), (59).*

Литература

[1] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. 1981. – 398 с.

[2] Каранджулов Л.И., Бойчук А.А., Божко В.А. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённой линейной краевой задачи // Докл. АН Украины. 1994. №1.– с.7-10.

[3] Каранджулов Л.И. Линейные краевые задачи для сингулярно возмущённых дифференциальных систем // Докл. АН Украины. 1996. №7. – с.1-5.

[4] Шкиль Н.И., Старун И.И.,Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. К.: Выща школа. 1991.–207 с.

[5] Самойленко А.М., Шкіль М.І.,Яковец В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. К.: Вища школа. 2000.– 294 с.

[6] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1967.– 548 с.

[7] Яковець В.П., Кочерга О.І. Задача Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи // Допов. НАН України. 1999. №5. – с.34-39.

[8] Бойчук О.А., Шегда Л.М. Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. 2007. №3.– с.303-312.

Яшагин Е.И.

Условия продолжения точечных дифференцирований с алгебры $l^1(S)$ на алгебру A_S

Пусть G — компактная абелева группа, $\widehat{G}$ — её группа характеров. Для аддитивной группы Γ, изоморфной $\widehat{G}$, через S обозначим полугруппу её порождающую, т.е. $\Gamma = S - S$. Для $a \in \Gamma$ пусть χ^a — соответствующий характер. Каждую функцию $f \in C(G)$ можно представить в виде формального ряда Фурье

$$f \simeq \sum c_a^f \chi^a$$

с коэффициентами Фурье

$$c_a^f = \int\limits_G f\chi^{-a} d\sigma$$

(σ — нормированная мера Хаара группы G). Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^f \neq 0$, называется *спектром функции* f и обозначается через $\mathrm{Sp}(f)$. Пусть $l_S^1(G)$ — множество всех тех непрерывных на G функций, спектр которых содержится в S, и соответствующий ряд Фурье сходится абсолютно. Если

$$f \in l_S^1(G)\ , \quad f = \sum_{a \in S} c_a^f \chi^a\ ,$$

тогда

$$||f||_1 = \sum_{a \in S} |c_a^f|$$

есть l^1-норма функции f. Отображение

$$f \to \tilde{f} = \sum_{\alpha \in S} f(a)\chi^a(\alpha)$$

порождает изометрический изоморфизм между $l^1(S)$ и $l_S^1(G)$. Пополнение $l_S^1(G)$ в $\sup\limits_G$-норме есть алгебра A_S всех тех непрерывных функций на G, спектр которых принажлежит S.

Так как

$$||f||_1 \leqslant ||f||_\infty = \sup_G |f|\ ,$$

каждое точечное дифференцирование алгебры A_S является точечным дифференцированием на алгебре $l^1(S)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

В множестве мультипликативных функционалов алгебры $l^1(S)$ обозначим через Id_S полугруппу идемпотентов.

Теорема 1 *Каждое точечное дифференцирование на $l^1(S)$ в точке $p \in \mathrm{Id}_S$ расширяется до точечного дифференцирования в этой же точке на A_S.*

Доказательство. Каждое точечное дифференцирование ∂ на $l^1(S)$ в точке $p \in \mathrm{Id}_S$ имеет интегральное представление

$$\partial(f) = \int\limits_{G_p} f\chi^{-a} d\sigma_p \ .$$

Поэтому

$$|\partial(f)| \leqslant \int\limits_{G_p} |f| d\sigma_p \leqslant \sup_G |f| = ||f||_\infty \ ,$$

и функционал $\partial : l^1(S) \to \mathbb{C}$ расширяется до непрерывного функционала $\partial_{A_S} : A_S \to \mathbb{C}$. Очевидно, ∂_{A_S} — точечное дифференцирование на A_S в точке p. $\square$

Обозначим через $\xi : S \to [0,1]$ – положительный полухарактер и $\nu : S \to [0,\infty]$, $\nu = -\ln\xi$, — соответствующий ему вес на S. Пусть

$$S_+^\nu = \{a - b \in \Gamma : a, b \in S_0^\nu \quad \text{и} \quad \nu(b) \leqslant \nu(a)\} \ .$$

Очевидно, S_+^ν — подполугруппа группы Γ, содержащая S_0^ν. Определим новую полугруппу $S_+ = S_+^\nu \cup (S_+^\nu + S_\infty^\nu)$.

Лемма 1 *Вес $\nu : S \to [0,\infty]$ можно продолжить до веса $\tilde\nu : S_+ \to [0,\infty]$.*

Доказательство. Сначала надо показать, что

$$S_+^\nu \cap (S_+^\nu + S_\infty^\nu) = \varnothing \ .$$

Допустим противное. Пусть $a \in S_+^\nu \cap (S_+^\nu + S_\infty^\nu)$. Тогда, с одной стороны,

$$a = d - c \ , \quad d, c \in S_+^\nu \ ,$$

а с другой

$$a = b - l + v \ , \quad b, l \in S_+^\nu \ , \quad v \in S_\infty^\nu \ .$$

Отсюда $d + l = b + c + v$. Получено противоречие, так как $d + l \in S_0^\nu$, а $b + c + v \in S_\infty^\nu$. Теперь определяя отображение $\tilde\nu : S_+ \to [0,\infty]$, а также, полагая

$$\tilde\nu(a) = \begin{cases} \nu(d) - \nu(c), & \text{если} \quad a = d - c \in S_+^\nu \ (d, c \in S_0^\nu); \\ \infty \quad , & \text{если} \qquad\qquad a \in S_+^\nu + S_\infty^\nu \ , \end{cases}$$

надо показать, что отображение $\tilde\nu : S_+ \to [0,\infty]$ определено корректно. Действительно, если $a = d - c$ и $a = b - l$, $d, c, b, l \in S_0^\infty$, тогда $d + l = b + c$. Отсюда $\nu(d) + \nu(l) = \nu(b) + \nu(c)$ и, следовательно, $\nu(d) - \nu(c) = \nu(b) - \nu(l)$. Следовательно, если $a = d - c$, $b = d_1 - c_1$, $d, c, d_1, c_1 \in S_0^\nu$, тогда

$$\tilde\nu(a) + \tilde\nu(b) = \nu(d) - \nu(c) + \nu(d_1) - \nu(c_1) = \nu(d + d_1) - \nu(c + c_1) = \tilde\nu(a + b) \ . \ \square$$

Заметим также, что полугруппа S является подполугруппой полугруппы S_+, поэтому алгебра $l^1(S)$ — подалгебра алгебры $l^1(S_+)$. Поэтому мультипликативный функционал $m_{\tilde{\xi}}$, порождённый полухарактером $\tilde{\nu}: S_+ \to [0,1]$, $\tilde{\xi} = \exp(-\tilde{\nu})$, совпадает на $l^1(S)$ с мультипликативным функционалом m_ξ, $\xi = \exp(-\nu)$. Следовательно, мультипликативные функционалы $m_{\tilde{\xi}}$ и m_ξ имеют общую представляющую вероятностную меру на G. Обозначим эту меру через μ_ξ. Пусть $M(G)$ — пространство всех регулярных борелевских мер на G. Напомним, *свёрткой мер* $\mu, \nu \in M(G)$ называется такая мера $\mu * \nu$, что для любого $f \in C(G)$ выполняется равенство

$$\int\limits_G f d(\mu * \nu) = \int\limits_G \int\limits_G f(\alpha \cdot \beta) d\mu(\alpha) d\nu(\beta) \ .$$

Используя обозначение работы [2], сформулируем ещё один результат.

Теорема 2 *Каждое точечное дифференцирование ∂_i на алгебре $l^1(S)$ расширяется до точечного дифференцирования на A_S.*

Доказательство. Каждое дифференцирование ∂_i связано с функцией $k_i : L(a_i) \to \mathbb{R}$ [2], которая определяется следующим образом: если $b \in L_i = L(a_i)$ и $b + c = a_i + d$, тогда $k_i(b) = \nu(c) - \nu(d)$ и при этом $k_i(b + l) = k_i(b) - \nu(l)$, $l \in S_0^\nu$. Введём на L_i порядок. Сначала заметим, что если $b_1, b_2 \in L_i$, тогда найдутся $c_1, c_2 \in S_0^\nu$ такие, что $b_1 + c_1 = b_2 + c_2$. Действительно, из определения класса эквивалентности $L_i = L(a_i)$ следует

$$b_1 + d_1 = a_i + l_1, \quad b_2 + d_2 = a_i + l_2 \quad \text{для некоторых} \quad d_1, l_1, d_2, l_2 \in S_0^\nu \ .$$

Отсюда

$$b_1 + d_1 + l_2 = a_i + l_1 + l_2 = b_2 + d_2 + l_1 \ .$$

Теперь достаточно положить $c_1 = d_1 + l_2$, $c_2 = d_2 + l_1$. Далее пишется $b_1 < b_2$, если $c = c_1 - c_2 \in S_+^\nu$, т.е. $\nu(c_2) < \nu(c_1)$. Так как

$$k_i(b_1 + c_1) = k(b_1) - \nu(c_1) \quad \text{и} \quad k_i(b_2) = k(b_2) - \nu(c_2) \ ,$$

$$\text{то} \quad k_i(b_1) = k_i(b_2) - \nu(c_1) + \nu(c_2) = k_i(b_2) - \tilde{\nu}(c) \ , \quad \text{где} \quad c = c_1 - c_2 \ .$$

С каждым $b \in L_i$ определим меру на G:

$$\tau_b = \exp k_i(b) \cdot \mu_b * \sigma_b \ , \quad \text{где} \quad \mu_b = \chi^{-b} \mu_\xi \ , \quad \sigma_b = \chi^{-b} \sigma_p$$

(μ_ξ — определённая выше вероятностная мера, σ_p — нормированная мера Хаара группы $G_p \subset G$). Порядок, определённый на L_i , задаёт порядок и на семействе мер

$$\{\tau_b\}_{b \in L_i} : \tau_{b_1} < \tau_{b_2} \ , \quad \text{если} \quad b_1 < b_2 \ .$$

Пусть $b_1 < b_2$. Тогда $b_1 + c = b_2$, где $c \in S_+^\nu$. Следовательно,

$$\int\limits_G \chi^{b_2} d\tau_{b_1} = \exp k_i(b_1) \int\limits_G \chi^{b_2} d(\mu_{b_1} * \sigma_{b_1}) =$$

$$= \int\limits_G \int\limits_G \chi^{b_2}(\alpha \cdot \beta)\chi^{-b_1}(\alpha)d\mu_\xi(\alpha) \cdot \chi^{-b_1}(\beta)d\sigma_p =$$

$$= \int\limits_G \chi^{b_2-b_1}(\alpha)d\mu_\xi(\alpha) \cdot \int\limits_{G_p} \chi^{b_2-b_1}(\beta)d\sigma_p =$$

$$= \exp k_i(b_1) \cdot \exp(-\tilde{\nu}(c)) = \exp(k_i(b_1) - \tilde{\nu}(c)) = \exp k_i(b_2) \ .$$

(Здесь использовано свойство $\chi^{b_1}|_{G_p} = \chi^{b_2}|_{G_p}$ из [1].) Поскольку $\sup\limits_{b \in L_i} k_i(b) = M_i < \infty$, семейство мер $\{\tau_b\}_{b \in L_1}$ ограничено в банаховом пространстве $M(G)$, сопряжённом к $C(G)$. Пусть мера τ_0 — *-слабый предел мер τ_b, $b \in L_1$, по введённому порядку. Тогда для любого $b_1 \in L_1$

$$\int\limits_G \chi^{b_1} d\tau_0 = \exp k_i(b_1) \ .$$

Действительно,

$$\int\limits_G \chi^{b_1} d\tau_0 = \lim \int\limits_G \chi^{b_1} d\tau_b = \exp k_i(b_1) \ ,$$

если $b < b_1$. Определим теперь функционал ∂ на алгебре A_S:

$$\partial(f) = \int\limits_G f d\tau_0 \ .$$

Введённый нами функционал $\partial : A_S \to \mathbb{C}$ — точечное дифференцирование в m_ξ. Это вытекает из того, что сужение ∂ на $l^1_S(G) \subset A_S$ совпадает с точечным дифференцированием ∂_i ($l^1_S(G) \simeq l^1(S)$), и алгебра $l^1_S(G)$ плотна в A_S. Следовательно, ∂ есть точечное дифференцирование на A_S. $\square$

Литература

[1] Гамелин Т. *Равномерные алгебры.* — М.: Мир, 1973.

[2] Яшагин Е. И. *Точечные дифференцировния в* Id_S *для полугрупповой алгебры* $l^1(S)$// Новейшие проблемы теории поля. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, — 2006. — Т. 5. — С. 252–258.

[3] Яшагин Е. И. *О сравнении* Id_S *и* Id_{S^*} *для полугруппы* S *и её расширения гранями* S^*// Теория функций, её прил. и смеж. вопр. Казанское матем. общество. — 2007. — Т. 35 — С. 288–289.

Удоденко Н.Н.

Жизнь человека из легенды

Данная статья, предваряющая публикацию [6] посвящена жизни ее автора Михаила Викторовича Федосеева, вся жизнь которого была связана с Воронежским университетом. Он был участником многих событий, произошедших в жизни университета.

В 1998 года была опубликована статья [4], посвященная истории физико-математического факультета с момента основания университета до 1952 года, когда в Воронеж приехал М. А. Красносельский (1920-1997). В основном в ней рассказывается о жизни факультета, начиная с 1930 года, когда ее автор В.И.Соболев (1913-1995) поступил в Воронежский университет. Что касается периода с 1918 год по 1930, то он написал следующее: "О том, как протекала учебная и научная работа на физмате в период с 1918 по 1931 год, я знаю только по рассказам зав. кафедрой общей физики профессора Н.А.Сахарова и доцента М.В.Федосеева, алгебраиста".

Далее он повествует о профессорах В.Г.Алексееве (1866-1943) и А.К.Сушкевиче (1882-1928), доценте Н. П. Самбикине (1882-1928) работавших в это время на физмате.

Скажу несколько слов об истории статьи. В 2003 году я познакомился с дочерью М.В.Федосеева Екатериной Михайловной Федосеевой (1937-2005), которая передала мне рукопись статьи [6]. Незадолго до кончины она просила меня написать статью о ее отце, предупредив о том, что это будет трудно сделать, ввиду неординарности личности ее отца. Публикация этой статьи и [6] - дань уважения к личности такого незаурядного человека, каким был Михаил Викторович Федосеев.

Михаил Викторович Федосеев родился 9 января (по с.с.) 1896 года в г. Тетюши Казанской губернии. Отец его был из мещан, мать работала кухаркой. В 1907 году она выходит замуж за В.П.Федосеева, который в этом же году усыновил Михаила. В 1916 году Михаил поступил Волковышскую гимназию. Окончив в 1918 году гимназию с золотой медалью он поступил на медицинский факультет Воронежского университета, созданного на базе эвакуированного Юрьевского университета. В своих воспоминаниях об этом времени М.В.Федосеев писал [3]: "Первоначально я поступил на медицинский факультет, но поскольку посещение лекций было свободным, то помимо этого ходил на лекции исторического и физико - математического факультетов. Приемных экзаменов тогда не было, они появились позже. Принимали всех, требовалось только написать заявление. Первую лекцию я услышал как раз на физмате 12 ноября 1918г. , в первый день занятий Воронежского университета. Сессий не было. Экзамены сдавали по индивидуальной договоренности с преподавателями. Это было гораздо лучше чем сейчас, потому что если студент шел на экзамен, то с основательными знаниями. И "проваливались"надо сказать, редко".

Но в конечном итоге М.В.Федосеев сделал окончательный выбор в пользу физмата. Что касается медицины, то приведем одно свидетельство из [2]. "... Федосеев был не просто талантливым преподавателем и свободным и независимым человеком - это был образованейший старой, закалки интеллигент, в свое время посещавший занятия сразу в трех ВУЗах, самостоятельно изучил медицину до такой степени, что к нему на консультацию приходили врачи ...".

Тяга к знаниям, даже не связанным с выбранной профессией, была характерна для Михаила Викторовича. По рассказам П.И.Сушковой, многие годы прожившей в семье Н.А.Сахарова (1875-1951), обсуждение проблем физики с Н.А.Сахаровым и биологии с Б.М. Козо-Полянским (1890-1971), начинавшиеся днем, заканчивались далеко за полночь.

Шла гражданская война, в стране царили голод и разруха. Шла борьба за выживание. В январе 1920 года студент Федосеев начал свою трудовую деятельность преподавателем математики в одной из школ Воронежского гороно, а с марта 1920 года он работает воспитателем в детдоме имени К.Маркса. С 1925 года Михаил Викторович преподавал до 1931 года математику в Воронежском среднем Рабочем индустриальном техникуме. В 1926 году М.В.Федосеев окончил университет. Отметим один любопытный факт: в этом году окончил физмат П.Феоктистов, отец будущего космонавта, Героя Советского Союза К.П.Феоктистова. В декабре 1929 года он стал сверхштатным аспирантом кафедры математики педагогического факультета ВГУ.

Научным руководителем аспиранта стал А.К.Сушкевич, результаты которого по теории полугрупп к этому времени получили международное признание: в 1928 году он выступил с докладом на Международном математическом конгрессе в Болонье, в обсуждении результатов которого принял участие Ф.Э.Молин(1861-1941). В следующем году М.В.Федосеев уже штатный аспирант.

В 1932 году ему было поручено чтение лекций по высшей алгебре, теории вероятностей и теории чисел.

В одной из бесед с автором А. М. Мелешина рассказала о том, как он читал лекции по высшей алгебре. В основу этого курса был положен учебник [5]. Лекции отличались ясностью изложения, лаконичностью и потому хорошо запоминались студентами. В основном в лекциях излагалась алгебра многочленов. Последнюю лекцию он посвятил теории групп. В ней было введено понятие группы, приведены примеры групп, сформулированы и доказаны некоторые теоремы из этой теории. В конце лекции он отметил, что в настоящее время теории групп имеет мало приложений в других науках. Трудно сказать, на чем было основано такое заявление лектора. Будучи человеком очень эрудированным, он, наверняка, знал о работах Г.Вейля(1885-1955) по квантовой механике, написанных им в 20-х - начале 30-х годов прошлого века, в которых важную, если не ключевую роль, играли методы теории групп. Рассказывая об этом, Александра Михайловна с иронией сказала : "Михаил Викторович как в воду смотрел. Занимаясь физикой твердого тела с квантовой механикой я использовала методы теории групп". После окончания аспирантуры в 1934 году М.В.Федосеев был оставлен в университете в должности и.о.доцента, а затем спустя некоторое время он стал доцентом. 4 мая 1940 года Михаил Викторович защитил в ученом совете Харьковского университета кандидатскую диссертацию "Об одном типе систем с двумя действиями", в основе которой была работа [7]. А 9 июня 1940 года ему была присуждена степень кандидата физико-математических наук. Нелишне отметить, что работал над диссертацией Михаил Викторович самостоятельно, так как в декабре 1929 года А.К.Сушкевич переехал в Харьков, где работал, за исключением времени оккупации Харькова немецко-фашистскими войсками, до конца жизни в ряде ВУЗов.

Началась Великая Отечественная война. В связи с тем, что ряд преподавателей физмата выбыл из ВГУ, кафедра алгебры и геометрии, где работал М.В.Федосеев, и математического анализа были объединены в кафедру высшей математики. Летом 1942 года, буквально на кануне захвата города, Воронежский университет был эвакуирован в Елабугу.

1 октября 1942 года М.В.Федосеев был назначен заведующим кафедрой высшей математики, которой он руководил до 1 октября 1944 года, когда были восстановлены кафедры алгебры и геометрии и математического анализа. В этот же день он был назначен и.о.заведующим кафедрой алгебры и геометрии, а 30 апреля 1946 года министерством высшего образования утвержден заведующим этой кафедрой. 1 октября 1950 года кафедры алгебры и геометрии и математического анализа вновь преобразованы в кафедру высшей математики, которая просуществовала до 1953 года. После очередного ее разделения Михаил Викторович до 1959 года работал на кафедре математического анализа. В этом году он перешел на кафедру алгебры и геометрии. В 1954 году создается кафедра математической физики, которая в 1959 году была разделена на кафедру математической физики и кафедру вычислительной математики. С 5 ноября 1961 года и до ухода на пенсию Михаил Викторович работал на кафедре математической физики. Скончался Михаил Викторович в 1982 году. В газете "Воронежский университет"было опубликовано сообщение о его смерти(от 27 мая).

Пока ничего не было сказано о том, каким человеком был Михаил Викторович. По воспоминаниям знавших его людей он был очень коммуникабельным и общительным человеком. Он был дружен с доцентом Самбикиным, поддерживал дружественные отношения с Д.А.Райковым (1905-1981), непродолжительное время работавшим на физико-математическом факультете в 30-е годы прошлого века. Благодаря Михаилу Викторовичу сохранились некоторые стихотворные произведения Н.П. Самбикина, к сожалению неопубликованные. В семейном архиве М.В.Федосеева хранились письма от А.К.Сушкевича, Д.А.Райкова и академика В.И. Смирнова(1882-1974), судьба которых автору не известна. С ним поддерживал отношения выпускник физмата ВГУ 1924 года Н.А.Романов(1903-1943), работавший с начала 30-х годов прошлого века в одной из лабораторий академика И.П.Павлова(1849-1936). Студенты физического факультета 60-х годов прошлого века рассказывали автору о том, что Михаил Викторович, знавший Романова, часто вспоминал о нем. Каких либо подробностей этих рассказов они, к сожалению, не запомнили.

В личном деле М.В.Федосеева имеется несколько характеристик, которые необходимо было представить в ректорат, по разным поводам. В них постоянно присутствует фраза: "Необычайно требователен к студентам". Выпускник геологического факультета Аркадий Попов посвятил Михаилу Викторовичу поэму "Бельмес". В ней присутствует такое четверостишие:

Зубрили, списчики, везучие -
Равны мы были пред судьбой
Когда Бельмес, бывали случаи,
Полгруппы отправлял домой.

Тут не спасли бы на экзаменах
Нас от карающей руки
Не то что папины и мамины,
А даже боговы звонки

Он единицами, не парам
По большей части мучил нас
Приятель мучился кошмарами -
Сдал на восьмой лишь только раз

М.В.Федосеев говорил: "На "отлично"алгебру знает Господь Бог, на "хорошо мой учитель, я знаю на "удовлетворительно. "Шпаргальщиков"он патологически ненавидел. Студенты 60-х годов прошлого века, рассказывали автору о том, что зачетки студентов, получивших "неуд"он выбрасывал в коридор.

После прочтения последних строк у читателя вполне может сложиться впечатление о М.В.Федосееве как о "демонической личности". Но те же выпускники почему-то, по прошествии многих лет, с момента окончания университета с теплотой и юмором вспоминали о нем. Читатель может убедиться в этом, прочитав воспоминания выпускника геологического факультета 1944 года Р.А. Сегедина [1]. Упоминавшийся уже А.Попов в [2] написал: "Современный юноша, на первый взгляд, просто не может повторить наших ошибок - слишком изменилась действительность, да и сам тип молодежи. Но рискну усомниться - не то, чтобы в серьезности изменении, а в их результативности. Исключается ли вариант, что и нынешняя молодое поколение окажется "ненастоящим", то есть обманутым - идеалами иными, но столь же бесплодными; людьми образованными, но бездуховными; надеждами, внешне замечательными, но не обеспеченными изнутри? Ведь Федосеевых у нас пока не прибавилось, скорее - наоборот. Я просто выбрал его в своих воспоминаниях, хотя мог бы назвать еще не мало светлых, честных личностей. Хотелось бы поставить их, даже ушедших, в строй таких же честных и светлых сегодня. Это и есть то единственное "настоящее", которое должно помочь нашему возрождению". Эти слова, написанные в "смутные"90-е годы, актуальные и злободневные сегодня - лучший памятник "человеку из легенды Михаилу Викторовичу Федосееву.

Литература

1. Геологический факультет Воронежского государственного университета. Вехи истории. Воспоминания. Воронеж. Изд-во ВГУ.2004.320с. 2. Попов А. Ненастоящее поколение. Черный квадрат, №15, 16. 1993. 3. Рожденный революцией. Документы. Воспоминания. Воронеж. Изд-во ВГУ.1988.448с. 4. Соболев В.И. От "Адама"до Красносельского. В сб. "Материалы к истории математического факультета ВГУ". Воронеж. Изд-во ВГУ.1998,с.3-12. 5. Сушкевич А.К. Высшая алгебра(метограф. курс) Воронеж. 1923.192с. 6. Федосеев М.В. Математико-механический факультет. В наст.сборнике с. 7. Федосеев М.В. Об одном типе систем с двумя действиями. Зап. Харьков об-во, т.4, вып. 18, 1940,с.39-56.

Федосеев М.В.

Математико-механический факультет.

Юрьевский университет переехал в Воронеж в 1918 году в составе четырех факультетов: физико-математического, историко-филологического, медицинского и юридического. На базе этого университета и открылся в 1918 году Воронежский университет.

Размещался он в бывшем кадетском корпусе.

Физико-математический факультет состоял в то время из трех отделений: математического, химического и естественного, Деканом факультета был известный кристаллограф проф. В. Е. Тарасенко.

Занятия на физико-математическом факультете начались 12 ноября 1918 года. На математическом отделении изучался тогда тот цикл наук, который изучается сейчас на математико-механическом и физическом факультетах. На нем были две математические кафедры: кафедра чистой математики и кафедра прикладной математики.

Математику преподавали приехавшие из Юрьева математики проф. В. Г. Алексеев, видный в то время специалист по теории инвариантов алгебраических форм, проф. П. П. Граве, старший ассистент А. А. Марков, астроном В. Р. Берг, и механик С. В. Тарасенко. Кроме того, приехал из Петрограда питомец Юрьевского университета Н. П. Самбикин.

Н. П. Самбикин был блестяще и разносторонне одаренный человек. Он окончил Юрьевский университет в 1907 г. и был оставлен по кафедре чистой математике для подготовки к профессорскому званию. Однако, в расплату за революционную деятельность, которой он энергично занимался в студенческие годы, царское правительство не дало дало ему возможности заниматься наукой. Он был сослан и только с наступлением революции 1917 года получил возможность вернуться в университет.

В число студентов университета в 1918, 1919 и 1920 г.г. принимались все желающие, без всяких экзаменов и даже без справок об образовании. Это делалось для того, чтобы дать широчайший доступ к высшему образованию рабочим и крестьянам. Впервые коллоквиум для поступающих был проведен в 1921 году, позднее были введены вступительные экзамены; они были одни и те же на все факультеты. Студентов было много; на математическом отделении обучалось более ста человек.

Посещение лекции было не обязательно и студенты посещали их не очень аккуратно. Но дисциплина на лекциях была безукоризненная, хотя некоторые лекции были весьма мало пригодны для слушателей.

В первые годы революции, в связи с разрухой, вызванной войной, условия для обучения были чрезвычайно тяжелые. Не только студенты, но и преподаватели нуждались в самых необходимых вещах: в питании, одежде, топливе. И студенты и преподаватели тратили много времени на прямую борьбу за существование. Преподаватели совмещали всюду, где удавалось, и даже занимались репетиторством. Студенты обычно не отказывались ни от какой работы, которую удавалось отыскать. В Воронеже свирепствовали тифы и другие болезни и во дворе университета был открыт госпиталь для больных тифами студентов и преподавателей, который был заполнен больными до отказа. Понятно, что при таких условиях многие месяцами пропускали лекции.

Лекции шли в холодных помещениях. Преподаватели и студенты во время лекций были одеты во все теплое, что у кого было, писали карандашами, так как чернила замерзали. Учебников для студентов университета в то время в Воронеже не было и вряд ли было возможно откуда-нибудь их выписать. Надо было как можно тщательнее составлять записи лекций, так как других источников для подготовки к экзаменам у студентов на было.

Экзаменационных сессий в те годы не было. Экзамены и зачеты студенты могли сдавать в любое время учебного года, в индивидуальном порядке, по договоренности с преподавателем. Обычно студент, за недостатком времени и сил, слушал не все нужные ему курсы, а только те, которые он намеревался сдавать в первую очередь. От времени до времени из Москвы приезжала комиссия и проверяла, как учатся студенты, кто и что сдал за время своего пребывания в университете. Кто сдал мало, тех отчисляли из университета, причем отчисление было массовым. Естественно, что при этих условиях состав студентов и преподавателей быстро менялся. В 1919 г. уехал проф. В. Г. Алексеев, и умер проф. П. П. Граве. Вновь прибывший проф. Ассур тоже умер не проработав и года.

В 1920 году в Воронежский университет перевелся из Харьковского университета молодой талантливый профессор А. К. Сушкевич. Вдвоем с доц. Н. П. Самбикиным они в двадцатые годы вели на высоком научном уровне все основные и специальные математические дисциплины в Воронежском университете и лишь более простые курсы, как например математика у химиков, да практические занятия вели другие математики. И все таки в эти годы А. К. Сущкевич, при чрезмерной педагогической занятости, выполнил часть тех фундаментальных исследований, которые выдвинули его в число наиболее выдающихся алгебраистов своего времени и написал неоднократно переиздававшиеся "Основы высшей алгебры одно из лучших университетских руководств по этому предмету, по которому обучалось не одно поколение советских математиков. Точно также Н. П. Самбикин, помимо педагогической работы энергично занимавшийся административной деятельностью в качестве бессменного члена правления университета и декана физико-математического факультета, нашел время и силы написать хороший учебник по дифференциальным уравнениям, которым в Воронежском университете пользовалась многие годы. Естественно также, что при своей чрезмерной перегрузке Н. П. Самбикин не мог уделять много времени научно-исследовательской работе.

А. К. Сушкевич и Н. П. Самбикин организовали Воронежское математическое общество, в котором А. К. Сушкевич был бессменным председателем, а Н. П. Самбикии его заместителем. Общество просуществовало несколько лет и прекратило свою деятельность в 1929 году.

Аспирантуры в двадцатые годы на физмате не было и способные студенты по окончании курса теряли связь с университетом, если не было возможности оставить их в нем на работе. Лишь один питомец университета Б. И. Сегал, окончивший физмат ВГУ в 1924 году, выхлопотал себе в 1927 году разрешение сделаться аспирантом А. К. Сушкевича. Это был первый аспирант на физико-математическом факультете университета. Аспирантуру у А. К. Сушкевича он, однако, не окончил, переехав в Ленинград и сделавшись аспирантом академика И. М. Виноградова. Но раз уж было дано разрешение на одного аспиранта, А. К. Сушкевич, осенью 1929 года, взял к себе в аспирантуру другого воспитанника М. В. Федосеева, окончившего физмат в 1926 году. Но и тому не удалось учиться в аспирантуре, так как А. К. Сушкевич в конце 1929 года перевелся на работу в Харьков.

В 1921 году в ВГУ влился Воронежский институт народного образования, сделавшийся педагогическим факультетом университета. На педагогическом факультете было так называемое физико-техническое отделение, готовившее преподавателей математики и физики. От математического отделения физмата оно отличалось тем, что математики и физики на нем было меньше, но зато был цикл педагогических дисциплин, а так же геодезия, машиноведение, техническое черчение и т. д.

Математику на педагогическом факультете преподавали те же лица, которые работали и на физико-математическом факультете.

В период совместного существования физмата и педфака состав преподавателей математики пополнился окончившими физмат ВГУ Н. П. Сардановским, В. В. Мезенцевым и Г. М. Баженовым.

В 1924 году физико-математический факультет был закрыт. Студентам старших курсов была предоставлена возможность окончить физмат, так что в 1925 и в 1926 годах физико-математический факультет сделал еще два выпуска окончивших. Подготовка математиков и физиков стала осуществляться лишь на педагогическом факультете. Деканом педфака был в то время проф. Н. А. Дернов, специалист по методике математики. Кафедр чистой и прикладной математики уже не существовало - вместо них была математическая предметная комиссия, возглавлявшаяся А. К. Сушкевичем.

В 1928 году А. К. Сушкевич был командирован в числе представителя университетов РСФСР на международный конгресс математиков в Болонью. Летом 1928 года скоропостижно скончался Н. П. Самбикин, а в конце 1929 года уехал из Воронежа А. К. Сушкевич. Не стало двух основных работников на которых держалась подготовка по математике на физмате и педфаке ВГУ. В 1929 году в ВГУ приехал из Москвы тополог Л. М. Лихтенбаум, который стал осуществлять руководство математиками университета, однако он проработал в ВГУ всего лишь один 1929/30 учебный год. В этом году математику читали Л. М. Лихтенбаум, В. В. Мезенцев, Г. М. Баженов и Н. П. Сардановский, а всю практику вел один ассистент М. В. Федосеев.

Осенью 1930 года была организована в ВГУ аспирантура, в том числе и по математике. Руководить аспирантами стал молодой талантливым математик и астроном Г.М.Баженов. Интересно заметить, что за года обучения в университете Г.М.Баженов окончил два отделения: математическое и астрономическое.

В 1931 был восстановлен физико-математический факультет. Это был по новому организованный факультет. Прежние отделения: химическое и естественное выделились в самостоятельные факультеты и новый физмат соответствовал одному математическому отделению, существовавшему до 1924 года. Кафедру математики возглавлял на новом факультете проф. Н. А. Дернов. Он же был и первым деканом восстановленного физмата. Ежегодный набор в группу математиков составлял 25-30 человек.

В тридцатые годы в Воронежский университет прибыло из Москвы на работу много новых математиков. В 1932 году в ВГУ стали работать М. М. Гринблюм и С. В. Фролов и оба сразу же, помимо общих математических курсов, стали вести, сперва дополнительно, во внеучебное время, а затем как обязательные, специальные курсы и семинара по современным развивающимся разделам математики. Так М. М. Гринблюм зимой 1932/33 года организовал из студентов второго курса кружок по изучению основ теории множеств и обоснования анализа, С. В. Фролов в 1933/34 учебном год прочел впервые в Воронежской университете курс теоретико-множественной топологии, а с осени 1934 года М. М. Гринблюм организовал изучение студентами и некоторыми молодыми преподавателями новой недавно возникшей области математики - функционального анализа, ставшего впоследствии основным научным направлением воронежских математиков.

В 1933 году на работу в ВГУ приезжает Д. А. Райков и в тот же год, так же впервые в нашем университете, читает для студентов курс теории функций действительного переменного, спецкурс по аналитическим методам теории чисел.

Таким образом, с начала тридцатых годов происходит включение в преподавание на математическом отделении многих дисциплин, проникнутых духом современной математики. Вместе с тем продолжается на высоком научном уровне и ,часто с большим педагогическим мастерством, чтение классических разделов математики. Большие и безукоризненные по тщательности изложения курсы дифференциальной геометрии, уравнений математической физики, теории матриц и квадратичных форм читает Г. М. Баженов, курсы высшей алгебры и теории чисел - М. В. Федосеев. Хочется отметить также блестящие по форме, хотя несколько формализированные и лишенные теоретико-множественной трактовки, лекции по математическому анализу Н. П. Сардановского.

С 1934 года в Воронежском университете стал работать после окончания аспирантуры в МГУ молодой талантливый геометр Н. Т. Ефимов, ставший впоследствии одним из ведущих математиков нашей страны. В 1935 году в нашем университете он впервые прочел курс оснований геометрии, а с 1936 года началась специализация студентов математиков по геометрии, сперва по дифференциальной геометрии /Н. В. Ефимов/, а затем и по топологии /И. И. Гордон/. Необходимо отметить выдающиеся педагогические качества Н. В. Ефимова, его лекции отличались глубиной содержания и увлекательностью форм изложения. Он читал как общие, так и специальные геометрические курсы. Из последних необходимо особо отметить лекции по высшей геометрии, послужившие основой для написания несколько позднее широко известного учебника "Высшей геометрии".

К середине тридцатых годов единая кафедра математики, возникшая с восстановлением физико-математического факультета, разделилась в конце концов на три кафедры:

1. кафедру алгебры, во главе с Д. А. Райковым, а после отъезда его в Москву, кафедру алгебры и геометрии во главе с Г. М. Баженовым;

2. кафедру математического анализа - зав. кафедрой Н. П. Сордановский;

3. кафедру геометрии во главе с Н. В. Ефимовым. Прием студентов математиков по-прежнему составлял 25-30 человек.

В тридцатые годы и вплоть до начала Великой Отечественной войны физмат ВГУ поддерживал оживленные связи с несколькими высококвалифицированными математиками, от времени до времени приезжавшими в Воронеж и читавшими на факультете различные курсы и циклы лекций как для студентов, так и для преподавателей. Почти ежегодно приезжал проф. А. К. Сушкевич, неоднократно бывал проф. Л. А. Люстерник, приезжали так же проф. Л. С. Понтрягин, проф. А.Г. Курош, проф. В. В. Степанов, проф. А. Н. Тихонов, проф. С. Я. Яновская и др. В Воронеже проф. Л. А. Люстерник впервые прочел курс функционального анализа, который лег в основу его статьи в "Успехах математических наук", развитую впоследствии Л. А. Люстерником и В. В. Соболовым в монографию "Элементы функционального анализа", переведенную на несколько иностранных языков. Активно работали научные семинара по функциональному анализу под руководством М. М.Гринблюма, по геометрии и геометрической теории функций под руководством Н. В. Ефимова и Б. А. Фукса.

Проф. Б. А. Фукс в 1937 году перевелся на работу из Томского университета в Воронежский. Вскоре после приезда он защитил докторскую диссертацию, и был утвержден в звании профессора и возглавил кафедру математического анализа. Помимо обязательных курсов математического анализа и теории функции комплексной переменной он читал такие спецкурсы по геометрической теории функций и по теории функции многих комплексных переменных - своей научной специальности. Хороший педагог и прекрасный организатор Б. А. Фукс в предвоенные годы возглавлял физико-математический факультет, будучи его деканом. Именно он, для привлечения способной молодежи, на математическом отделение университета впервые в Воронеже организовал проведение математических олимпиад и занятия школьных математических кружков при факультете.

Преподавание механики на физико-математическом факультете университета в первые годы его существования осуществлял С. В. Тарасенко, автор ряда интересных работ по гидродинамике вязкой жидкости, турбулентности и теплообмену. В 1931 г.он умер и с 1933 руководство кафедрой теоретической механики /организованной в 1931 г./ переходит к доц. А. И. Загустину, энергичному и разносторонне образованному механику. В этот период организуется аэродинамическая лаборатория, строится аэродинамическая труба, выделяется кафедра аэромеханики /зав. кафедрой доц. Гусак /. К работе кафедр привлекаются работники промышленных предприятий: авиаконструктор А. И. Москалев и руководитель аэродинамической заводской лаборатории А. И. Борисенко. В преподавании и научной работе в области теоретической механики принимает участие проф. М. Ф. Широков, работавший в ВГУ в 1936-37 годах в должности заведующего кафедрой теоретической физиики. Систематически работает научный семинар по гидромеханике, в работе которого помимо механиков принимают участие уже упомянутый М. Ф. Широков, теплофизик проф. В. И. Блинов, проф. Б. А. Фукс. В этот период начиная с 1931 года ежегодно набирается одна группа механиков в 25-30 чел., с этого же года производится прием в аспирантуру по механике; первыми аспирантами механиками Воронежского университета были его воспитанники: Н. Н. Гвоздков, П. Н. Житков и некоторые другие.

Подводя итог предвоенному развитию факультета можно сказать, что к сороковым; годам математическое отделение факультета было укомплектовано высоко квалифицированными кадрами научных работников, на нем шла интенсивная учебная и научная работа, готовились хорошо образованные и имеющие первые навыки научной работы специалисты.

С началом Великой отечественной войны число студентов резко уменьшилось. Почти все студенты и многие студентки оказались в армии. Университет был временно переведен на трехгодичный курс. Преподавательский состав математиков рассеялся по разным городам и на зиму 1941/42 года на физ-мате ВГУ организовалась единая кафедра математики во главе с Г.М.Баженовым. Кроме него на кафедре был ещё один доцент М. В. Федосеев и три ассистента: В. П. Богословский, П. М. Воскресенский и Е. П. Воскресенский. В июле 1942 года ВГУ эвакуировался из Воронежа. В сентябре университет с ничтожным количеством студентов и преподавателей, без всякого имущества и библиотеки остановился в гор. Елабуге /на реке Каме, в Татарской АССР/.

Университет расположился в нижнем этаже Елабужского учительского института. Выше, в том же здании, был расположен филиал Ленинградского университета.

Сначала студенты и преподаватели жили в том же здании учительского института, спали прямо на полу в аудиториях, потом расселились по частным квартирам. Университет провел новый набор студентов. На физмат было принято одиннадцать человек. Наконец, в ноябре 1942 года начался новый учебный год. На физмате сохранилось только две кафедры: кафедра математики, зав. кафедрой доц. М. В. Федосеев и кафедра физики, зав.кафедрой доц. И. П. Козлобаев, который был и деканом факультета. На кафедре математики помимо М. В. Федосеева по-прежнему было только три ассистента. К счастью несколько высококвалифицированных сотрудников Ленинградского университета выручили наш физмат, согласившись провести все те курсы, для которых у нас на было своих преподавателей. По кафедре математики ВГУ работали в 1942/43 учебном году: В. И. Смирнов, В. А. Амбарцумян, ныне академики, П. А. Амбарцумян, Н. П. Еругин, Шаронов и др.

Учебный год был тяжелым во всех отношениях. Особенно плохо было то, что университет остался без библиотеки, а у преподавателей и студентов тоже не было книг - всё осталось в Воронеже. Поэтому многие лекции преподавателям пришлось читать по памяти, а у студентов единственным учебным пособием были записки лекций.

Одиннадцатого октября 1943 года университет выехал из Елабуги назад в Воронеж. На кафедре математики осталось всего два человека: доц. М. В. Федосеев и асс. Е. П. Воскресенский. Ассистенты В. П. Богословский и П. М. Воскресенский умерли.

Когда университет добрался на пароходе до Казани, то там пришлось задержаться на несколько дней, пока ректор ВГУ Н. И. Глистенко смог достать нужное количество железнодорожных вагонов, для дальнейшего пути в Воронеж. Пользуясь этой задержкой М. В. Федосеев приложил много усилий чтобы привлечь кого-либо из казанских математиков на работу в ВГУ. Однако, несмотря на содействие, оказанное в этой деле Н. Г. Чеботаревым и Б. М. Гагаевым, никто из казанских математиков не захотел пойти на работу в разрушенный Воронежский университет.

В ночь на 7-ое ноября наш университет добрался до гор. Липецка и здесь остановился зимовать. Только один химический факультет доехал до Воронежа, так как всему университету разместиться в Воронеже было негде. В Липецке ВГУ поместился в одной из средних школ и там провел 1943/44 учебный год. Кафедра математики в составе двух человек не могла разумеется обеспечить всех нужных курсов. Университет всячески старался привлечь кого-либо из математиков на наш физмат. Первым откликнулся воспитанник ВГУ, выпускник 1936 года, работавший в то время в Томском университете доц. В. И. Соболев, который прибыл в Липецк летом 1944 года.

Несколько позже, осенью 1944 г.на работу в ВГУ был направлен Министерством доц. А. С. Джанумянц и зачислился на кафедру математики после демобилизации из армии, в том же I944 году, ассистент В. А. Тихонов. На кафедре стало 5 человек: один алгебраист, три аналитика и один геометр. Хочется отметить, что доцент М. В. Федосеев был единственным математиком, который сначала студентом, а затем аспирантом и доцентом, прошел с университетом весь пятидесятилетний путь от момента организации университета до настоящего времени и все математики Воронежа, которые обучались в ВГУ, являются в той или иной мере учениками М.В.Федосеева.

Зимой 1944 года кафедра математики разделилась на две: кафедру алгебры и геометрии - зав. кафедрой М. В. Федосеев, и кафедру математического анализа - зав. кафедрой В.И.Соболев. В 1944/45 учебном году удалось уже обеспечить все необходимые математические курсы, но математической специализации на факультете не было. Это объяснялось и малым числом преподавателей на математических кафедрах и малым числом студентов принимаемых на физмат.

Условия для обучения в первое время пребывания университета в Воронеже были тяжелые. Физико-математический факультет разместился на верхнем этаже наполовину восстановленного здания, до войны принадлежащего Воронежскому Пединституту. Часть комнат была отведена под аудитории и лаборатории, в других жили студенты. В аудиториях было холодно, маленькие железные печурки не могли нагреть больших комнат, к тому же не имевших двойных рам, и студенты и преподаватели занимались в пальто, писать чернилами было невозможно. Сидели на ящиках из под артиллерийских снарядов, за столами сбитыми из некрашеных досок. Да и снарядных ящиков не хватало.

Один из авторов этих строк, войдя в аудиторию читать лекцию обнаружил нескольких студентов, садящих на полу "по турецки"поджав под себя скрещенные ноги. Стоять на лекции было невыгодно, так как надо было записывать лекцию, потому что учебников не хватало.

Постепенно обстановка улучшалась, учебный процесс нормализовался, увеличивалось число студентов, принимаемых на физмат и в 1947 году была восстановлена специализация по математике, путем выделения из студентов 4 курса группы в 9 человек, обеспечение которой спецкурсами и спецсеминарами по математическому анализу взяли на себя доц. А.С.Джанумянц и доц. В.И.Соболев. Отдельный прием студентов в группу математиков стал проводится с осени 1949 года.

Постепенно факультет рос, увеличивалось число преподавателей математиков, однако на первых порах они довольно быстро менялись и существенного влияния на научную и учебную жизнь .университета не оказали. Исключением был пожалуй лишь кандидат физ. - мат. наук Т.И.Лукомский направленный на работу в наш университет после окончания аспирантуры при МГУ. Это был весьма культурный математик с широким кругозором и несомненным педагогическим талантом и если бы не его преждевременная смерть, он внес бы существенный вклад в развитие математического образования в ВГУ. В 1946 году в университет вернулся механик доц. Н.Н. Гвоздков и была восстановлена кафедра теоретической механики и гидроаэромеханики. Возвратился после демобилизации из армии асс. И.Г.Бордюгов и лаборант В.П.Мирошников, вернулся с завода лаборант Е.Т.Зенин. С 1948 года началось восстановление специализации по механике: была выделена группа студентов, усилиями И.Г.Бордюгова была организована лаборатория по фотоупругости, Е.Т.Зенин приступил к строительству малой аэродинамической трубы. На кафедру Теоретической механики были приглашены кандидаты наук С.М. Белоносов и В.И.Воронин. Появились первые послевоенные научные публикации доцентов Н.Н.Гвоздкова, С.М.Белоносова и В.И.Воронина.

В конце сороковых годов начинает развертываться научная работа студентов по математике. Если раньше занятия научных студенческих кружков носили образовательный характер, то теперь студентам начинают даваться темы для самостоятельных исследований. Был организован конкурс на лучшее решение трудных задач. Победителями конкурса стали студенты

Ю.Т.Медведев /ныне кандидат наук, научный сотрудник Института математики АН СССР/, Б.В. Меламед/также кандидат наук, доцент Омского Пединститута / и студент 1 курса Пелетминский, в настоящее время физик - теоретик, доктор физ. - мат.наук, старший научный сотрудник УФТИ в гор. Харькове. В этот же период начинали свое приобщение к науке первые кандидаты наук из числа выпускников послевоенного периода доценты А.В.Мартынов и Б.П.Пугачев.

С начала пятидесятых годов начинается интенсивное развитие научной и учебной деятельности на математическом отделении университета. Растет число преподавателей:в 1950 году на факультете стали работать бывшие его питомцы кандидаты физ.-мат. наук В.И.Ведерников и В.В.Покорный. Начал систематически работать научный семинар по математике, в котором принимали участие научные работники и других вузов города. Правда, число кафедр сократилось. В 1951 году зав.кафедрой алгебры и геометрии М.В.Федосеев вследствие длительном и тяжелой болезни отказался от заведования кафедрой и эта кафедра влилась в состав кафедры математического анализа.

С 1952 года в Воронежском университете начинает работать М.А.Красносельский, сперва в качестве профессора кафедры математического анализа, а через год заведующим вновь организованной кафедрой функционального анализа и дифференциальных уравнений. Разносторонее образованный и творчески весьма активный ученый, а также хороший организатор, М.А.Красносельский быстро вырос в одного из ведущих представителей функционального анализа в нашей стране, работы которого по нелинейному функциональному анализу и его приложениям широко известны у нас и за границей. Переезд М.А.Красносельского в Воронеж сильно оживил научную к педагогическую работу по математике в университете. Участились и стали проводится на более высоком научном уровне семинар по функциональному анализу, который приобрел большую популярность не только у воронежских, но и у иногородних математиков /делать доклады на этом семинаре приезжали ученые Москва, Ленинграда, Ростова, Киева, Харькова, Баку, Перми, Новосибирска, Риги и др. городов, а также несколько молодых польских математиков/. В 1957 году был проведен межвузовский симпозиум по применению функционального анализа к уравнениям в частных производных. На этом симпозиуме выступали с докладами помимо воронежцев Л.А.Ладыженская /Ленинград/,О.А.Олейник /Москва/, Г.Е. Шилов, М.И.Вишик/Москва/, А.Д.Мышкис/Харьков/, А.И. Кошеле /Ленинград/, А.Я.Повзнер/Харьков/ и другие иногородние математики.

По инициативе М.А.Красносельского и В.И.Соболева стали издаваться "Труды воронежского семинара по функциональному анализу", восемь выпусков которого уже вышли в свет и приобрели популярность в широких математических кругах.

J. Naumenko

An analysis of the transitive process in the conducting plate

The problem of eddy currents computation on the conducting surface is considered. It is reduced to the integral equations. The existence, uniqueness and stability of their solutions is proved. The numerical method for the mentioned problem is described. The example of computing is given.

Introduction

A wide range of practical tasks requires numerical computation of magnetic fields in the medium with conducting bodies. Nowadays the theory of these problems is well developed, whereas another important issue - computation of magnetic fields in the presence of multiconnected crack (conducting surface) is paid less attention and provides an area for further study. The main objective of this article is to develop a theory and a numerical method for these actual problems solution.

Main functional space and the equation

Let's consider the space $L_2(S;\mathbb{R}^2)$ that consists of two-component real or complex square-integrable on S vector functions accordingly. To simplify we write $L_2(S)$ in case it does not lead to misunderstanding. We suppose that the multiconnected Riemannian surface S and its boundary satisfy the Lipschitz's conditions [6] (see fig.1).

The space $L_2(S)$ can be decomposed to the sum[1, 2]:

$$L_2(S) = L^{(P)} \oplus \mathfrak{L}.$$

Here $L^{(P)}$ consists of potential fields generalized by the Weyl [1]. It can be represented as the closure by the norm of $L_2(S)$ of the gradients of smooth functions [3]. It is obvious that for all $\mathbf{b} \in \mathfrak{L}$ is

$$\iint_S \mathbf{b}\,\mathrm{grad}\,\varphi dS = 0$$

where φ is smooth function (the operators grad and rot are understood here and below in the sense of Hamilton-Beltrami).

The space $\mathfrak{L}$ can be also decomposed to the pair

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G} \oplus L^{(S)}.$$

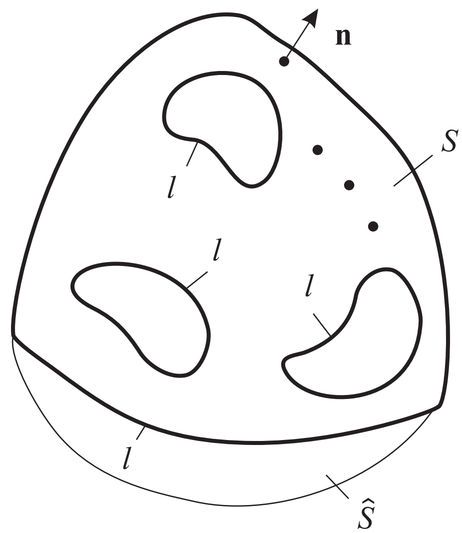


Figure 1

Here $\mathfrak{G}$ is the finite dimensional space that consists of generalized by Weyl harmonic fields. Its dimension depends directly on the connectness of the S. For example if S is simple connected then $\mathfrak{G} = \varnothing$. In other words, the space $\mathfrak{G}$ consists of cycles. The components of the elements of $\mathfrak{G}$ are smooth and the property

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{g} = 0,$$
$$\mathbf{g}\nu = 0$$

is correct for all $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}$ [2]. Here ν is the tangential to S normal to the S border.

The important property [5] of the $L^{(S)}$ elements is that their cycles are equal to zero. It means in case of smooth components of $b \in L^{(S)}$ that

$$\oint\limits_C \mathbf{b} d\mathbf{l} = 0$$

for any smooth closed curve $C \subset S$.

We use the orthoprojector $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{\mathrm{L}}\mathrm{P}^{\mathrm{S}}$ below where P^{S} vanishes normal to S field component (a normal to Lipschitz the manifold exists almost everywhere[6]) and P^{L} is orthoprojector $L_2(S) \to \mathfrak{L}$.

The computing of quasi-stationary transitive magnetic fields in presence of the conducting surface (the conducting body with degenerated third dimension) can be reduced to the following operator equation for eddy (Foucault) currents density:

$$\delta = \lambda \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{K}\delta + \mathbf{f}(\mathbf{t}). \tag{1}$$

Here $\mathrm{K} = \mathrm{P}\Gamma$, $\Gamma\xi = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{\xi}{r_{NM}} dS_N$, r is the distance between points M and N, λ is some real parameter, $\mathbf{f}(\mathbf{t}) \in \mathfrak{L}$. It is necessary to add an initial condition to equation (1). We suppose that $\delta(0) = \delta^0 \in \mathfrak{L}$.

The operator K is analyzed in work [5] and there the following theorem was proved.

Theorem 1 *The operator K is linear, self-adjoint, positive and compact in the space $\mathfrak{L}$.*

Theorem 2 *The equation* (1) *has unique and stable solution if $\|\mathbf{f}\|_{\mathfrak{L}} \in C^1[0,\infty]$.*

Proof *Because the operator* K *is self-adjoint and positive it has a full in $\mathfrak{L}$ system $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ of eigenfunctions with the system of characteristic numbers $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. We can write formally:*

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} c_k\left(t\right)\omega_i.$$

By using this representation in (1) *we get:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i\omega_i = -\,\lambda\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{K}\sum_{i=1}^{\infty} c_i\omega_i + \mathbf{f}.$$

Let's transform:

$$c_i = -\lambda\frac{c_i'}{\lambda_i} + \left(\mathbf{f},\omega_i\right)_{\mathfrak{L}},$$

$$c_i' = -\frac{\lambda_i}{\lambda}c_i - \left(\mathbf{f},\omega_i\right)_{\mathfrak{L}},$$

and then

$$c_i(t) = e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}t}\left[c_i^0 + \int\limits_0^t e^{\frac{\lambda_i}{\lambda}\tau}f_i(\tau)d\tau\right].$$

Here $c_i^0 = \left(\delta^0,\omega_i\right)_{\mathfrak{L}}$ and $f_i\left(t\right) = \left(\mathbf{f},\omega_i\right)_{\mathfrak{L}}$. Finally, we have:

$$\delta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\delta^0,\omega_k\right)e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}t}\omega_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\omega_i(x)\int\limits_0^t e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}(t-\tau)}f_i(\tau)d\tau. \qquad (2)$$

Let's analyze the properties of the series (2).

$$\left\{\int\limits_0^t e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}(t-\tau)}f_i(\tau)d\tau\right\} \leqslant \int\limits_0^t e^{-\frac{2\lambda_i}{\lambda}(t-\tau)}d\tau\cdot\int\limits_0^t f_i^2(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1-\frac{2\lambda_i}{\lambda}t}{2\frac{\lambda_i}{\lambda}}\cdot\int\limits_0^t f_i^2(\tau)d\tau < \frac{\lambda}{2\lambda_i}\cdot\int\limits_0^t f_i^2(\tau)d\tau \leqslant \frac{\lambda}{2\lambda_1}\int\limits_0^t f_i^2(\tau)d\tau.$$

Because the series $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\delta^0,\omega_i\right)^2$ converges and $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i^2 = \|\mathbf{f}\|_{\mathfrak{L}}$, the series (2) *converges almost everywhere and has continuous sum in time domain. Consequently from the theorem of Dini the series* (2) *converges regular almost everywhere.*

The series

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta = \sum_{i=1}^{\infty}\left\{-\frac{\lambda_i}{\lambda}\left(\delta^0,\omega_i\right)e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}t}+f_i(t)-\frac{\lambda_i}{\lambda}\int\limits_0^t e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}(t-\tau)}f_i(\tau)d\tau\right\}\cdot\omega_i. \qquad (3)$$

converges regular almost everywhere in every time domain $\left[\bar{t},T\right]$, $0<\bar{t}<T<\infty$. *We have estimation for squares of coefficients of* (3)*:*

$$3\left(\frac{\lambda_i}{\lambda}e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}t}\right)^2\left(\delta^0,\omega_i\right)^2+3f_i^2(0)\cdot e^{-2\frac{\lambda_i}{\lambda}t}+3\left(\int\limits_0^t e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}(t-\tau)}f_i'(\tau)d\tau\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3}{(\bar{t}\cdot e)^2}\left(\delta^0,\omega_i\right)^2+3f_i^2(0)+\frac{3\lambda}{2\lambda_i}\int\limits_0^T\left[f_i'(\tau)\right]^2d\tau.$$

Here the Cauchi inequality is used.

The representation (2) of the equation (1) solution leads to the inequality:

$$\|\Delta\delta\|_{\mathfrak{L}}\leqslant\left\|\Delta\delta^0\right\|_{\mathfrak{L}}e^{-\frac{\lambda_1}{\lambda}t}.$$

Here $\Delta\delta^0$ is the deviation of initial condition, $\Delta\delta$ is the solution error.

References

[1] Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // Duke Math. J. (1940), vol. 7, pp. 411–444.

[2] K. O. Friedrichs Differential forms on Riemannian manifolds // Comm. on Pure and Appl. Math. (1955), vol. VIII. pp. 551–590.

[3] M. Birman and M. Solomyak L^2-theory of the Maxwell operator in arbitrary domains // Russ. Math. Surv. 42 (1987), pp. 75–96.

[4] J. Naumenko and V. Astakhov Mathematical modeling of magnetic field in presence of ideal conducting surface with boundary // Electromechanics #5 (2003), pp. 11–16.

[5] J. Naumenko Local attribute of correctness and numerical computing of integral equation of first kind for density of eddy currents // Bulletin of the Southern Science Centre of RAS #4, (2005), pp. 3–8.

[6] O. Besov, V. Il'in and S. Nikolsky Integral representations of functions and embedding theorems // Nauka, Moscow, 1996.

Содержание