ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН ИМ. В.А. СТЕКЛОВА
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2012

Материалы международной конференции

Воронеж 2012

УДК 517.5 517.9

Напечатано по решению Ученого совета математического факультета

Издано при поддержке гранта РФФИ № 12-01-06801-моб_г

Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012. Материалы международной конференции. Воронеж: Издательско -полиграфический центр ВГУ, 2012. - 224 с.

Под редакцией В.А.Костина

В сборнике представлены статьи участников международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2012», содержащие новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики и другим разделам современной математики.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

В январе 2012 года исполняется 45 лет со дня организации и проведения первой воронежской зимней математической школы, созданной по инициативе выдающегося ученого и педагога, профессора С.Г. Крейна.

В связи с этим, советом математического факультета ВГУ принято решение о выпуске серии публикаций, посвященных выдающимся математикам, внесшим основополагающий вклад в становление и развитие этих научных мероприятий, получивших международное признание.

Название серии: «Выдающиеся математики России для ВГУ». В данном сборнике представлены две статьи В.П. Маслов об Арнольде. и В.А. Костин «В эпицентре двух катастроф (из жизни академика В.П.Маслова)».

В.П. Маслов об Арнольде [1]

Если мне смерть суждена, на арене,
Смерть укротителя, знаю теперь:
Этот незримый для публики зверь
Первым мои перекусит колени.
Николай Гумилев

Не могу себе даже представить, что Арнольда больше нет. Он для меня «живее всех живых». И смерть подкралась к нему не с той стороны, с которой его жена-врач Эля ставила надежную оборону. В самый трагический момент моей жизни, когда умирала моя жена, я помчался к Арнольду, и его жена Эля сказала, что надо было бы сделать врачам, чтобы спасти ее.

Моя жизнь как математика и личная жизнь несколько причудливым образом переплетались с жизнью Арнольда. В нашей карьере то он, то я вырывались вперед, и мы помогали друг другу. В какой-то момент траектории сошлись почему-то в одной точке, и мы оба (редкость — сразу два российских математика) получили приглашение сделать пленарные доклады на одном и том же Стокгольмском математическом конгрессе (1962).

Когда мы были молодыми, В. Арнольд, Ю. Манин и я, то ощущали потребность совершить «государственный переворот» в математике, как был совершен «государственный переворот» в физике, когда квантовую механику, которую не понимали даже маститые профессора физфака МГУ, стали преподавать студентам 4-го курса.

Когда-то в начале века В.А. Пяст опубликовал статью под названием «Государственный переворот», в которой констатировался факт перехода представителей модернистической литературы из положения «отверженных» в положение «признанных».

Я заметил, что абитуриенты, прекрасно сдавшие математику, не попадали тем не менее на физфак, и подумал о том, чтобы набрать из «отверженных» группу студентов и провести с помощью такой группы «государственный переворот» такого сорта.

[1] Из статьи В.П. Маслова «Переплетение траекторий жизни» 6.10.2007 Троицкий Вариант № 57, С. 14-15, «Память».

Я договорился с ректором МИЭМ (Московский институт электронного машиностроения) Е.В. Арменским, что я перейду из МГУ в МИЭМ и возглавлю кафедру прикладной математики, если мне предоставят возможность брать каждый год без экзаменов группу «отверженных». В. Арнольд, Ю. Манин, М. Федорюк, А. Костюченко, а из физиков ученик Боголюбова Б. Медведев взялись читать курсы по современной математике, по совершенно новой программе, для этой группы «отверженных». Мы все испытывали вдохновение футуристов в математике. Каждая лекция Арнольда и Манина была неповторимым шедевром. Слушателей было всего 15 человек, они прекрасно понимали, как им повезло.

У Ю. Манина подготовка к лекции занимала не менее 10 часов, и это было как бы соревнование с лучшим в мире лектором Арнольдом. По этим курсам Манин, Медведев и я издали учебники нового типа. К сожалению, второй подобной группы из «отверженных», отобранных по результатам письменного экзамена по математике, набрать не удалось. Ректора Арменского вызвали в ЦК, он получил нагоняй, и на этой группе эксперимент окончился. К сожалению также, как я ни бился и как ни помогали мне ученые разных институтов, законы так называемого «распределения» раскидали этих ребят в разные стороны. Не было Ландау-минимума, который собирал талантливейших молодых ученых около одного лидера. В МГУ на мехмате было легче, и Арнольд оброс замечательной школой; в МИЭМ'е после нагоняя это стало сложнее: «отверженных» стало еще больше, чем на физфаке МГУ.

В.И. Арнольд. Фото С. Третьяковой

Арнольд раньше меня защитил докторскую. Перед самой защитой моей докторской диссертации один из оппонентов заболел, я попросил Арнольда в срочном порядке быть моим оппонентом. За 5 дней я рассказал ему геометрическую часть, и он с моих слов написал блестящий текст, расставив все точки над «i» в геометрии индекса пересечения с особенностями проектирования лагранжева многообразия на координатную гиперплоскость. У меня была более общая алгебраическая концепция, а ее геометрическая интерпретация была приведена в основном на примерах. Алгебраическое доказательство занимало целую главу книги «Теория возмущений и асимптотические методы» (издательство МГУ, Москва, 1965).

Я довольно долго упрашивал Арнольда опубликовать текст рецензии, и наконец она вышла под заголовком «О характеристическом классе, входящем в условия квантования». Число ссылок на нее было огромно. Насколько я помню, в этой статье он в основном ничего не изменил по сравнению с отзывом. Историки математики, которые, безусловно, будут исследовать наследие такого крупного ученого, могут сравнить эти тексты по диссертационному архиву.

Алгебраический абстрактный подход при этом не потерялся. С.П. Новиков применил его в цикле блестящих работ по K-теории, которые потом развивались его замечательной школой. Его используют и физики для конкретного вычисления так называемого индекса Маслова.

Арнольд не был членом-корреспондентом, когда я, минуя звание член-корра, несмотря на противодействие ЦК КПСС, был избран сразу в академики. Не будучи еще утвержденным на Общем собрании, я тем не менее пришел (не совсем законно) на выборы член-корров. Я пришел не зря. Влияние на член-корров, которые не знают еще, как будет голосовать новоиспеченный академик, нельзя сбрасывать со счетов, но, откровенно говоря, главную роль в выборах Арнольда в члены-корреспонденты играл Л.Д. Фаддеев.

Выборы в академики — другое дело. Здесь нужна была кропотливая работа, анализ, кто и как будет в дальнейшем голосовать, кто имеет шанс пройти из ученых, которые будут голосовать за Арнольда. Этот принцип (тот минимум) был для меня как лакмусовая бумажка при выборах очередных членов Академии.

Когда, наконец, Арнольд стал реальным кандидатом, он усомнился в голосе крупнейшего ученого (мы оба считали его гениальным), перед которым сызмальства испытывал некоторый комплекс неполноценности. Он по большому секрету сказал мне о своих сомнениях, и я поклялся полностью проконтролировать на выборах этот момент.

Арнольд никогда не был дипломатом, он был всегда искренен до наивности. Например, когда он выступал в поддержку одного из своих блестящих учеников, выдвинутого в член-корры, то сказал, что последний сильнее всех кандидатов, в том числе и среди член-корров, выдвинутых в академики. Я ему потом говорил, что он тем самым обидел голосующих, и подсчитал, сколько голосов он потерял в результате этого. Нужно было видеть, как он каялся и ругал себя.

Арнольд был беспомощен, когда его начальство — замдекана или заведующая кафедрой — на него наседали. Я описал наши перипетии на конгрессе в книге «Безоружная любовь». Добавлю, что его зав. кафедрой О.А. Олейник (мягко говоря) попросила упомянуть ее в докладе. Я посмеялся и сказал: «А меня, пожалуйста, смотри, не упоминай». Он, выполнил мою просьбу, однако начал свой доклад словами: «все эти задачи шли из МИЭМа». На наших докладах мы помогали друг другу менять транспеpенсы, и, когда была моя очередь помогать Арнольду, я обводил и подчеркивал фамилию Олейник на транспеpенсе.

Арнольд рассказывал свою знаменитую теорию катастроф. Действительно, я в известной мере был инициатором этой работы. Но у меня есть непреодолимое отвращение ко всяким восхвалениям в мой адрес (особенно в лицо и особенно если это связано с недвусмысленными намеками на мой теперь уже довольно преклонный возраст). Например, на неожиданное восхваление моих научных заслуг в «Новой газете», да еще в сравнении с другими учеными (№ 36, от 22 мая 2008 г.) я смог немедленно откликнуться, поскольку в следующем номере шла моя заметка «О рисках и приобретениях» («Новая газета», приложение «Кентавр», № 11, от 29 мая 2008 г.), в которой (за счет сокращения важного текста об экономике грядущего кризиса) я протестовал: «Категорически не могу согласиться с чрезмерно высокой оценкой моего вклада в науку, данной редакцией «Кентавра» в № 36)» и т.д. на 1/6 объема статьи.

А проблема, решенная в знаменитой теории катастроф Арнольда, мучила меня с 1965 г., когда я подробно описал каустики и фокальные точки с помощью канонического оператора (теперь он называется «Фурье-интегральный оператор»). В работе «Теория возмущений и асимптотические методы» я сумел свести задачу к минимальному числу интегралов, но хотелось бы выразить эти интегралы еще проще, через спецификации, что впервые сделали в ряде важных случаев Д.Шэффер и В.Гийемин.

Л. Хёрмандер, узнав о моей теории со слов Ю. Егорова, дал другое представление канонического оператора, которое было хуже канонического оператора с указанной выше точки зрения. Его пленарный доклад на конгрессе в Ницце в 1970 г. был издан в виде препринта и переведен на русский язык в журнале «Математика» (16:1, 1972, с. 17-61).

Относительно канонического оператора там было сказано следующее. «Работа Егорова, по сути, является приложением идей Маслова, изложенных в книге «Теория возмущений и асимптотические методы». Автор сожалеет о том, что не был непосредственно знаком с этой книгой, которая, согласно докладу Маслова на Международном конгрессе в Ницце, содержит идеи, приписываемые здесь Егорову и Арнольду, и более общее и точное операторное исчисление, чем то, которое будет описано в данной работе. Тем не менее, в силу того, что эта книга чрезвычайно труднодоступна и, возможно, доказательства не вполне строги, мы надеемся, что данная работа все же будет полезной».

Меня спросили (в том числе и О.А. Олейник), согласен ли я с такой формулировкой Хёрмандера. Я сказал, что категорически не согласен. Во-первых, сравнение с другими математиками некорректно: работа Ю. Егорова вообще относится к преобразованию, давно открытому В.А. Фоком. Вклад Арнольда и его блестящая интерпретация, как я уже говорил, с моей точки зрения, неоценимы, а работа Хёрмандера освещает ряд важнейших сторон этой проблемы.

Во-вторых, некорректно говорить «возможно, доказательства не совсем строги». Работу проверяли такие тонкие и замечательные математики, как Г.И. Эскин и О.А. Ладыженская, и я исчерпывающе ответил на все возникшие у них вопросы в присутствии таких специалистов, как В.П. Паламодов и С.П. Новиков. Их вопросы помогли мне в моих лекциях -я понял, какие моменты нужно подробнее освещать.

Тогда же на конгрессе в Ницце я задал вопрос о представлении канонического оператора в виде простых формул великому математику сэру Майклу Атье. Я предъявил тривиальный случай суммы степеней в экспоненте (действие) интеграла и показал, что степень особенности по параметру h (константе Планка) не меняется после замены переменных, а значит, является инвариантом особенности проектирования введенного мной лагранжева многообразия на координатную плоскость. Но это его не заинтересовало. На этот факт я обращал внимание и других топологов, а также А. Мищенко и В. Арнольда, но никто им не заинтересовался.

Наконец, мне все-таки удалось пробудить интерес к этой проблеме инженеров Министерства радиопромышленности. Я предложил им решить задачу об отражении радиолокационных лучей от слоя Хевисайда. Это задача, в которой возникновение очень сложных фокусов крайне редко, и нужно рассматривать фокальные точки и каустики в общем положении.

Заключив подряд, я нанял команду Арнольда для решения крайне трудоемкой задачи о классификации каустик в общем положении. Эту задачу Арнольд и его команда блестяще решили (я играл роль только подгонялы и надсмотрщика). Арнольд, однако, в своих статьях с таким энтузиазмом меня благодарил, что в книге Постона и Стюарта «Теория катастроф» мне чуть ли не приписано 50% заслуги Арнольда, хотя к этой работе я имел не большее отношение, чем тот генерал, который ставил свою подпись в работе об отражении радиоволн в закрытых журналах.

В конце концов сам министр Первушин написал представление о рекомендации моей кандидатуры в члены АН СССР, которое ни в какой степени не компенсировало отрицательного мнения ЦК. Хочу подчеркнуть, что по гамбургскому счету именно Арнольд заслужил такое внимание высшего начальства Радио-прома, а не я и даже не вышеупомянутый генерал.

Когда я рассчитал неизбежность дефолта в России в 1998 г., то решил продать дачу, которая находилась рядом с дачей Арнольда, и пришел к нему рассказать о моей новой концепции хаоса. Он тонко почувствовал оттенки моего рассказа и сказал: «Ты рассказываешь так, как будто опять собираешься позвать меня в оппоненты».

Он угадал. Я объяснил, что хочу уехать из страны в Великобританию, по крайней мере на время, переждать там последствия дефолта, если они приведут к распаду РФ. В UK моя средняя дочь может продолжить обучение в школе (там 13-летнее среднее образование) — она к тому времени заканчивала школу в Троицке, но еще не выбрала специализации. Арнольд сказал мне, что его как раз просили в Гонконгском университете уговорить меня принять их приглашение на работу, хотя бы на один год, на очень хороших условиях. В Гонконге такая же система образования, что и в Англии.

Помимо этого Арнольд обратился к нашему общему другу сэру Майклу Берри, и тот тоже прислал мне приглашение приехать на год в Бристоль.

Приглашение из Гонконга имело много выгодных сторон, которые мне описывали Арнольд и другие ученые. Но в последний момент я предпочел Великобританию — все-таки эта страна ближе, всего 3 часа лету до Москвы. Дефолт, к счастью, быстро был преодолен, и я с семьей вернулся в Россию, оставив в Англии старшую дочь учиться в университете.

Последнее мистическое совпадение наших траекторий — его похороны совпали с моим юбилеем. После похорон наш общий друг сказал грустно: «Арнольд «приказал долго жить», — получается, что тебе приказал». Для нас с Арнольдом жить — это значит творить. Когда его увезли в больницу в день смерти, на его подушке остались листы с недописанными формулами.

В эпицентре двух катастроф

(из жизни академика В.П. Маслова)

В.А. Костин

«В математике академик Виктор Маслов
такая же величина как Пикассо в живописи
или Маяковский в литературе.
Он сделал ряд настолько неожиданных открытий,
что давно бы получил Нобелевскую премию,
если бы Альфред Нобель в своем завещании
не обидел математиков»
Журнал «Атмосфера» (март 2005 г.)

В последнее десятилетие Воронежские зимние математические школы, созданные С.Г Крейном, возглавляет выдающийся математик современности, академик РАН В.П Маслов. Вместе с тем, его научные связи с воронежскими математиками начались значительно раньше. В нашем университете В.П. Маслов впервые появился в 1972 году вместе со своим другом и коллегой В. И. Арнольдом, по случаю их участия в шестой («романтической», по слова С.Г. Крейна) зимней математической школе. И если уже в то время об Арнольде говорили вдохновенно, что называется «взахлеб» (еще бы, ученик самого А.Н. Колмогорова, стал Лауреатом Ленинской премии, будучи студентом третьего курса), то Маслов представлял некоторую загадку, видимо потому, что он пришел, так сказать, из физики. Но «исчисление некоммутирующих операторов» и «канонический оператор Маслова» уже тогда были у нас на слуху и активно обсуждались, восторженно комментируемые С.Г. Крейном, оппонентом В.П. Маслова при защите докторской диссертации.

В настоящее время информацию об академике В.П. Маслове можно получить по многочисленным ссылкам в интернете.

Крупнейший специалист в области математической физики, дифференциальных уравнений, функционального анализа, механики и квантовой физики. Разработал асимптотические методы, широко применяемые к уравнениям, возникающим в квантовой механике, теории поля, статистической физике, абстрактной математике, и носящие его имя. Асимптотические методы Маслова тесно связаны с такими проблемами, как теория самосогласованного поля в квантовой и классической статистике, сверхтекучесть и сверхпроводимость, квантование солитонов, квантовая теория поля в сильных внешних полях и в искривленном пространстве-времени, метод разложения по обратному числу типов частиц.

Занимался проблемами жидкости и газа, проводил фундаментальные исследования по проблемам магнитной гидродинамики.

Участвовал в расчетах по саркофагу для аварийного блока Чернобыльской АЭС, моделированию и прогнозированию экономической ситуации в России (1991 год).

С начала 1990-х гг. Маслов работал над использованием уравнений математической физики в экономике и финансовом анализе. В частности, ему удалось спрогнозировать дефолт 1998 года в России, а еще ранее - крах экономической и как следствие политической системы СССР. В 2008 г. Маслов спрогнозировал крах американской (а с ней и мировой) финансовой системы. Он рассчитал критическое число долгов

США, и выяснил, что в ближайшее время должен разразиться кризис. При расчетах использовались уравнения, аналогичные уравнениям фазового перехода в физике.

Автор более 300 научных работ, в том числе 11 монографий.

1. В. П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы. - М.: Изд-во Московского Университета, 1965.

2. В. П. Маслов. Операторные методы. - М.: Наука, 1973.

3. В. П. Маслов, М. В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. - М.: Наука, 1976.

4. В. П. Маслов. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений. - М.: Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1976.

5. В. П. Маслов. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. - М.: Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1977.

6. В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. - М.: Наука, 1987.

7. В. П. Маслов. Асимптотические методы и теория возмущений. - М.: Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1988.

8. В. П. Маслов, В. П. Мясников, В. Г. Данилов. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. - М.: Наука, Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1988.

9. М. В. Карасев, В. П. Маслов. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. - М.: Наука, 1991. ISBN 5-02-014325-1

10. В. П. Маслов. Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. - М.: Институт компьютерных исследований, 2001. ISBN 5-93972-082-X

11. В.П. Маслов Квантовая экономика.- М.: Наука, 2006.

Премии и награды:

1. Государственная премия СССР (1978) - за цикл работ по некоммутативному анализу (совместно с А. П. Прудниковым и В. А. Диткиным).

2. Золотая медаль имени А. М. Ляпунова (1982).

3. Ленинская премия (1985) - за монографию «Теория возмущений и асимптотические методы».

4. Государственная премия Российской Федерации (1997) - за новые методы в нелинейных проблемах математической физики и механики.

5. Демидовская премия

6. Почетный член международного физико-химического Сольвейского института.

Даже, «сухой» список научных трудов показывает необъятный исследовательский диапазон и удивительную научную плодотворность В.П. Маслова.

Совершенно ясно, что потребуется не один том исследований и не менее семи пядей во лбу у исследователей, чтобы адекватно оценить значение В.П. Маслова для отечественной и мировой науки, а также осветить его человеческий дар. Я же просто хочу поделиться впечатлениями, накопившимися в результате наших десятилетних контактов, при проведении Воронежских зимних математических школ, и отметить проявленную Виктором Павловичем высокую ответственность перед обществом (человечеством), в экстремальных условиях страшных катастроф, связанных с аварией на Чернобыльской АЭС и «шоковой перестройкой» (грустные юбилеи которых мы отмечаем в этом году), когда Виктор Павлович, в силу своего научного авторитета, оказался в самом центре этих событий.

Математическая модель «во спасение» всего живого

Дата 26 апреля 1986 года надолго останется в памяти человечества. Авария на Чернобыльской АЭС стала новой точкой отсчета в истории атомной энергетики. В той ситуации суровый экзамен держали и ученые нашей страны. Так в выступлении М.С. Горбачева по советскому телевидению 14 мая 1986 года говорится: « В этих сложных условиях многое зависело от правильной научной оценки происходящего, так как без этого нельзя было бы выработать и применить эффективные меры по борьбе с авариями и ее последствиями. С этой задачей успешно справляются наши крупные ученые Академии наук...». И далее: «Думаю, у нас еще будет возможность назвать имена этих отважных людей и оценить их подвиг по достоинству».

О ситуации на АЭС в монографии Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС В.П. Маслов с соавторами пишут «Драматическая обстановка аварии и *осознанная ответственность за обоснованность выводов и рекомендаций* (курсив мой В.А. К.) обуславливали, несмотря на сжатые сроки исполнения, особенно тщательный и беспристрастный анализ всей совокупности полученных данных».

И, тем не менее, в этих условиях, после анализа нескольких механизмов, из которых адекватной реальной ситуации, и, как показали события, единственно верной была выбрана математическая модель фильтрационного охлаждения, которая не только объясняла все факты так или иначе связанные с изучаемым процессом, но и позволила обнаружить ряд неизвестных свойств, анализ которых привел к практически полезным рекомендациям в борьбе с последствиями аварии, в частности к предотвращению попыток наглухо замуровать все отверстия «саркофага», в целях защиты от излучения, что привело бы к неблагоприятным изменениям в тепловом режиме «саркофага» и трудно предсказуемым осложнениям, включая выброс радиоактивных веществ.

Здесь весьма важно подчеркнуть, что, не смотря на чрезвычайность ситуации был применен строго научный подход решения конкретных задач, с использованием фундаментальных исследований.

В [1] говорится: «Хотя уравнения модели являются классическими (основополагающие результаты по уравнениям тепломассопереноса получены еще великими математиками XVIII-XIX вв., а в наше время в их списке находится В.П. Маслов), новый тип краевой задачи для них, привел к открытию новых физических эффектов, которые позволили последовательно объяснить важные особенности в поведении аварийного реактора.»

Вот так действовали настоящие ученые, понимая как свою ответственность, так и ответственность науки, которую они представляли перед человечеством.

К сожалению, спустя некоторое время обнаружились и другие подходы ответственных перед обществом лиц в борьбе с катастрофами.

Шоковая перестройка

В монографии «Квантовая экономика» В.П. Маслов пишет: «Так, казалось бы, какое отношение имеет дефолт к атомной промышленности? Оказывается, самое прямое, хотя это для кого-то и будет полным сюрпризом. Дефолт, как некоторый фазовый переход нулевого рода, с математической точки зрения - это то же явление, что и выбросы в аварийных атомных электростанциях и атомных станциях, исчерпавших свой ресурс. Дефолт - катастрофа в стране, революция, эти явления имеют математическую подоплеку».

Эти мысли Виктора Павловича, после упорного замалчивания властями, были, наконец, впервые опубликованы в газете «Известия» за 7 дней до путча 1991 г. в статье «Как избежать полной катастрофы», за которой последовал развал СССР.

В 1988 году, в связи со сложной экономической ситуацией в СССР, зам. Председателя (в то время) Совета министров СССР И.С. Силаев обратился к В.П. Маслову с экономическими вопросами. Об актуальности и сложности проблемы можно судить по тому, что за ним был прислан один из министров в семь часов утра.

После встречи с И.С. Силаевым Вычислительному центру Института новых технологий, который в то время возглавлял В.П. Маслов, был дан зеленый свет в экономических исследованиях, что позволило достаточно быстро справиться с конкретными постановками и позже уточнить их на ЭВМ.

Подход В.П. Маслова

Анализируя совершенно новые для советского человека (общества) понятия рыночных отношений, Виктор Павлович пришел к выводу, что в капиталистическом мироустройстве используется и капиталистическая арифметика с нелинейным сложением и умножением. Так, для покупки всего предприятия нужно не 100% акций, а 51%.

Эта «другая арифметика» учитывает и психологические моменты: человек выигрывает какую-то сумму, а «кайф» (выражение В.П. Маслова) получает гораздо больший, чем он выиграл. Или наоборот - проигрывает какую-то сумму и переживает.

И как говорит В.П. Маслов, он эту арифметику «вычислил» [7].

Интересно отметить, что она укладывается в так называемую «идемпотентную математику», им же разработанную, и примененную при исследовании моделей в квантовой механике.

Идемпотент (от лат. Idem—тот же самый и potens—сильный, способный). В математике - элемент равный своему квадрату, например, проекторы в кольце операторов (см.[11] с.223). В более широком смысле идемпотент можно рассматривать как операцию, не меняющую свойств некоторого объекта. Таким образом, в зависимости от ситуации, один и тот же объект можно рассматривать как результат одной или нескольких операций. Но, если же, каждой операции приписывать цену, то в разных условиях этот объект будет иметь разную цену.

Пример с икрой, цены на которую в СССР в тысячу раз ниже, чем за границей [7].

Именно этот экономический эффект и привел к термину «тропическая математика», так как благодаря которому, капитализм закабалял «целые народы», обменивая погремушки на золото.

В [6] он говорит, что в физике есть понятие «энергетически выгодные состояния». И любое тело, любая частица стремится к нему. В экономике человек стремится к максимальному выигрышу, то есть, стремится к выгодному состоянию, не отдать, а взять себе. Даже может поступить нечестно. В связи с этим, Маслов, анализируя фундаментальную работу А.Н. Ширяева «Введение в стохастическую финансовую математику», в [4] пишет: «Результаты исследований, проведенные А.Н. Ширяевым, блестяще изложенные им в двухтомнике «Финансовая математика», основаны, по сути, на презумпции справедливости. Иначе говоря, выводы, приводимые А.Н. Ширяевым, сводятся к решению проблемы: как уравновесить данные величины, чтобы все было совершенно справедливо. Но, на «диком рынке» каждый думает о том, как выгадать и выиграть, а не как поступить по справедливости, по отношению к своему сопернику или партнеру. И прежняя (классическая) арифметика не годится для людей, стимулом которых является, грубо говоря, «нажива».

Со слов Виктора Павловича, существенные упрощения их математического аппарата дал большой параметр, в качестве которого в те времена выступал доллар. Поэтому, основной рекомендацией по выводу экономии из провала являлось введение второй валюты. Да и вообще становилось ясно, что она возникла сама собой в виде доллара. Что собственно и произошло.

Свои выводы В.П. Маслов обсуждал со многими известными экономистами, но получил одобрение только у нобелевского лауреата В.В. Леонтьева.

И.С. Силаев, ставший к этому времени премьер министром РФ их полностью отверг, сославшись на то, что уже выбран «польский путь».

Многократные разговоры с Е.Т. Гайдаром, который в то время был редактором отдела экономики в газете «Правда», также ни к чему не привели. Он даже не захотел их публиковать. Любопытны слова, которые он произнес [7]: «Я такой же экономист, как Вы -математик, я понимаю все намного лучше».

Ну и как вам нравится ответ этого, в то время никому неизвестного наглеца, не имеющего за собой даже намека на какой-либо экономический результат и определяющего свой уровень в экономике адекватным уровню математика мирового калибра, к тому времени лауреатом трех премий, включая государственную (1976) и Ленинскую (1985). А Чернобыльский «саркофаг»?!

Все это говорит о научной «дремучести» случившихся «мальчишей-перестройщиков» и их гипертрофированной самовлюбленности, чей подход к решению проблемы сводился к одному принципу «рынок все расставит по своим местам».

Экспертизы и эксперименты

Что же касается собственно экономических проблем, то смею утверждать, что «экономист-любитель» силаевского призыва В.П. Маслов понимал их не хуже «экономиста-профессионала» Е. Гайдара. Но к их решению он подходил с учетом мирового и исторического опыта в этом вопросе.

В связи с этим, вспоминаю, что при первом моем посещении Виктора Павловича на даче в Троицке, я обратил внимание на раскрытую книгу его деда П.П. Маслова «Теория развития народного хозяйства» СПб, 1910 г. Это очередное доказательство того, что В.П. Маслов руководствуясь четкой научной методикой решения разного рода задач, всегда опирается на фундаментальные исследования. Примером тому является и его статья «Экспертизы и эксперименты», напечатанная в журнале «Новый мир» 1991 г.

Здесь Виктор Павлович рекомендует при принятии решений учитывать специфику регионов. Так сказать учитывать реакцию организма на предлагаемое лечение, и эту роль предлагается взять экспертам. Он говорит: «Именно наличие экспертов, выражающих усредненное мнение самых разных слоев, их возможную реакцию, способы обхода того или иного закона данным слоем населения, можно в известной степени заменить статистические данные и изучение тех правил - полурыночных, полуприватизационных, которыми они руководствуются». И далее: «Экспертная система должна способствовать оптимальному и осторожному вмешательству в сложившуюся систему отношений, учитывать психологию советского человека». Золотые слова. Подтверждением служит поступок моего друга, директора школы-лицея села Верхний Мамон Воронежской области Дудкина Василия Ивановича, который наотрез отказался от повышения своей заработной платы в пользу низкооплачиваемых преподавателей со словами: «Да если я себе сделаю зарплату 36 000 рублей, а учителей посажу на минималку, как я им в глаза буду смотреть?» Вот поэтому в этом лицее, как пишет газета «Профсоюзный щит» №7(65), ноябрь-декабрь 2010 в статье «Провинциалы» «...по последнему слову техники оборудованные кабинеты физики, химии, иностранного языка, компьютерный класс и видеостудия». А в системе образования района с успехом реализуется такой нехарактерный для нашего времени принцип, как «человек человеку - друг». Здесь школьные директора не переманивают друг у друга учеников, считая это неэтичным. Хотя в рамках наших нынешних капиталистических реалий, при подушевом финансировании наполнение кармана педагога напрямую зависит от количества детских душ в школе.

Как видим, в этом регионе, выводы В.П. Маслова остаются справедливыми даже спустя двадцать лет после их опубликования, и приручении народа к «долларовой игле».

Почему же в нашей провинции не принимается «тропическая психология» на которую так рассчитывали реформаторы?

Думается потому, что благодаря лучшему в мире, на тот момент образованию, жертвы перестройки (почти все граждане нашей страны) по культурному и интеллектуальному уровню не уступали реформаторам, отличаясь от них лишь наличием совести и ответственности перед живущими, то есть категориями чуждыми «тропической психологии».

Думаю, по той же причине не были приняты и рекомендации В.П. Маслова о введении экспертной системы, ибо в случае ее введения имело бы место сглаживание возможности экстремальных нажив.

Можно ли представить введение ЕГЭ при наличии экспертной системы, учитывая, что эту реформу не поддержал ни один специалист, от рядового преподавателя до академика РАН? В результате, по типичным образцам «тропической математики» страна променяла на джинсы и жвачку, самое ценное, что было создано - лучшее в мире классическое образование.

Теперь, когда страна осталась без специалистов, что отмечают уже и ее первые лица, в связи с угрозой безопасности, тем самым признается правота академика В.П. Маслова, высказанная двадцать лет назад И. Силаеву и Е. Гайдару, да и другим экономистам, которые «захлопывали» его на различного уровня собраниях.

«И именно страсть наживы приводит к другой арифметике и к усилению «кровообращения» экономики. Инстинкт бессмертия, как другое «таинство природы», ведет к заботе о потомках и идеологии, а иногда вырождается в фанатизм. Этот инстинкт «плановый», как «плановое хозяйство», и ему отвечает обычная «социалистическая арифметика» [4].

Присоединяясь к этим словам Виктора Павловича, хочется надеяться, что в нашем обществе не приживется «тропическая дикость», и в этом будет великая заслуга выдающегося ученого, академика В.П. Маслова.

Истоки

Отец Виктора Павловича - Павел Петрович Маслов был одним из известнейших советских профессоров в области статистики, действительным членом Международного статистического института. Он является автором более 250 опубликованных научных работ по вопросам статистики и социологии, соавтором многих фундаментальных коллективных монографий, переводчиком (он владел пятью иностранными языками) и редактором многих уникальных иностранных изданий. Научная деятельность Павла Петровича тесно связана с основными работами российской статистики, в которых он принимал самое деятельное участие. Он внес большой вклад в развитие статистики сельского хозяйства, статистики населения, статистики доходов и расходов населения, бюджетных исследований. Ряд работ П.П. Маслова, в частности, две фундаментальные — "Социология и статистика"(1967) и "Статистика и социология"(1971), посвящен статистическому моделированию социальных процессов, где автор выдвигает новые подходы к их количественному изучению. При его непосредственном участии и по его инициативе были подготовлены интереснейшие переводные работы из серии "Библиотека иностранных книг по статистике в издательстве "Статистика членом редколлегии которой он являлся. Он перевел книгу Миллза "Статистические методы снабдив перевод своими комментариями.

Павел Петрович Маслов (1902-1978 гг.)

Павел Петрович Маслов - автор учебников по сельскохозяйственной статистике, общей теории статистики, финансовой статистике, которые и сейчас не утратили своего значения. Его отличало умение рассказать о сложном простым и доступным языком. Примером этому служит неоднократно переиздававшаяся популярная книга "Техника работы с цифрами". Возглавляя кафедру статистики МКЭИ и МФИ на протяжении более 40 лет, Павел Петрович уделял огромное внимание преподавательской работе, считая ее не менее сложной и важной, чем чисто научная деятельность. Он был талантливым педагогом, внес большой вклад в развитие методики преподавания различных курсов статистики в экономических вузах, в создание учебных программ и методических пособий.

Круг интересов Павла Петровича Маслова был весьма широк. Он автор книги "История архитектурных памятников Москвы". Павел Петрович увлекался деревянной скульптурой. В 1973 г1973 г. состоялась персональная выставка его работ, получившая высокую оценку. Большой популярностью пользовались его лекции по истории искусств. Высшая школа профдвижения и Университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы приглашали П.П. Маслова для занятий с иностранными студентами (на английском, французском языках). Он оказывал большую помощь другим институтам в научной, учебной, методической работе, подготовке научно-педагогических кадров. В сентябре 1970 г. П.П. Маслов был награжден медалью "За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения В.И. Ленина".

Академик Петр Павлович Маслов
(1867-1946 гг.)

В своем интервью газете «Московский комсомолец» от 22.12.2003 г. Виктор Павлович начинает свою родословную с прадеда-казака-староверца, открывшего золотые прииски на Урале. Там даже образовался выселок Масловский (деревня Маслово) Уйской станицы Троицкого уезда Оренбургской губернии.

Здесь и родился 15(27) июля 1867 года дед Виктора Павловича, Петр Павлович Маслов, который после окончания казачьей школы обучался в Троицкой гимназии и уже 14-летним подростком посещал революционный кружок и участвовал в выпуске журнала «Бродяга» ([10]).

Таким образом, не смотря на то, что семья была зажиточной, юный Петр Маслов интересовался идеей социальной справедливости.

Поступив в Казанский университет (1887), П.П. Маслов продолжает заниматься революционной деятельностью и посещает марксистский кружок Н.Е. Федосеева. Надо сказать, что в это же время в университете обучался В.И. Ленин. Не исключено, что именно тогда произошли их первые встречи при участии в сходке студентов 4 декабря 1887, требовавших отмены реакционного университетского устава ([11], стр. 11), после которой уже 5 декабря Ленин с 1-го курса покинул университет, а Маслов был также исключен с 1-го курса и выслан из Казани.

В 1889 году П.П. Маслов поступил на 2-й курс Харьковского ветеринарного института, но по доносу за «Казанское дело» был арестован и провел три года в заключении. В 1892 году был отправлен в ссылку на родину, откуда наладил связь с Лениным, обмениваясь с ним письмами, рецензиями на книги и статьи. Затем приезжает в Самару, где в 1893-1894 г. работал в «Самарской газете». Но уже в 1894 году выехал в Вену, где изучал политическую экономию в Венском университете. В 1896 году вернулся в Россию, редактировал легальную марксистскую газету «Самарский вестник» (1896-1897), затем переехал в Петербург, где сотрудничал с журналами «Научное обозрение», «Жизнь», «Начало». Был делегатом 2-го съезда РСДРП (1903) (Брюссель-Лондон). После съезда примкнул к меньшевикам, написал программу муниципализации земли, поддержанную ими. Как говорит Виктор Павлович: «Всего там было четыре программы—Ленина, Шмидта, Ларина и Маслова. Все они по очереди голосовались. Ленин, когда его собственная программа провалилась, был сначала за программу Шмидта, потом за программу Ларина, а победила программа Маслова. После чего их отношения сильно обострились». Есть даже статья Ленина «Петр Маслов в истерике».

В 1906-1907 гг. П.П. Маслов работал в петербургских журналах, а также преподавал в качестве доцента в Петербургском сельскохозяйственном институте. В 1908 г1908 г. он был вынужден эмигрировать за границу, где в том же году издал 2-й том своего труда "Аграрный вопрос в России". В 1910-1914 гг. Петр Павлович Маслов опубликовал ряд монографий и брошюр по теории развития народного хозяйства в России и Западной Европе на немецком, русском и французском языках (в частности, книгу "Теория развития народного хозяйства"). В 1913 г1913 г. вернувшись в Россию, работал сначала в Петербурге, а затем с 1914 г1914 г. в Москве. В 1914-1915 гг. он выпустил две книги "Капитализм, наемный труд и заработная плата"и "Курс истории народного хозяйства". В 1916-1917 гг. П.П. Маслов редактировал в Москве журналы "Экономическое обозрение"и "Дело".

В 1918 г1918 г. Петр Павлович Маслов читал лекции по истории народного хозяйства в Омском сельскохозяйственном институте. В 1919-1920 гг. он занимал кафедру политэкономии в Иркутском государственном университете. С 1920 г1920 г. П.П. Маслов - профессор физико-математического факультета, затем декан гуманитарного факультета Государственного института народного образования (ГИНО) в Чите. Он вел курсы "Наука о народном хозяйстве"и "Теория кооперации". В 1923 г1923 г. после реорганизации и перевода ГИНО во Владивосток, Маслов вернулся в Москву. В политической жизни Петр Павлович Маслов не участвовал, вел научную работу, занимаясь проблемами политэкономии социализма. В 1923-1925 гг. П.П. Маслов являлся профессором 1-го МГУ. В 1925-1929 гг. он был председателем теоретической секции Экономического института.

С 1929 г. П.П. Маслов действительный член АН СССР.

Заканчивая эту заметку, хочу напомнить слова, приписываемые А.Эйнштейну: «Если я и видел дальше всех, то только потому, что стоял на плечах гигантов». Как важно, чтобы эту истину знали, понимали и разделяли лидеры нашего общества. Но, разумеется, для этого они должны хотя бы знать об этих гигантах, одному из которых и посвящается эта публикация.

Литература

1. Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС М.: Наука, 1987, 143 с.

2. Маслов В.П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений М.: наука, 1987, 408 с.

3. Маслов В.П. Операторные методы М.: Наука, 1973, 543 с.

4. Маслов В.П. Квантовая экономика М.: Наука 2006, 92 с.

5. Маслов В.П. Эксперты и экспертизы Новый мир, 1991, №1, с. 243-252

6. Маслов В.П. Квазистабильная экономика и ее связь с термодинамикой сверхтекучей жидкости. Дефолт как фазовый переход нулевого рода I. ОП и Пм М.:2005, т.12, вып. 1, с. timeHour3Minute403-40

7. Маслов В.П. «Ошибка Нобеля» интервью газете «Московский комсомолец», от datelstransMonth12Day22Year200322.12.2003.

8. БСЭ статья Маслов П.П.

9. Титов В.Т., Маслов В.П., Фоменко А.Т., Костин В.А., Овчинников В.И., Сапронов Ю.И., Семенов Е.М. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2008 Вестник РФФИ, №2(58) апрель-май 2008

10. http://ru.wikipedia.org (разделы Маслов П.П., Маслов П.П., Маслов В.П.)

11. БЭС, МАТЕМАТИКА, М: 2000, 847с.

О граничных задачах оператора теплопроводности, возмущенного нагрузкой высокого четного порядка

М.М. Амангалиева, М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов
(Алматы, Институт математики МОН РК; muvasharkhan@gmail.com)

Нами, ранее были исследованы краевые задачи для нагруженного параболического уравнения, когда нагруженное слагаемое представляет собой след производной второго порядка от искомой функции по пространственной переменной на некоторой линии $x = t^{\omega},\ \omega \in (-\infty, +\infty)$ [1–3]. В этом случае порядок производной нагруженного слагаемого совпадает с порядком дифференциальной части уравнения. Такие уравнения были названы спектрально-нагруженными, вследствие возникновения спектра соответствующей обобщенной спектральной задачи. Здесь рассматривается случай, когда порядок нагруженного слагаемого превышает порядок дифференциальной части уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в области $Q = \{x \in (0, \infty),\ t \in (0, \infty)\}$ следующие сопряженные граничные задачи:

$$L_{\lambda}u = f \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \cdot \dfrac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\Big|_{x=a} = f, \\ u(x,0) = 0,\ \ u(0,t) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$L_{\lambda}^{*}v = g \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{\lambda} \cdot \delta^{(2k)}(x-a) \otimes \displaystyle\int\limits_0^{\infty} v(\xi,t)d\xi = g, \\ v(x,\infty) = 0,\ \ v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, $k \geqslant 2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр,

$$f,\ u \in L_1(Q),\ \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\Big|_{x=a} \in L_1(0,\infty);\ \ g,\ v,\ \int\limits_0^{\infty} v(\xi,t)d\xi \in L_{\infty}(Q). \tag{3}$$

2. Сведение к интегральным уравнениям. Обращая дифференциальную часть в граничной задаче (1), будем иметь:

$$\mathbf{K}_{\lambda}\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int\limits_0^t \mathcal{K}_{2k}(t-\tau)\mu(\tau)d\tau = f_1(t), \tag{4}$$

где

$$\mu(t) = \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\Big|_{x=a},\ \ f_1(t) \text{ определяется } f(x,t),$$

$$\mathcal{K}_{2k}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \cdot \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} \left\{ \exp\left(-\frac{x^2}{4\theta}\right) \right\} \Big|_{x=a}.$$

Соответственно для задачи (2) получим:

$$\mathbf{K}_{\lambda}^{*}\nu \equiv \nu(t) - \overline{\lambda} \int\limits_t^{\infty} \mathcal{K}_{2k}(\tau - t)\nu(\tau)d\tau = g_1(t). \tag{5}$$

где
$$\nu(t) = \int\limits_0^\infty v(\eta,t)d\eta,\ \ g_1(t) \text{ определяется } g(x,t).$$

3. Разбиение плоскости спектрального параметра. Используя преобразование Лапласа для уравнение (5), на основе характеристического уравнения
$$1-\overline{\lambda}\cdot(-p)^{k-1}e^{-a\sqrt{-p}}=0,\ \ \mathrm{Re}(-p)>0, \tag{6}$$
получим соотношения
$$|\lambda| = \frac{\left(a/\sqrt{2}\right)^{2k-2}}{\left|\arg\lambda+\left(2n+\dfrac{k-1}{2}\right)\pi\right|^{2k-2}}\cdot\exp\left|\arg\lambda+\left(2n+\frac{k-1}{2}\right)\pi\right|,$$
(где $n=0,1,2,\ldots$) для линий, разбивающих комплексную $\lambda-$ плоскость на непересекающиеся области D_m, $m=0,1,2,\ldots$

Заметим, что кроме области D_0, которая имеет только внешнюю границу $\Gamma_0=\partial D_0$, каждая из областей D_m имеет границу ∂D_m, состоящую из внешней Γ_m и внутренней Γ_{m-1} частей:
$$\partial D_m=\Gamma_{m-1}\cup\Gamma_m,\ \text{ причем, } \Gamma_{m-1}\cap\Gamma_m=(-1)^m\exp\{m\pi\},$$
т.е. внешняя Γ_m и внутренняя Γ_{m-1} части границы ∂D_m области D_m имеют одну общую точку, лежащую на действительной оси комплексной плоскости параметра λ.

Область D_0- это область в которую отображается та часть плоскости комплексного переменного p, для которой $\pi/4<\arg p<7\pi/4$, т.е внешность угла, лежащая между прямыми $y=-x$ и $y=x$. Это означает следующее: если $\lambda\in D_0$, то уравнение (6) не имеет нужных нам корней, т.е. таких у которых $\mathrm{Re}(-p)>0$.

Очевидно, что при $k=1$ получаем известную картину разбиения комплексной плоскости λ [1–3].

Для каждой области D_m, т.е. когда $\lambda\in D_m$ уравнение (6) будет иметь ровно $2m$ корней. (Это легко проследить, например, для действительных значений λ, p.)

4. Решение интегральных уравнений. Общее решение уравнения (5) при $\lambda\in D_m$ имеет вид
$$\nu(t)=g_1(t)+\overline{\lambda}\int\limits_t^\infty r_{\lambda^-}(t-\tau)g_1(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{2m}c_j\cdot e^{p_jt}. \tag{7}$$
где p_j — корни характеристического уравнения (6) и
$$r_{\lambda^-}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{(-p)^{k-1}\exp(-a\sqrt{-p})}{1-\overline{\lambda}(-p)^{k-1}\exp(-a\sqrt{-p})}\exp(yp)dp.$$

Сформулируем полученные результаты в виде следующих лемм.

Лемма 1. *Значения $\lambda\in D_0$ являются регулярными числами оператора $\mathbb{K}^*_\lambda$ (5).*

Лемма 2. *Множество $\mathbb{C}\setminus D_0$ состоит из характеристических чисел оператора $\mathbb{K}_\lambda^*$ (5) . Причем, если $\lambda\in D_m\cup\Gamma_{m-1}\setminus\{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m=1,2,...$, то $\dim Ker\,(\mathbb{K}_2^*)=2m$; и соответствующие собственные функции имеют вид:*

$$\nu_{\lambda j}(t)=\exp(p_j t),\quad j=1,...,2m.$$

где p_j- соответствующие корни уравнения (6).

Для интегральное уравнение (4) будем иметь

$$\mu(t)=f_1(t)+\lambda\int\limits_0^t r_{\lambda+}(t-\tau)f_1(\tau)d\tau, \tag{8}$$

где

$$r_{\lambda+}(\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\lambda p^{k-1}e^{-a\sqrt{p}}}{1-\lambda p^{k-1}e^{-a\sqrt{p}}}\cdot e^{p\theta}dp,\qquad p=s+i\sigma,$$

и для того, чтобы функция $\mu(t)$ определяемая равенством (8) была суммируемой (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\int\limits_0^\infty f_1(t)\cdot\exp(-p_j t)dt=0,\qquad 1\leqslant j\leqslant 2m, \tag{9}$$

где p_j корни уравнения (6) с противоположным знаком. Справедлива

Лемма 3. *Если $\lambda\in D_0$, то неоднородное уравнение (4) безусловно однозначно разрешимо; если же $\lambda\in\mathbb{C}\setminus D_0$, $\lambda\in D_m$, то для однозначной разрешимости уравнения (4), необходимо и достаточно, выполнение $2m-$ условий разрешимости (9).*

5. Основной результат. Непосредственно из лемм и интегральных представлений (7), (8) следует

Теорема 1. *Краевая задача (1) является нётеровым с неположительным индексом, если $\lambda\in\mathbb{C}$. Более того, если $\lambda\in D_m$, $m=0,1,2,...$, тогда $\dim Ker\,(L_\lambda^*)=2m$, и $\dim Ker\,(L_\lambda)=0$.*

Литература

1. Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Об особом интегральном уравнении Вольтерры второго рода со спектральным параметром// Сибирский матем. журнал (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск). 2011. Т.52, №1. С.3–14.

2. Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Граничные задачи для спектрально–нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии нагрузки к временной оси в нуле или на бесконечности// Дифференциальные уравнения (РАН, Москва). 2011. Т.47, №2. С.231–243.

3. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений – Алматы: Ғылым. 2010. – 335 с.

Об изоморфизме пространств следов

В.П. Аносов
(Новосибирск, НГПУ; averi@ngu.ru)

Прежде чем непосредственно перейти к формулировке результатов, введем основные понятия.

Действующий в банаховом пространстве E оператор A называется сильно позитивным (см. [1]), если он имеет плотную в E область определения $D(A)$ и для любого комплексного числа λ с $Re\lambda \geq 0$ оператор $A + \lambda I$ имеет ограниченный обратный, для которого справедлива оценка

$$|| \ (A + \lambda I)^{-1}; E \to E \ || \leq c(1 + |\lambda|)^{-1}. \tag{1}$$

Здесь c – положительная постоянная, не зависящая от λ. (В дальнейшем через c, C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных случаях.)

Оператор A сильно позитивен, если и только если (см. [1]) для полугруппы $T(t) = exp\{-At\}$ $(t \geq 0)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} &|| \ exp\{-At\}; E \to E \ || \leq c \ exp\{-\delta t\} \quad (\delta > 0, t \geq 0), \\ &|| \ Aexp\{-At\}; E \to E \ || \leq Ct^{-1}exp\{-\delta t\} \quad (t > 0), \end{aligned} \tag{2}$$

т.е. если полугруппа $exp\{-At\}$ аналитична и ее норма экспоненциально убывает.

Далее введем пространство следов $E(\alpha, p, A)$ (см. [2,3,4]). Его определим следующим образом. Для любого $v_0 \in D(A)$ положим

$$|v_0|^p_{E(\alpha,p,A)} = \int_0^\infty t^{p-\alpha p}||A^\gamma exp\{-At\}v_0||^p dt,$$

где $\gamma = 2$, если $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq 1$, и $\gamma = 1$, если $0 < \frac{1}{p} < \alpha < 1$.

Нетрудно показать, что функционал $|v_0|_{E(\alpha,p,A)}$ обладает всеми свойствами нормы. Замыкание $D(A)$ в этой норме образует банахово пространство $E(\alpha, p, A)$.

Пространство $E(\alpha + j, p, A)$ состоит из таких элементов v_0, для которых $A^j v_0 \in E(\alpha, p, A)$ $(j \in \mathbb{N})$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема *Пусть операторы A и B сильно позитивны и $D(A) = D(B)$. Тогда при $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq 1$ и при $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ и с учетом ограниченности операторов A^jB^{-j}, $A^{j+1}B^{-j-1}$ пространства $E(\alpha + j, p, A)$ и $E(\alpha + j, p, B)$ изоморфны.*

Доказательство вначале проведем для случая, когда $\alpha p > 1$. Для доказательства теоремы достаточно установить эквивалентность норм $|v_0|_{E(\alpha+j,p,A)}$, $|v_0|_{E(\alpha+j,p,B)}$. Докажем, например, что

$$|v_0|_{E(\alpha+j,p,A)} \leq C(\alpha, p)|v_0|_{E(\alpha+j,p,B)}. \tag{3}$$

Пусть $v_0 \in D(A^{j+1})$. Воспользуемся тождеством

$$exp\{-At\}v_0 = exp\{-Bt\}v_0 + \int_0^t exp\{-A(t-s)\}(B - A)exp\{-Bs\}v_0 ds \tag{4}$$

Разбив промежуток $[0,t]$ пополам и проинтегрировав второй интеграл по частям, приведем (4) к виду

$$exp\{-At\}v_0 = A^{-1}Bexp\{-Bt\}v_0 \ - \ A^{-1}exp\{-A\frac{t}{2}\}(B-A)exp\{-B\frac{t}{2}\}v_0 +$$
$$+ \int_0^{t/2} exp\{-A(t-s)\}(B-A)exp\{-Bs\}v_0 ds +$$
$$+ A^{-1}\int_{t/2}^{t} exp\{-A(t-s)\}(B-A)Bexp\{-Bs\}v_0 ds.$$

Отсюда, с учетом оценок (5) и ограниченности операторов A^jB^{-j}, $A^{j+1}B^{-j-1}$, следует, что

$$||A^{j+1}exp\{-t\}v_0||_E \le C(\ ||B^{j+1}exp\{-B\frac{t}{2}\}v_0||_E +$$
$$t^{-1}\int_0^t ||B^{j+1}exp\{-B\frac{s}{2}\}v_0||ds \ ).$$

Это неравенство и неравенство Харди (9.9.10) из [5] доказывают справедливость неравенства (6).

Для случая, когда $\alpha p < 1$, вначале воспользуемся леммой 2 из [2], согласно которой имеет место неравенство

$$c\int_0^{\infty} t^{-\alpha p}||Aexp\{-At\}v_0||_E^p \le |v_0|^p_{E(\alpha,p,A)} \le$$
$$\le C\int_0^{\infty} t^{-\alpha p}||Aexp\{-At\}v_0||_E^p dt,$$

а затем, используя его, повторим приведенные выше рассуждения. Теорема доказана.

Отметим, что для случая $\alpha p < 1$, изоморфизм пространств $E(\alpha, p, A)$ и $E(\alpha, p, B)$ установлен в работе [3].

Литература

1. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.--М.: Наука, 1966.--500с.

2. Аносов В.П. О следах функций из абстрактных пространств Л.Н. Слободецкого // СМЖ. 1994. Т36, №5. С.973–989.

3. Аносов В.П., Соболевский П.Е. О коэрцитивной разрешимости параболических уравнений // Математические заметки. 1972. Т11, №4. С.409–419.

4. Da-Prato G. et Grisvard P. Sommes d'opérateurs linéaires et equations différentielles opérationnelles // J.math pures et appl.-1975.-54.-P.305–387.

5. Харди Г., Литтлвуд Д., Пойа Г. Неравенства.--М.:ИЛ, 1948.

Элементарная оценка величины рода конечного графа

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

(Белгород, БелГУ; virch@bsu.edu.ru)

Среди всех графов $\langle V, \Phi\rangle$ (V – множество вершин, $\Phi \subset V^{(2)} \ \equiv \{\{x,y\} : x,y \in V\}$ – множество ребер) особое место занимают т.н. *плоские графы*, которые характеризуются тем, что допускают взаимнонепрерывное вложение (гомеоморфизм) в сферу в

$\mathbb{R}^3$. Обобщением понятия плоского графа является граф рода $r \in \mathbb{N}_+$ так, что плоские графы при этом обладают нулевым родом.

Определение. *Граф* $\langle V, \Phi \rangle$ *называется графом рода* r, *если он допускает гомеоморфное вложение в двумерное непрерывное ориентируемое многообразие (ДНОМ) рода* r *и не допускает такого вложения в ДНОМ меньшего рода.*

В настоящем сообщении аннонсируется

Теорема. *Если граф* $\langle V, \Phi \rangle$ *имеет* n *вершин, то его род* r *подчинен неравенству*

$$r < n - 2\,. \tag{1}$$

Очевидно, что оценку (1) достаточно установить для полного графа $\langle V, V^{(2)} \rangle$ с n вершинами. Доказательство теоремы строится индукцией по n, начиная с $n = 3$. Индукционный шаг конструируется на основе следующего утверждения.

Лемма. *Пусть* γ_1 *и* γ_2 *– замкнутые несамопересекающиеся пути одинаковой длины на графах* $\langle V_1, \Phi_1 \rangle$ *и* $\langle V_2, \Phi_2 \rangle$ *соответственно. Пусть, далее, эти графы могут быть погружены гомеоморфно в ДНОМ* Σ_1 *и* Σ_2, *имеющие соответственно род* r_1 *и* r_2, *причем так, что при этом погружении контура* γ_1 *и* γ_2 *являются границами граней указанных графов на многообразиях* Σ_1 *и* Σ_2. *Тогда граф* $\langle V, \Phi \rangle$, *получаемый склейкой графов* $\langle V_1, \Phi_1 \rangle$ *и* $\langle V_2, \Phi_2 \rangle$ *по контурам* γ_1 *и* γ_2, *допускает гомеоморфное вложение в ДНОМ рода* $(r_1 + r_2)$ *независимо от ориентации, по которой производится склейка.*

Это утверждение применяется к последовательности графов $\langle V, \Phi_k \rangle$, $k = 1 \div (n-2)$, у которых $V = \{x_1, ..., x_n\}$ и $\Phi_k = \{\gamma\} \cup \{\{x_j, x_k\}\} : j = (k+2) \div n\}$, где $\{\gamma\}$ – множество рёбер контура $\gamma = \langle x_1, ..., x_n \rangle$. Все эти графы заведомо погружаемы гомеоморфно в тор так, что контур γ является границей некоторой грани.

Литература

1. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 1. Операции склеивания и разрезания // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2011. – 5(100);22. – С.140-152.

Обращение интегральных операторов на основе двух операторных тождеств

Е.А. Аршава

(Харьков, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры; elarshava@mail.ru)

Изучается задача обращения интегральных операторов методом операторных тождеств, что является продолжением исследований, представленных в работах [1-5].

В качестве интегрального оператора рассмотрим ограниченный оператор в $L_2(U)$, где $U = \{x : 0 < x_1 < \omega_1, 0 < x_2 < \omega_2\}$ - прямоугольник на плоскости, вида

$$Sf = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_U V(x,t) f(t) dt, \tag{1}$$

$x = (x_1, x_2)\,, t = (t_1, t_2)\,, V(x,t) \in L_2(U), \forall x \in U$. Такое представление для оператора верно при $k = 1, j = 2; k = 2, j = 1$.

Введем операторы

$$\hat{A}_1 f = \int\limits_0^{x_1} (t_1 - x_1)\, f(t_1, x_2) dt_1, \qquad \hat{A}_1^* f = \int\limits_{x_1}^{\omega_1} (x_1 - t_1)\, f(t_1, x_2) dt_1,$$
$$\hat{A}_2 f = \int\limits_0^{x_2} (t_2 - x_2)\, f(x_1, t_2) dt_2, \qquad \hat{A}_2^* f = \int\limits_{x_2}^{\omega_2} (x_2 - t_2)\, f(x_1, t_2) dt_2,$$

то есть $\hat{A}_1 = A_1^2, \hat{A}_2 = A_2^2$, где $A_1 f = i\int\limits_0^{x_1} f(t_1, x_2) dt_1, A_2 f = i\int\limits_0^{x_2} f(x_1, t_2) dt_2$.

Доказана

Теорема 1. Если ядро оператора (1) удовлетворяет дифференциальному уравнению: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} V(x,t) = 0, \quad i = 1, j = 2; i = 2, j = 1$, тогда

$$\left(\hat{A}_k S - S\hat{A}_k^*\right) f = M_{1k} \cdot M_{2k} f, \quad k = \overline{1,2},$$

где

$$M_{11} f = x_1, M_{12} f = x_2,$$
$$M_{21} f = \frac{\partial}{\partial x_2} \int\limits_0^{\omega_1} \int\limits_0^{\omega_2} V\left(0, x_2, t_1, t_2\right) f\left(t_1, t_2\right) dt_2 dt_1,$$
$$M_{22} f = \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_0^{\omega_1} \int\limits_0^{\omega_2} V\left(x_1, 0, t_1, t_2\right) f\left(t_1, t_2\right) dt_2 dt_1.$$

Умножая равенство $\left(\hat{A}_k S - S\hat{A}_k^*\right) f = M_{1k} \cdot M_{2k} f, k = \overline{1,2}$ слева и справа на T, легко доказать следующую теорему.

Теорема 2. Если оператор S вида (1) имеет ограниченный обратный $T = S^{-1}$, то верно равенство:

$$T\hat{A}_k - \hat{A}_k^* T = T\varPi_k T = \varGamma_k,$$

где $\varPi_k = M_{1k} \cdot M_{2k}$.

Полученные соотношения можно представить в виде

$$T = \left(\lambda_k^2 - \nu_k^2\right)^{-1} \left[\lambda_k^2 \left(E - \nu_k^2 \hat{A}_k^*\right) T - \nu_k^2 T \left(E - \lambda_k^2 \hat{A}_k\right) - \lambda_k^2 \nu_k^2 \varGamma_k\right].$$

Тогда

$$\left(E - \nu_k^2 \hat{A}_k^*\right)^{-1} T \left(E - \lambda_k^2 \hat{A}_k\right)^{-1} = \left(\lambda_k^2 - \nu_k^2\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left[\lambda_k^2 T \left(E - \lambda_k^2 \hat{A}_k\right)^{-1} - \nu_k^2 \left(E - \nu_k^2 \hat{A}_k^*\right) T - \lambda_k^2 \nu_k^2 \left(E - \nu_k^2 \hat{A}_k^*\right)^{-1} \varGamma_k \left(E - \lambda_k^2 \hat{A}_k\right)^{-1}\right].$$

Так как

$$\left(E - \lambda_k^2 \hat{A}_k\right)^{-1} (1 + i\lambda_k x_k) = e^{i\lambda_k x_k},$$
$$\left(E - \nu_k^2 \hat{A}_k^*\right)^{-1} e^{-i\nu_k \omega_k} (1 + i(\omega_k - x_k)\nu_k) = e^{-i\nu_k \omega_k},$$

то для функции вида $\rho(\lambda,\nu)=\int\limits_U \left(Te^{i\lambda x}\right)e^{-i\nu x}dx$, $\lambda x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$, которая играет важную роль в приложениях (задачи астрофизики, теория переноса излучения), может быть получено представление

$$\rho(\lambda,\nu)=\left\{\left(E-\nu_1^2\hat{A}_1^*\right)^{-1}\left(E-\nu_2^2\hat{A}_2^*\right)^{-1}T\left(E-\lambda_2^2\hat{A}_2\right)^{-1}\left(E-\lambda_1^2\hat{A}_1\right)^{-1}\phi,\overline{\psi}\right\}_U,$$

где $\{\cdot,\cdot\}_U$ - скалярное произведение в $L_2(U)$, а функции имеют вид:

$$\varphi(x_1,x_2)=(1+i\lambda_1x_1)(1+i\lambda_2x_2),$$

$$\psi(x_1,x_2)=(1+i(\omega_2-x_2)\nu_2)e^{-i\nu_2\omega_2}\cdot(1+i(\omega_1-x_1)\nu_1)e^{-i\nu_1\omega_1}.$$

Литература

1. Аршава Е.А., Янцевич А.А. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений. // Дифференциальные уравнения. - Минск, 1996. - Т.32, №10. - С. 1427-1428.

2. Аршава Е.А. Об одном классе интегральных уравнений со специальной правой частью. // Труды 5-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений": в двух томах. - Т.1. Математический анализ. - Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. - С. 25 - 29.

3. Аршава Е.А. Обращение интегральных операторов на основе обобщенных коммутационных соотношений. // Материалы Воронежской зимней математической школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". - Воронежский государственный университет, 2011.- С.19-24.

4. Аршава Е.А. Обращение векторных интегральных операторов. // Материалы Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач". - Воронежский государственный университет, 2011 .- С.16-21.

5. Аршава Е.А. Обращение интегральных операторов на основе обобщенных коммутационных соотношений. // Материалы XIX Международной научно-технической конференции "Прикладные задачи математики и механики". - Севастополь, 2011. - С. 148-151.

Некоторые свойства одного класса весовых псевдодифференциальных операторов

А.Д. Баев

(Воронеж, ВГУ)

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t\in\mathbb{R}_+^1$, для которой $\alpha(+0)=\alpha^{/}(+0)=0$, $\alpha(t)>0$ при $t>0$, $\alpha(t)=const$ для $t\geq d$ при некотором $d>0$. Рассмотрим интегральное преобразование $F_\alpha\left[u(t)\right](\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{\left(i\eta\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)}\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$, определенное первоначально, например, на функциях $u(t)\in C_0^\infty\left(\mathbb{R}_+^1\right)$. Преобразование F_α связано с преобразованием Фурье $F_{\tau\to\eta}$ следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, где $u_\alpha(\tau)=\sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t=\varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)=\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(\mathbb{R}^1)}=\sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^1)}$,что даёт возможность расширить преобразование F_α до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(\mathbb{R}^1)$ и $L_2(\mathbb{R}_+^1)$, и рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(\mathbb{R}^1)$ на $L_2(\mathbb{R}^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$.

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, ...,$ где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\ \ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0, 1]$ такое, что $\left|\alpha^{/}(t)\alpha^{-\nu}(t)\right| \le c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha\,(t) \in C^{s_1}\,[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 = s_1(\nu)$.

С помощью преобразования F_α и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$, $x \in \mathbb{R}^1$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле $K\,(x, t, D_x, D_{\alpha,t})\, v\,(x, t) = F^{-1}_{\xi\to x} F_\alpha^{-1}\,[\lambda\,(x, t, \xi, \eta)\, F_\alpha F_{x\to\xi}\,[v\,(x, t)]]$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda\,(x, t, \xi, \eta)$ принадлежит классу символов $S^\sigma_\alpha(\Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $\Omega \subseteq (0; +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $t \in (0; +\infty)$, $\xi \in \mathbb{R}^1$, $\eta \in \mathbb{R}^1$, если $\lambda\,(x, t, \xi, \eta) \in C^\infty\,(\Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)$ и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^\tau}{\partial x^\tau}\left(\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \frac{\partial^l}{\partial \xi^l}\frac{\partial^p}{\partial \eta^p}\lambda\,(x, t, \xi, \eta)\right| \le c_{\tau,m,l,p}\left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}(\sigma-l-p)},$$

где $\tau, m, l, p = 0, 1, 2, ...$; $c_{\tau,m,l,p} > 0$ - некоторые константы, не зависящие от x, t, ξ, η, σ.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(\mathbb{R}^2_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x, t)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x, t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть$\sigma, s \in \mathbb{R}^1$, $v\,(x, t) \in H_{s+\sigma,\alpha}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$; $\partial^l_t v\,(x, t) \in H_{s+\sigma,\alpha}(\mathbb{R}^2_+)$, $l = 1, 2, ...$; $\lambda\,(x, t, \xi, \eta) \in S^\sigma_\alpha$. Тогда при выполнении условия (1) для оператора

$$M_{l,\sigma} = \frac{\partial^l_t}{\partial t^l}K^{(\sigma)}\,(x, t, D_x, D_{\alpha,t}) - K^{(\sigma)}\,(x, t, D_x, D_{\alpha,t})\,\frac{\partial^l_t}{\partial t^l}$$

справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{s,\alpha} \le c\left(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial^j_t v\right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial^j_t v\right\|_{s+\sigma,\alpha}\right),$$

где константа $c > 0$ не зависит от v.

Теорема 2. Пусть $q > 1$, $s \ge 0$ - действительные числа, $v\,(x, t) \in H_{s+lq+\sigma,\alpha,q}\left(\mathbb{R}^2_+\right)$. Пусть выполнено условие (1) при $\sigma = s + q$; $\lambda\,(x, t, \xi, \eta) \in S^\sigma_\alpha$. Тогда для оператора $M_{l,q}$, справедлива оценка

$$\|M_{l,q}v\|_{s,\alpha,q} \le c\left(\|v\|_{s+lq+\sigma-1,\alpha,q} + \|v\|_{s+(l-1)q+\sigma,\alpha,q}\right)\ ,\ \ l = 0, 1, 2, ...$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от v.

Теорема 3. Пусть $q > 1$, σ – действительные числа, $v(x, t) \in H_{s+\sigma,\alpha,q}(\mathbb{R}^2_+)$. Пусть символ $\lambda(x, t, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу S^σ_α, $\sigma \in \mathbb{R}^1$. Тогда при выполнении условия (1) справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(x, t, D_x, D_{\alpha,t})v(x, t) = \lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(x, 0, D_x, 0)v(x, t) =$$
$$= \lim_{t\to+0} F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(x, 0, \xi, 0)F_{x\to\xi}[v(x, t)]].$$

Теорема 4. Пусть выполнено условие (1) и символ $\lambda(x,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(x,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу S^{σ}_{α}, $\sigma \in \mathbb{R}^1$. Пусть функция $v(x,t)$ такова, что функция $D^N_{\alpha,t}v(x,t)$ при всех $x\in\mathbb{R}^1$ принадлежит, как функция переменной t пространству $L_2(\mathbb{R}^1_+)$ при некотором $N\in[\max\{\sigma+1,1\};s_1]$, где s_1 определено в условии 1.

Пусть $\lim\limits_{t\to+\infty} D^j_{\alpha,t}v(x,t)=0$ при всех $x\in\mathbb{R}^{n-1}$, $j=0,1,2,...,N-1$. Тогда при всех $x\in\mathbb{R}^1$ справедливо равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t)=0$.

Разностные схемы для третьей краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка в многомерной области

А.К. Баззаев

(Владикавказ, СОГУ; alexander.bazzaev@gmail.com)

Постановка задачи

В цилиндре $Q_T=G\times[0<t\leqslant T]$, основанием которого является p - мерный прямоугольный параллелепипед $G=\{x=(x_1,x_2,\ldots,\ x_p):0<x_\beta<\ell_\beta,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,p\}$ с границей Γ, $\overline{G}=G\cup\Gamma$ рассматривается третья начально - краевая задача:

$$\partial^{\alpha}_{0t}u=Lu+f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta}=\varkappa_{-\beta}(x,t)u-\mu_{-\beta}(x,t),\ x_\beta=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ -k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta}=\varkappa_{+\beta}(x,t)u-\mu_{+\beta}(x,t),\ x_\beta=\ell_\beta,\ 0\leqslant t\leqslant T,\end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu=\sum_{\beta=1}^{p}L_\beta u,\ L_\beta u=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right),$$

$$0<c_0\leqslant k_\beta\leqslant c_1,\ \varkappa_{\pm\beta}\geqslant\varkappa^*>0,$$

$\partial^{\alpha}_{0t}u=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\dfrac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta$ — регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля (дробная производная Капуто) порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$ [1],

$\dot u=\dfrac{\partial u}{\partial t},\ c_0,\ c_1$ — положительные постоянные, $\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ \overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) — (3) обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

Разностная схема

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_β с шагом $h_\beta=\ell_\beta/N_\beta,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p$:

$$\overline{\omega}_h=\{x_i=(i_1h_1,\ldots,\ i_ph_p)\in G,\ i_\beta=0,1,\ldots,N_\beta\}.$$

На отрезке $[0,T]$ также введем равномерную сетку с шагом $\tau=T/j_0$:

$$\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\ldots,\ j_0\}.$$

В работе [2] предложен дискретный аналог дробной производной порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$.

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{t_{j+1}}\frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t_{j+1}-\eta)^\alpha}d\eta=\Delta^\alpha_{0t_{j+1}}u+O\left(\tau/p\right), \tag{4}$$

где

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+1}}u=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t^{1-\alpha}_{j-s+1}-t^{1-\alpha}_{j-s}\right)u^{s/p}_{\overline{t}},\ u^s_{\overline{t}}=\frac{u^{s+1}-u^s}{\tau}.$$

Разностный аналог задачи (1) — (3) имеет вид:

$$\begin{gathered}\Delta^\alpha_{0t_{j+1}}y=\overline{\Lambda}y^{j+1}+\Phi,\\ y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G},\end{gathered}\tag{5}$$

где

$$\overline{\Lambda}y=\begin{cases}\Lambda y=\sum\limits_{\beta=1}^{p}(a_\beta y_{\overline{x}_\beta})_{x_\beta},\ x_\beta\in\omega_h,\\ \Lambda^- y=\dfrac{a^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}-\varkappa_{-\beta}y_0}{0.5h_\beta},\ x_\beta=0,\\ \Lambda^+_\beta y^{(\beta)}=-\dfrac{a^{(N_\beta)}y_{\overline{x}_\beta,N_\beta}+\varkappa_{+\beta}y_{N_\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta=\ell_\beta,\end{cases}$$

$$\Phi=\begin{cases}\varphi,\ x_\beta\in\omega_h,\\ \overline{\mu}_{-\beta},\ x_\beta=0,\\ \overline{\mu}_{+\beta},\ x_\beta=\ell_\beta,\end{cases}$$

$$\overline{\mu}_{-\beta}=\frac{\mu_{-\beta}}{0.5h_\beta}+f_{\beta,0},\quad \overline{\mu}_{+\beta}=\frac{\mu_{+\beta}}{0.5h_\beta}+f_{\beta,N_\beta}.$$

Устойчивость разностной схемы

На основании принципа максимума ([4], с. 226) для решения разностной задачи (5) получена априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_C\leqslant\|u_0\|_C+\frac{1}{\varkappa^*}\max_{0<t'\leqslant j\tau}\bigg(|\overline{\mu}_{-\beta}(x,t')|+|\overline{\mu}_{+\beta}(x,t')|\bigg)+$$

$$+\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha\max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|\varphi^s\|. \tag{6}$$

Сходимость разностной схемы

Для погрешности $z = y - u$ справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant \Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^{j} \tau^\alpha \max_{0 \leqslant s \leqslant j'} \|\psi^s\|. \qquad (7)$$

Так как $\psi = O(\tau + |h^2|)$, $|h^2| = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2$, то из (7) следует

$$\|z^{j+1}\|_C = O\left(\frac{|h^2|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^\alpha\right).$$

При $\alpha \to 1$, как и в [2], получаем известный результат

$$\|z^{j+1}\|_C = O\left(\tau + |h|^2\right).$$

Литература

1. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

2. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. №10. С.1871-1881.

3. Лафишева М.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. №10. С.1878-1887.

4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

5. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

Краевая задача Римана – Гильберта для эллиптических систем с главной положительно однородной правой частью

С. Байзаев

(Сибай, Сибайский институт БашГУ; baisat54@rambler.ru)

Пусть $C-$ комплексная плоскость, $\Pi-$ полуплоскость $Re(z) > 0$, $G-$ единичный круг, а $\Gamma-$ его граница.

Постановка задачи. *Найти решение из класса $C^1_\alpha(G) \cap C_\alpha(\overline{G})$ квазилинейной эллиптической системы*

$$w_{\overline{z}} = Q(z,w) + f(z,w), \qquad (1)$$

удовлетворяющее краевому условию

$$Re[\overline{\lambda(t)} w(t)] = c(t), t \in \Gamma. \qquad (2)$$

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия: функции $Q, f-$ непрерывны по Гёльдеру по совокупности переменных $(z,w) \in \overline{G} \times C$, $Q-$ положительно однородная по w порядка $m > 1$, f принадлежит классу

$$\Phi_m = \{f(z,w) : |f(z,w)| \leq \varepsilon(|w|^m), \varepsilon(r) = o(r), r \to \infty\},$$

функции $\lambda(t), c(t)$ непрерывны по Гёльдеру на Γ и $|\lambda(t)| \equiv 1$. В системе (1) меняя функцию f в классе Φ_m, мы получим семейство задач, для которых справедлива следующая теорема об априорной оценке.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия: а) система*

$$w_{\overline{z}} = Q(z_0, w)$$

для любого $z_0 \in \overline{G}$ не имеет ненулевых ограниченных на всей плоскости решений; б) задача

$$u_{\overline{z}} = -\overline{t_0} Q(t_0, u), z \in \Pi,$$
$$Re[\overline{\lambda(t_0)} u(t)] = 0, t \in L = \partial \Pi$$

для любого $t_0 \in \Gamma$ не имеет ненулевых ограниченных на Π решений. Тогда существует такая постоянная R, независящая от функции f, что для решений всех задач (1), (2) справедлива априорная оценка

$$\|w\|_{C(\overline{G})} \le R. \tag{3}$$

Сведение задачи к интегральному уравнению. Приведем краевую задачу (1), (2) к каноническому виду. Пусть $n-$ индекс функции $\lambda(t)$ относительно окружности $S^1 = \{t : |t| = 1\}$, $\theta(t)-$ одна из непрерывных ветвей функции $\mathbf{arg}\lambda(t)$. Через $p(z)$ обозначим аналитическую в круге G функцию, непрерывную в $\overline{G}$ и удовлетворяющую условию

$$Re[p(t)] = \sigma(t), t \in \Gamma,$$

где $\sigma(t) = \theta(t) - n\psi, \psi = \mathbf{arg} t$. Например, такую функцию можно взять в виде интеграла Шварца [1]:

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\sigma(t)(t+z)dt}{t(t-z)}.$$

Пусть $w(z)-$ решение задачи (1), (2). Тогда функция

$$\omega(z) = exp\{-ip(z)\} w(z) \tag{4}$$

будет решением системы

$$\omega_{\overline{z}} = F(z, \omega), \tag{5}$$

где $F(z, \omega) = e^{-ip}\{Q(z, e^{ip}\omega) + f(z, e^{ip}\omega)\}$ и удовлетворять краевому условию

$$Re[t^{-n}\omega(t)] = c_1(t), t \in \Gamma, \tag{6}$$

где $c_1(t) = exp\{ip(t)\}c(t)$. Формула (4) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решениями задачи (1), (2) и задачи (5), (6). Поэтому, если для решений краевой задачи (1), (2) имеет место априорная оценка (3), то для решений краевой задачи (5), (6) будет справедлива оценка

$$\|\omega\|_{C(\overline{G})} \le Rq, \tag{7}$$

где $q = exp\{maxp_2(z)\}$. Заметим, что правая часть уравнения (5) представляется в виде $F = Q_1 + f_1$, где Q_1 и f_1 удовлетворяют всем требованиям, которым удовлетворяли функции P и f соответственно. Пусть $n \ge 0$. Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение

$$\omega(z) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{G}\int \{\frac{F[\zeta, \omega(\zeta)]}{\zeta - z} + \frac{z^{2n+1}\overline{F[\zeta, \omega(\zeta)]}}{1 - \overline{\zeta} z}\} d\xi d\eta = \Phi(z), \tag{8}$$

где $\zeta = \xi + i\eta, z \in G, \Phi(z)-$ аналитическая в G и непрерывная в $\overline{G}$ функция, удовлетворяющая условию

$$Re[t^{-n}\Phi(t)] = c_1(t), t \in \mathit{\Gamma}. \tag{9}$$

Как известно [1], интегральный оператор

$$P_n g = -\frac{1}{\pi}\int\limits_G\int\{\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2n+1}\overline{g(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}\}d\xi d\eta$$

является вполне непрерывным в пространстве $C(\overline{G})$ и удовлетворяет условиям:

$$\partial_{\overline{z}}(P_n g) = g(z), z \in G, Re[t^{-n}P_n g] = 0, t \in \mathit{\Gamma}.$$

Используя оператор P_n интегральное уравнение (8) можно записать в виде

$$\omega - T\omega = \Phi(z), \tag{10}$$

где $T\omega = P_n F[\zeta, \omega(\zeta)]-$ вполне непрерывный оператор, удовлетворяющий условиям:

$$\partial_{\overline{z}}(T\omega) = F[z, \omega(z)], Re[t^{-n}T\omega] = 0, t \in \mathit{\Gamma}.$$

Через B обозначим множество решений задачи (5), (6), через $M_\Phi-$ множество решений уравнения (10), а через $A-$ множество аналитических в G и непрерывных в $\overline{G}$ функций, удовлетворяющих условию (9). Справедлива следующая

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$B = \bigcup M_\Phi, \Phi \in A.$$

Нули вполне непрерывного в $C(\overline{G})$ векторного поля $\Psi\omega = \omega - T\omega - \Phi(z)$ являются решениями задачи (5), (6). В силу априорной оценки (7) векторное поле Ψ на сферах S_r достаточно больших радиусов r пространства $C(\overline{G})$ невырождено. Вращение $\gamma(\Psi, S_r)$ поля Ψ на сфере S_r выражается через прямые характеристики функций Q и λ. Отличие от нуля вращения $\gamma(\Psi, S_r)$ гарантирует существование нуля поля Ψ, т.е. решения задачи (5), (6) и тем самым решения задачи (1), (2).

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. –М.: Наука. 1988. – 509 с.

Об аналитической сложности однородных функций

В.К. Белошапка
(Москва, МГУ; vkb@strogino.ru)

Дихотомия “простота” <—> ”сложность” - одна из основных в математике, как древней, так и современной. Эта тема является ведущей для таких областей как теории Лиувилля и Галуа, теорема Геделя, 7-я и 13-я проблемы Гильберта, проблемы разрешимости и вычислимости, оценки сложности алгоритмов, P-NP-проблематика, квантовые вычисления и т.д. Почти любая ветвь современной математики имеет свою точку зрения на проблему простоты-сложности. Такие характеристики, как степень многочлена, размерность пространства, род кривой можно понимать, как некоторые характеристики сложности тех или иных объектов. В работе [1] была предложена некоторая мера сложности, позволяющая измерять сложность аналитических функций двух переменных "по модулю" аналитических функций одного переменного.

А именно, сложность аналитических функций двух переменных можно оценивать по принадлежности классам, определяемым индуктивно

$$Cl_0 \subset Cl_1 \subset Cl_2 \subset \dots,$$

где Cl_0 - это аналитические функции одного переменного (x или y), Cl_1 - функции вида $c(a(x)+b(y))$, далее Cl_{n+1} состоит из функций вида $C(A_n(x,y)+B_n(x,y)$, где C - функция одного переменного, а A_n и B_n - функции из Cl_n. Если функция принадлежит $Cl_n \setminus Cl_{n-1}$, то говорим, что ее сложность равна n. А если она не попала ни в один из этих классов, то говорим, что ее сложность равна бесконечности. Отметим, что замена базовой операции, сложения, на любую другую арифметическую операцию дает те же самые классы.

Вот *маленькое эссе* на тему аналитической сложности. Пусть функция $z(x,y)$ - однородна, степени n, тогда

$$z(x,y) = x^n P(y/x).$$

В силу этого представления класс сложности z не выше 2. Зададимся вопросом, какие однородные функции имеют первый класс сложности? Ответ не трудно получить, т.к. имеется дифференциальный критерий попадания в первый класс (см.[1])

$$\delta_1(z) = (ln(z'_x/z'_y))''_{xy} = 0.$$

Поскольку возведение в степень - это функция одного переменного, то достаточно решить этот вопрос для однородных функций с показателем однородности n равным единице. Если при $n=1$ подставить наше выражение в это уравнение, то получится следующее уравнение на $P(t)$.

$$tP'P'''P - 2t(P'')^2P + t(P')^2P'' + PP'P'' = 0$$

Это уравнение можно решить и ответ следующий

$$P(t) = exp(C + \int \frac{dt}{A+t+B\ ln(t)}).$$

Если $B=0$, то интеграл (первообразная) - это логарифм и мы получаем,

$$z = (ax+by)^n,$$

что является вполне ожидаемым ответом. Если $B \neq 0$, то константу A можно убрать растяжением по t. В результате общее решение выражается через функцию

$$P_B(t) = \int \frac{dt}{t+B\ ln(t)}.$$

Если $B \neq 0$, то это не элементарная функция и возникает ряд вопросов.
- Нет ли этой функции в списке специальных функций?
- Какие функции a, b и c входят в запись однородной функции z первого класса сложности ?
- Как в это семейство попадают мономы $x^\alpha y^\beta$?

Таких вопросов в этой теории - великое множество, небольшая их часть будет затронута в докладе. Вот еще примеры таких, на первый взгляд, простых вопросов:
- какова сложность многочлена $z = x + 2x^2y + 3x^3y^4$ - два или три?
- какова сложность решения уравнения $z^3 + xz^2 + yz + 1 = 0$?
- написать дифференциальный критерий принадлежности функции второму классу.

Литература

1. Beloshapka V.K., Analytic Complexity of Functions of Two Variables, Russian Journ. of Mathematical Physics, vol.14, N 3, 2007, pp. 243-249.

Исследование фрактальных структур, моделируемых рандомизированными системами итерированных функций

Т.Я. Бирючинская
(Воронеж, ВГАУ; grinch.2002@mail.ru)

Существуют различные методы построения фрактальных множеств. Одним из наиболее простых и легко реализуемых в рамках информационных технологий является метод, основу которого составляют системы итерированных функций (РСИФ). Для конкретной реализации РСИФ нами были предложены два подхода [1]. Первый ($F1$) связан с итеративным выполнением процедуры пересчёта координат точек фрактала, а второй подход ($F2$) построения фрактального множества является обобщением задачи об определении суммы ряда со случайной расстановкой знаков.

Как показано в [1], оба эти подхода являются в некотором смысле эквивалентными с учётом вероятностного характера выполнения процедур. В результате реализации данных подходов будет построено множество точек $E_n = \{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\}$, которое будем называть предфракталом.

Исследуя вопросы сходимости указанной РСИФ, следует особо оговаривать, имеем ли мы дело с актуальной бесконечность, т.е. уже состоявшейся и реализованной, или бесконечность рассматривается как потенциальная, т.е. как возможность в принципе продолжать вычисления как угодно долго. Другими словами, результат исследования в некоторой степени будет определяться тем, с каких позиций проводится анализ — используется ли конструктивный подход, или рассмотрение проходит в рамках классического анализа. Предлагаемый нами подход, при котором учитываются обе различные точки зрения, описывает поведение системы в тех крайне важных с практической точки зрения условиях, когда решение перестает зависеть от начальных и граничных условий, но система ещё далека от предельных состояний. Таким образом, получаемые в ходе реализации РСИФ множества — это некоторое промежуточно-асимптотическое решение.

Исследуя вопросы сходимости указанной РСИФ, можно показать, что $\{X_n\}$ не является фундаментальной, и, следовательно, не имеет определённого предела в классическом понимании этого значения. Данную последовательность можно отнести к последовательностям шпеккеровского типа [3].

Так же можно показать, что множество точек, получаемых в результате выполнения процедуры $F1$, может быть гомеоморфно отображено в C-множество (классическое канторово множество). Таким образом, мы имеем предфрактал — множества $E_n = \{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\}$, получаемые в ходе выполнения процедур, как $F1$, так и $F2$, будут счётным, в то время как предельное множество $X = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ будет иметь мощность континуума. Для доказательства приведённого выше утверждения следует воспользоваться диагональным методом Кантора.

Рассмотрение вопроса о разрешимости фрактального множества точек будет заключаться в том, чтобы по заданной точке $\hat{X}$ можно было бы решить вопрос о её принадлежности множеству $\bar{X}$, т.е. определить является ли множество $\bar{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ разрешимым. Для определения принадлежности точки $\hat{X}$ к множеству $\bar{X}$ удобно считать, что $\hat{X}$ получена в ходе выполнения процедуры $F2$. В этом случае следует воспользоваться следующим представлением

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{K} a_i Z_i, \quad \text{где} \quad \forall a_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{K} a_i = 1,$$

и показать, что для того, чтобы набор $a = \{a_i\}$ был набором, полученным посредством $F2$, необходимо и достаточно, чтобы среди его элементов существовал доминирующий элемент [2], т.е. такой элемент $a_j > \sum_{i=1, i\neq j}^{K} a_i$, величина которого превосходит сумму всех остальных.

Исследуя вопрос о совершенстве фрактальных множеств, следует показать, что полученное предельное множество является всюду плотным. Для этого покажем, что в любой ε-окрестности произвольно взятой точки X, принадлежащей предельному множеству, существует по крайней мере одна точка $X^* \neq X$, отличная от неё. Для удобства можно ограничиться случаем $X \in \mathbf{R}^1$, $X^* \in \mathbf{R}^1$. Тогда, чтобы X и X^* находились в ε-окрестности, должны выполняться следующие соотношения

$$\rho(X, X^*) = |X - X^*| = \left| \sum_{j=1}^{K} a_j Z_j - \sum_{j=1}^{K} a_j^* Z_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{K} (a_j - a_j^*) Z_j \right| < \varepsilon,$$

добиться которых всегда можно за счёт перенесения члена ряда, меньшего ε, из одного слагаемого a_j в другое a_i. Выполнение этого условия означает, что любая точка фрактального множества X является предельной точкой, а само множество X — совершенным.

Для практического использования предложенной процедурой требуется произвести оценку параметров рандомизированнных систем итерированных функций: $\{p_1, p_2, \ldots, p_K\}$, $Z = \{Z_j\}_{j=1}^{K}$ и μ.

Для оценивания параметров $\{p_1, p_2, \ldots, p_K\}$ предварительно производится некоторая классификация, т.е. разбиение множества X на попарно непересекающиеся подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_K$, такие, что $S_i \cap S_j = \varnothing$, для $i \neq j$ и $i = 1, 2, \ldots, P$. Выделенные в результате классификации наборы объектов $\{S_i\}$ следует рассмотреть как некоторые самоподобные реплики общего множества, численности которых будут пропорциональны вероятностям появления точек этих кластеров в исследуемой совокупности X. Таким образом, полагая $\hat{p}_j = \frac{n_j}{N}$ $\forall j$, $j = 1, 2, \ldots, K$, где n_j — число объектов класса S_j, можно будет рассматривать полученные значения $\hat{p}_j$ как статистические оценки набора $\{p_1, p_2, \ldots, p_K\}$.

Для оценивания параметра μ следует использовать методом моментов. Для удобства преобразований вводится следующее обозначение $\xi = \frac{1}{1+\mu}$. В этом случае процедуру $F1$ можно представить как последовательное выполнение действий $X_i = \xi X_{i-1} + (1 - \xi) Z_j^{(R)}$, $i = 1, 2, \ldots$ Находя начальные моменты первого порядка от обеих частей равенства и рассматривая вторые центральные моменты, получим следующий резуль-

тат
$$\xi = \frac{\mathbf{D}(Z) - \mathbf{D}(X)}{\mathbf{D}(Z) + \mathbf{D}(X)}.$$

Таким образом, если известны точки предфрактала X, заданы точки Z и распределение вероятностей $\{p_1, p_2, \dots, p_K\}$ на множестве этих точек, то можно определить величины $\mathbf{D}(Z)$ и $\mathbf{D}(X)$, а, следовательно, и значение параметра ξ. Не представляет большого труда получить оценку непосредственно самой величины μ. Легко видеть, что
$$\mu = \frac{2\mathbf{D}(X)}{\mathbf{D}(Z) - \mathbf{D}(X)}.$$

Литература

1. Буховец А.Г. Использование фрактальных моделей в задачах классификации / А.Г. Буховец, Е.А. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Системы управления и информационные технологии. 2009. №3.1(37). С.117–121.

2. Буховец А.Г. О разрешимости множеств, генерируемых рандомизированной системой итеративных функций / А.Г. Буховец, Т.Я. Бирючинская // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. Воронеж, 26–28 сентября 2011 г. ВГУ. С.90–93.

3. Буховец А.Г. О сходимости рандомизированных систем итеративных функций / А.Г. Буховец, Т.Я. Бирючинская // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011). Материалы IV международной научной конференции. Воронеж, 12–17 сентября 2011. С.49–50.

О спектре линейных отношений, заданных абстрактными граничными условиями[2]

В.М. Брук

(Саратов, СГТУ; vladislavbruk@mail.ru)

Линейным отношением $\mathcal{T}$ между банаховыми пространствами $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ называется любое линейное многообразие $\mathcal{T} \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$. Терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в [1]. Ниже использованы обозначения: $\{\cdot,\cdot\}$ – упорядоченная пара; $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ – область определения, $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ – область значений отношения $\mathcal{T}$; $\ker \mathcal{T}$ – множество таких элементов $x \in \mathbf{B}_1$, что пара $\{x, 0\} \in \mathcal{T}$; $\mathrm{Ker}\mathcal{T}$ – множество пар $\{x, 0\} \in \mathcal{T}$; $\rho(T)$ (при $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$) – резольвентное множество отношения T, т.е. множество точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых отношение $(T - \lambda E)^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором.

Пусть $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\tilde{\mathcal{B}}_1$, $\tilde{\mathcal{B}}_2$ – банаховы пространства, T – замкнутое линейное отношение, $T \subset \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$, $\delta : T \to \tilde{\mathcal{B}}_1 \times \tilde{\mathcal{B}}_2$ – линейный оператор. Обозначим $\delta_i = p_i\delta$, где p_i – естественная проекция $\tilde{\mathcal{B}}_1 \times \tilde{\mathcal{B}}_2$ на $\tilde{\mathcal{B}}_i$, $i = 1, 2$. Следующее определение для операторов дано в [2], а для отношений в [3].

Определение. Четверка $(\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mathcal{B}}_2, \delta_1, \delta_2)$ называется пространством граничных значений (ПГЗ) или граничной четверкой для замкнутого отношения T, если выполняются условия: (а) δ_1, δ_2 непрерывны на T (на T норма пространства $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$); (б) для любых элементов $x_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_1$, $x_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ существует такая пара $h = \{h_1, h_2\} \in T$, что $\delta_1 h = x_1$, $\delta_2 h = x_2$; (в) сужение δ_1 на $\mathrm{Ker}T$ является взаимно однозначным отображением на $\tilde{\mathcal{B}}_1$.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-01-00276

Оператор β_δ определим как обратный к сужению оператора δ_1 на Ker$T$, т.е. $\beta_\delta = (\delta_1|_{\mathrm{Ker}T})^{-1}$. Из условия (а) и из теоремы о замкнутом графике следует непрерывность β_δ. С граничной четверкой связан оператор $\Phi_\delta : \tilde{\mathcal{B}}_1 \to \tilde{\mathcal{B}}_2$, задаваемый равенством $\Phi_\delta = \delta_2\beta_\delta$. Оператор Φ_δ ограничен.

Обозначим $T_0 = \ker\delta$, $T_1 = \ker\delta_1$. Ясно, что $T_0 \subset T_1$. Замкнутость T и непрерывность операторов δ_1, δ_2 влекут замкнутость отношений T_0, T_1. Из свойства (в) следует, что отношение T_1^{-1} является оператором и $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T_1)$.

Из определения ПГЗ вытекает, что между отношениями $\widetilde{T}$ со свойством $T_0 \subset \widetilde{T} \subset T$ и отношениями $\theta \subset \tilde{\mathcal{B}}_1 \times \tilde{\mathcal{B}}_2$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\delta\widetilde{T} = \theta$. В этом случае пишем $\widetilde{T} = T_\theta$.

Пусть $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_2'$ – банаховы пространства и S – линейное отношение, $S \subset \mathfrak{B}_1' \times \mathfrak{B}_2'$. Рассмотрим следующие условия, приведенные в [1]: 1) S замкнуто; 2) $\ker S = \{0\}$; 3) $\dim\ker S < \infty$; 4) отношение S корректно; 5) $\ker S$ – замкнутое дополняемое подпространство в $\mathfrak{B}_1'$; 6) $\overline{\mathcal{R}(S)} = \mathcal{R}(S)$; 7) $\mathcal{R}(S)$ – замкнутое дополняемое в $\mathfrak{B}_2'$ подпространство; 8) $\mathcal{R}(S)$ – замкнутое подпространство в $\mathfrak{B}_2'$ конечной коразмерности; 9) $\mathcal{R}(S) = \mathfrak{B}_2'$; 10) отношение S непрерывно обратимо.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{R}(T) = \mathfrak{B}_2$. Отношение T_θ тогда и только тогда удовлетворяет условию k $(1 \leqslant k \leqslant 10,\ k \neq 5,\ k \neq 7)$, когда тому же условию удовлетворяет отношение $\theta - \Phi_\delta$. Если $\ker T$ допускает дополнение в $\mathfrak{B}_1$, то $\ker T_\theta$ и $\ker(\theta - \Phi_\delta)$ одновременно удовлетворяют условию $k = 5$. Пусть $k = 7$. Если $\mathcal{R}(T_\theta)$ – замкнутое дополняемое в $\mathfrak{B}_2$ подпространство, то $\mathcal{R}(\theta - \Phi_\delta)$ – такое же подпространство в $\tilde{\mathcal{B}}_2$; обратное утверждение верно, когда $\mathcal{R}(T_0)$ дополняемо в $\mathfrak{B}_2$.*

Пусть четверка $(\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mathcal{B}}_2, \delta_1, \delta_2)$ является граничной для отношения T. Если пара $\{y, f\} \in T$, то пара $\{y, f - \lambda y\} \in T - \lambda E$. Для всякой такой пары положим $\gamma(\lambda)\{y, f - \lambda y\} = \delta\{y, f\}$, $\gamma_k(\lambda) = p_k\gamma(\lambda)$.

Лемма 1. *Четверка $(\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mathcal{B}}_2, \gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda))$ тогда и только тогда является граничной четверкой для отношения $T - \lambda E$, когда $\lambda \in \rho(T_1)$.*

Обозначим $\Phi(\lambda) = \Phi_{\gamma(\lambda)} = \gamma_2(\lambda)(\gamma_1(\lambda)|_{\mathrm{Ker}(T-\lambda E)})^{-1}$

Теорема 2. *Пусть $\lambda \in \rho(T_1)$ и отношение $\theta \subset \tilde{\mathcal{B}}_1 \times \tilde{\mathcal{B}}_2$ замкнуто. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *область значений $\mathcal{R}(T_\theta - \lambda E)$ замкнута в том и только том случае, когда область значений $R(\theta - \Phi(\lambda))$ замкнута*;

2) $\dim\mathfrak{B}_1/\overline{\mathcal{R}(T_\theta - \lambda E)} = \dim\tilde{\mathcal{B}}_2/\overline{\mathcal{R}(\theta - \Phi(\lambda)}$;

3) $\dim\ker(T_\theta - \lambda E) = \dim\ker(\theta - \Phi(\lambda))$.

Следствие 1. *Пусть отношение θ замкнуто и $\lambda \in \rho(T_1)$. Для принадлежности точки λ точечному спектру $\sigma_p(T_\theta)$ отношения T_θ, необходимо и достаточно, чтобы $\ker(\theta - \Phi(\lambda)) \neq \{0\}$. Точка λ принадлежит остаточному спектру $\sigma_r(T_\theta)$ (непрерывному спектру $\sigma_c(T_\theta)$) тогда и только тогда, когда отношение $(\theta - \Phi(\lambda))^{-1}$ является неплотно определенным (плотно определенным и неограниченным) оператором. Точка λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(T_\theta)$ в том и только том случае, когда $(\theta - \Phi(\lambda))^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором.*

Пример. Пусть A – замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве H, являющийся производящим оператором полугруппы U класса C_0. Определим минимальный и максимальный операторы, порожденные в пространстве $\mathbf{B} = L_p(H; 0, b)$ $(b < \infty, p \geqslant 1)$ дифференциальным выражением $l[y] = y' - Ay$, следующим образом. На множестве сильно дифференцируемых функций y, принимающих значения в $\mathcal{D}(A)$

и таких, что $l[y] \in \mathbf{B}$, зададим оператор L' формулой $L'y = l[y]$. Замыкание L оператора L' назовем *максимальным* оператором. *Минимальный* оператор L_0 определим как сужение L на множество функций $y \in \mathcal{D}(L')$ со свойством $y(0) = y(b) = 0$.

Введем в H норму

$$\|x\|_- = \left(\int_0^b \|U(s)x\|^p \, ds \right)^{1/p} \leqslant k \, \|x\| \, , \;\; x \in H, \; k > 0.$$

Пополнение H по этой норме обозначим H_-. Из неравенства $\|U(t)x\|_- \leqslant k_1 \|x\|_-$ следует, что полугруппа U расширяется по непрерывности до полугруппы $\hat{U}$ класса C_0 в H_-.

Лемма 2. Область определения $\mathcal{D}(L)$ оператора L состоит из функций y, представимых в виде

$$y(t) = \hat{U}(t)x + \int_0^t U(t-s)f(s)ds,$$

где $x \in H_-$, $f \in \mathbf{B}$; при этом $Ly = f$.

Следствие 2. Оператор L_0 замкнут.

Введем в H еще одну норму

$$\|\tilde{x}\|_-^* = \left(\int_0^b \|U^*(b-s)\tilde{x}\|^q \, ds \right)^{1/q} \leqslant k_2 \, \|\tilde{x}\| \, , \;\; \tilde{x} \in H, \; k_2 > 0,$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (при $p = 1$ интеграл заменяется нормой $L_\infty(H; 0, b)$). Пополнение H по этой норме обозначим $\tilde{H}_-$.

Оператор $\tilde{x} \to U^*(b-t)\tilde{x}$ является непрерывным и взаимно однозначным отображением пространства $\tilde{H}_-$ в $\mathbf{B}^*$. Этот оператор обозначим V. Его область значений замкнута в $\mathbf{B}^*$ и ядро $\ker V = \{0\}$. Поэтому при $p > 1$ сопряженный оператор $V^* \colon \mathbf{B}^{**} = \mathbf{B} \to (\tilde{H}_-)^* \subset H^* = H$ имеет область значений, совпадающую с $(\tilde{H}_-)^*$. Обозначим $(\tilde{H}_-)^* = \tilde{H}_+$ (при $p = 1$ через $\tilde{H}_+$ обозначается $\mathcal{R}(V^*)$). Оператор V^* имеет вид $Vf = \int_0^b U(b-s)f(s)ds$ ($f \in \mathbf{B}$). Таким образом, оператор V непрерывно отображает $\mathbf{B}$ на $\tilde{H}_+$. Полагая $f(s) = \hat{U}(s)x$ ($x \in H_-$), получим, что $\hat{U}(b)$ непрерывно отображает H_- в $\tilde{H}_+$.

Введем на $\mathcal{D}(L)$ норму графика и определим граничные отображения $\gamma_1 \colon \mathcal{D}(L) \to H_-$, $\gamma_2 \colon \mathcal{D}(L) \to \tilde{H}_+$ равенствами $\delta_1 y = y(0)$, $\delta_2 y = y(b)$. Из предыдущих рассуждений следует, что четверка $(H_-, \tilde{H}_+, \delta_1, \delta_2)$ является граничной для оператора L; при этом $\Phi_\delta = \hat{U}(b)$ и $\ker \delta_1 \cap \ker \delta_2 = \mathcal{D}(L_0)$.

Пусть L_1 – сужение оператора L на множество функций, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$. Тогда $\rho(L_1) = \mathbb{C}$. Из леммы 1 и из следствия 1 получаем описание спектра отношения L_ϑ, где $\vartheta \subset H_- \times \tilde{H}_+$ – линейное отношение.

Теорема 3. *Пусть отношение ϑ замкнуто. Для принадлежности точки λ точечному спектру $\sigma_p(L_\vartheta)$ отношения L_ϑ, необходимо и достаточно, чтобы* $\ker(\vartheta - e^{\lambda b}\hat{U}(b)) \neq \{0\}$. *Точка λ принадлежит остаточному спектру $\sigma_r(L_\vartheta)$ (непрерывному спектру $\sigma_c(L_\vartheta)$) тогда и только тогда, когда отношение $(\vartheta - e^{\lambda b}\hat{U}(b))^{-1}$ является неплотно определенным (плотно определенным и неограниченным) оператором. Точка λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(L_\vartheta)$ в том и только том случае, когда $(\vartheta - e^{\lambda b}\hat{U}(b))^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором.*

Отметим, что близкие вопросы для операторов, порожденных семейством эволюционных операторов, рассматривались в [4]. Отметим также, что спектр линейных отношений, порожденных выражением l и неотрицательной операторной функцией, изучался в [3].

Литература

1. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Известия РАН, Серия матем. Т. 73. №2. 2009. С. 3–68.

2. Брук В. М. Об обратимых сужениях замкнутых операторов в банаховых пространствах // Функциональный анализ. № 28. Ульяновск: Ульяновский пединститут, 1988. С. 17–22.

3. Брук В. М. О спектре линейных отношений, связанных с равномерно корректными задачами // Дифференциальные уравнения. Т. 43. № 1. 2007. С. 21–27.

4. Диденко В. Б. Об обратимости и фредгольмовости операторов, порожденных семейством эволюционных операторов и краевыми условиями, заданными с помощью линейного отношения // Вестник ВГУ. № 2. 2008. С. 71–74.

Об одной краевой задаче в полосе для эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе в уравнение третьего порядка

С.С. Бунеев

(Елец, Елецкий государственный университет)

Краевые задачи для уравнений с вырождением относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Главная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [1]. В работе В.П. Глушко [2] были получены априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [3]-[4] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В данной работе получена априорная оценка и теорема о существовании и единственности решения краевой задачи в полосе для уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе в уравнение третьего порядка по одной из переменных.

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$- некоторое число, рассматривается уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t). \tag{1}$$

Здесь

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + \partial_t^3 v,\ L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\le 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ - комплексные числа, $Im\, a_{02m} = 0$.

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t=0$ полосы R_d^n задается условие вида

$$B(D_x)\,v|_{t=0}=\sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau D_x^\tau\,v|_{t=0}=G(x) \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами b_τ.

На границе $t=d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d}=\partial_t\,v|_{t=d}=...=\partial_t^{m-1}\,v|_{t=d}=0. \tag{3}$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta)\in R^n$ справедливо неравенство $ReL_{2m}(\xi,\eta)\ge c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m$, где постоянная $c>0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s\ge 2m+m^*$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0)=\alpha'(0)=0$, $\alpha(t)>0$ при $t>0$.

Условие 3. $B(\xi)\ne 0$ при всех $\xi\in R^{n-1}$.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)-(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$ ($s\ge 0$ - действительное число) состоит из тех функций $v(x,t)\in S'$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m}=\{\sum_{l=0}^{[\frac{3s}{2m}]}\left\|F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{3}l)}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\right\|_{L_2(R_d^n)}^2\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{3s}{2m}]$ - целая часть числа $\frac{3s}{2m}$.

Если s - целое неотрицательное число такое, что число $\frac{3s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q}=\{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}l\le s}\left\|D_x^\tau D_{\alpha,t}^j\partial_t^l v\right\|_{L_2(R_d^n)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2. Пространство $H_s(R^{n-1})$ (s- действительное число) состоит из всех функций $u(x)\in L_2(R^{n-1})$, для которых конечна норма

$$\|u\|_s=\left\|F_{\xi\to x}^{-1}[(1+|\xi|)^s F_{x\to\xi}[u(x)]]\right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $s\ge\max\{2m,\ m^*+m\}$ - целое число и выполнены условия 1 - 3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1) - (3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,m}\le c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,m}+\|B\,v|_{t=0}\|_{s-m^*-\frac{m}{3}}),$$

где постоянная $c>0$ не зависит от v.

Теорема 2. Пусть $s\ge\max\{2m,\ m^*+\frac{m}{3}\}$ - целое число и выполнены условия (1) - (3). Пусть $F(x,t)\in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$, $G(x)\in H_{s-m^*-\frac{m}{3}}(R^{n-1})$. Тогда существует единственное решение $v(x,t)$ задачи (1) - (3), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,m}(R_d^n)$.

Литература

1. Вишик М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. – 1970. – Т. 25, вып. 4. – С. 29-56.

2. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048 – 79.

3. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

4. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка/А. Д. Баев // Доклады Академии наук, 2008, т. 422, №6, с. 727 – 728.

Оценка точности аппроксимации многомерных данных рандомизированной системой итеративных функций

А.Г. Буховец, Т.Я. Бирючинская, П.В. Москалев
(Воронеж, ВГАУ; abuhovets@mail.ru)

Рандомизированные системы итеративных функций (РСИФ) представляют собой одно из наиболее значительных достижений теории фракталов. Математические аспекты этого направления первоначально были развиты Хатчинсоном в [1].

Построение фрактального множества является результатом итеративного выполнения следующей процедуры [2]. Начиная с произвольно выбранной точки x_0 последовательно выполняются вычисления координат следующей точки по формуле

$$x_1 = \frac{x_0 + \mu z_j^{(1)}}{1+\mu}, \tag{1}$$

где $\mu \geq 1$ — заданный параметр, z_j — выбранная согласно распределению $p_j = \mathbf{P}\{z_j\}$ точка из множества $Z = \{z_j\}$ для $j = 1, 2, \ldots, K$.

В результате выполнения процедуры (1) будет получено множество точек $\{X_n\}$, обладающее такими свойствами, как наличие дробной (фрактальной) размерности и самоподобие отдельных его фрагментов целому множеству Z. Все эти свойства хорошо заметны на компьютерных реализациях данной схемы, обсуждавшихся нами в докладе [2]. Весьма примечательно, что в зависимости от значений параметра μ эти реализации способны формировать не только псевдофрактальные, но и псевдослучайные распределения, показанные на рис. 1, соответственно, справа и слева.

Кроме этого, как показано в [3], построение фрактального множества можно организовать и посредством другой процедуры: в соответствии с заданным распределением $p_j = \mathbf{P}\{z_j\}$ для $j = 1, 2, \ldots, K$ вычисляются K сумм, образованных из элементов абсолютно сходящегося ряда вида

$$\mu \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\mu)^s} = 1.$$

Получаемые K значений сумм записываются в строку как элементы матрицы $A = ||a_{ij}||_{N\times K}$, где N — число требуемых точек, K — число точек множества Z. После этого матрица, содержащая точки фрактала, определяется как произведение $X = A \times Z$.

Полученные в результате выполнения процедур множества будут обладать следующими свойствами [4].

1. Каждое множество будет вполне несвязно. Наличие этого свойства объясняется тем, что среди элементов такого множества не может быть множеств, имеющих отличную от нуля лебегову меру, т.е. множество представляет собой объединение отдельных одноточечных множеств.

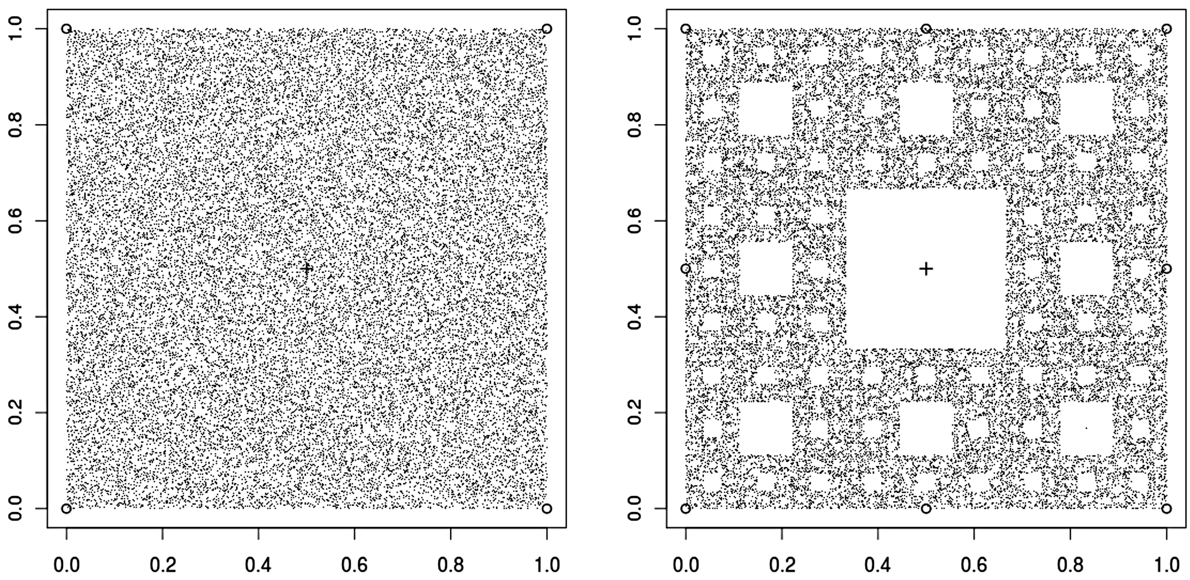


Рис. 1. Реализации рандомизированной системы итеративных функций (1) для $x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ после 30000 итераций при: а) $Z = \{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)\}$, $\mu = 1$ (слева); б) $Z = \{(0,0), (\frac{1}{2}, 0), (1,0), (1, \frac{1}{2}), (1,1), (\frac{1}{2}, 1), (0,1), (0, \frac{1}{2})\}$, $\mu = 2$ (справа)

2. Множество X может быть гомеоморфно отображено на канторово множество. Практически это означает, что существует взаимно однозначное соответствие между канторовым множеством (или его правильным подмножеством) и множеством, полученным при выполнении указанной ранее процедуры.

3. Построенные множества имеют сингулярную функцию распределения, т.е. такую функцию распределения, которая является непрерывной и монотонно возрастающей, но при этом имеют плотность распределения почти везде раной нулю.

В качестве одного из возможных практических применений нами были рассмотрены вопросы аппроксимации структур многомерных данных в классификационных задачах [5]. Главным достоинством, на наш взгляд, является то, что в рамках данного подхода воспроизводится непосредственно сама структура, а не производится её аппроксимация, например, гиперплоскостью, как в случае регрессионного анализа. Другими словами, воспроизводится совокупность точек множества X вместе с теми лакунами (пропусками), которые имеют место в массивах реальных данных.

Для аппроксимации множества точек протофрактала предположим, что на множестве исходных данных X проведена классификация, результаты которой представлены в виде сведений о составах классов и относительных численностях выделенных классов. Получив оценку параметра μ на основе эмпирических данных можно будет на построить матрицу A в соответствии со вторым правилом формирования фрактальных множеств.

После того, как будет сформирована матрица A, общее решение задачи аппроксимации будет представлено в виде соотношения

$$Z = A^{+}Y = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}Y,$$

где $A^+ = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ — матрица обобщённого преобразования Мура–Пенроуза. Поскольку матрица A имеет полный ранг по столбцам, то матрица преобразования Мура–Пенроуза A^+ существует и единственна.

Можно показать, что построенное обобщённое решение обеспечивает ортогональность вектора невязки $AZ-Y$ образу матрицы A и имеет минимальную длину вектора невязки $AZ-Y$, что минимизирует сумму

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{P}\left(y_{ij} - \sum_{s=1}^{K} a_{is}z_{sj}\right)^2.$$

Другими словами, полученная оценка является наилучшей в смысле среднеквадратичного отклонения от эмпирических данных. Правда, при этом стоит уточнить, что речь идёт о выбранных выше оценках параметров рандомизированной системы итерированных функций.

По сути дела в данном случае задача аппроксимации сводится к построению некоторого оператора A^+, определённого на множестве Y со значениями в множестве Z. При этом образ оператора A^+ составляют точки протофрактала Z. Матрицей такого оператора в базисе признакового пространства R^P будет построенная матрица A^+.

Литература

1. Hutcthinson J.E. Fractals and Self Similararity // Indiana University Mathematics Journal. Vol. 30. No.5. 1981. P.713–747.

2. Буховец А.Г. О сопоставлении решений краевых задач с аттракторами систем итеративных функций / А.Г. Буховец, В.В. Шитов, П.В. Москалев, Т.Я. Бирючинская // Современные методы теории краевых задач: Материалы воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXI». Воронеж: ВГУ, 2010. С.47–48.

3. Буховец А.Г. Моделирование фрактальных структур данных / А.Г. Буховец, Е.А. Буховец // Системы управления и информационные технологии. №3(33). 2008. С.4–7.

4. Буховец А.Г. Использование фрактальных моделей в задачах классификации / А.Г. Буховец, Т.Я. Бирючинская, Е.А. Буховец // Системы управления и информационные технологии. 2009. №3.1(37), С.117–121.

5. Буховец А.Г. Аппроксимация многомерных данных фрактальными множествами // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сб. трудов международной конференции. Воронеж, ВГУ, 2009. Ч.1. С.81–84.

Об одном классе уравнений Ньютона-Нельсона на расслоенных пространствах со связностью

Н.В. Винокурова
(Курск; vinoknata@mail.ru)

Стохастическая механика Нельсона – это математическая теория, основанная на классической физике, но дающая те же предсказания, что и квантовая механика для широкого класса задач, в которых и та, и другая теории применимы. Одной из главных отличительных черт стохастической механики является то, что в ней квантуется второй закон Ньютона, а не уравнения Гамильтона или Лагранжа.

К настоящему времени на языке стохастической механики исследовано большое число задач квантовой теории. Однако не было осуществлено описание движения квантовой частицы в калибровочном поле, по-видимому, из-за того, что ранее не было известно описание классической частицы в калибровочном поле в терминах второго закона Ньютона. Стохастический аналог закона Ньютона известен как уравнение Ньютона-Нельсона. Такое описание было предложено Ю.Е. Гликлихом и П.С. Ратинером. На основе этого в настоящем докладе разрабатывается описание движения квантовой частицы в калибровочном поле в терминах стохастической механики.

Согласно основной идее стохастической механики, закон движения формулируется в терминах так называемых производных в среднем, которые определяются специальным образом так, что они оказываются инвариантными относительно преобразований Лоренца.

Определим для стохастического процесса $\xi(t)$ на многообразии $\mathcal{M}$ дифференциальный оператор D_2 который действует согласно правилу

$$D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t\to+0} E_t^{\xi}(\frac{(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))\otimes(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))}{\triangle t}). \tag{1}$$

D_2 буден называть квадратичной производной в среднем.

Для стохастичнеского процесса $\eta(t)$ в пространстве расслоения такого, что выполнится $\xi(t)=\pi\eta(t)$ на многообразии $\mathcal{M}$, ковариантные производные в среднем справа и слева вводим согласно формулам:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_+\eta(t) &= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E(\frac{\Gamma^{\pi}_{t,t+\Delta t}\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t} \mid \mathcal{N}_t^{\xi}, (\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2\leq 0)\\ &+\lim_{\Delta t\downarrow 0} E(\frac{\eta(t)-\Gamma^{\pi}_{t,t-\Delta t}\eta(t-\Delta t)}{\Delta t} \mid \mathcal{N}_t^{\xi}, (\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2\geq 0);\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_-\eta(t) &= \lim_{\Delta t\downarrow 0} E(\frac{\eta(t)-\Gamma^{\pi}_{t,t-\Delta t}\eta(t-\Delta t)}{\Delta t} \mid \mathcal{N}_t^{\xi}, (\xi(t)-\xi(t-\Delta t))^2\leq 0)\\ &+\lim_{\Delta t\downarrow 0} E(\frac{\Gamma^{\pi}_{t,t+\Delta t}\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t} \mid \mathcal{N}_t^{\xi}, (\xi(t+\Delta t)-\xi(t))^2\geq 0).\end{aligned} \tag{3}$$

Тогда уравнение Ньютона-Нельсона для $\eta(t)$ на векторном расслоении со связностью над лоренцевым многообразием, у которого стандартный слой является комплексным пространством принимает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{D}_+^Q\mathbf{D}_- + \mathbf{D}_-^Q\mathbf{D}_+)\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) * \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot, v^{\eta}(t))} \\ D_2\xi(t) = \frac{\hbar}{\mathrm{m}} I \end{cases} \tag{4}$$

В случае, когда связности на многообразии H^{τ} и в пространстве расслоения H^{π} стохастически полны и для $\overline{e(\eta(t)) * \tilde{\Phi}_{\eta(t)}(\cdot,\cdot)}$ выполнены некоторые граничные условия, получаем, что указанное выше уравнение Ньютона-Нельсона имеет решение и вдоль этого решения $\eta(t)$ заряд $e(\eta(t))$ постоянен.

Рассмотрен также частный случай, когда указанное многообразие является пространством Минковского.

Правая часть уравнения порождена формой кривизны связности. Получена теорема существования решения для этого уравнения. Для частного случая группы симметрий $\mathrm{U}(1)$ и расслоения с одномерным комплексным слоем исследована связь с квантовой электродинамикой.

Рассматривается также модельная задача, когда базой расслоения является риманово (а не лоренцево) многообразие, а стандартный слой является вещественным (а не комплексным) линейным пространством. Построено соответствующее уравнение Ньютона-Нельсона. Доказана теорема существования его решения при более простых предположениях, чем в случае лоренцева многообразия.

Литература

1. Yu.E. Gliklikh, “Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics”, Springer-Verlag London, 2011.

2. Gliklikh Yu.E., Vinokurova N.V. On the Description of Motion of a Quantum Particle in the Classical Gauge Field in the Language of Stochastic Mechanics // Communications in Statistics-Theory and Methods, 2011.- Vol. 40. DOI: 10.1080/03610926 .2011.581183 (in print)

О безусловной базисности всплесков типа Мейера в пространствах Бесова и Лизоркина-Трибеля

С.А. Гарьковская

(Воронеж; GarkovskayaSA@yandex.ru)

Пусть $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ - масштабирующая функция типа Мейера и всплеск-функция типа Мейера, соответствующие кратномасштабному анализу с матричным коэффициентом расширения M, где M — целочисленная растягивающая матрица размерности 2×2 с определителем, равным ± 2. Возможность построения всплесков типа Мейера для таких матриц доказана в [1].

Рассмотрим систему функций $\Psi = \{\varphi_{0k}, \psi_{jk}\}_{j=0,1,2,\ldots,\ k\in\mathbb{Z}^2}$, где функции $\varphi_{0k}(x)$, $\psi_{jk}(x)$ определяются следующим образом:

$$\varphi_{0k}(x) := \varphi(x-k),\ \psi_{jk}(x) := 2^{j/2}\psi(M^j x - k) \text{ при } j = 0,1,2,\ldots,\ k \in \mathbb{Z}^2.$$

Обозначим $c^0_{0k} := \langle f, \varphi_{0k}\rangle$, $c_{jk} := \langle f, \psi_{jk}\rangle$ при $j = 0,1,2,\ldots, k \in \mathbb{Z}^2$ – коэффициенты разложения функции f в ряд Фурье по системе Ψ.

Теорема: *Система $\Psi = \{\varphi_{0k}, \psi_{jk}\}_{j=0,1,2,\ldots,\ k\in\mathbb{Z}^2}$ ортонормирована в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и образует безусловный базис в пространствах $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$ при $-\infty < s < \infty$, $1 < q < \infty$, $1 < p < \infty$, то есть для любой $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c^0_0\varphi_{0k} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_{jk}\psi_{jk} \ \text{ и}$$

$$\left\|f|F^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\right\| \sim \left\|\Big(\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|c^0_{0k}|\widetilde{\chi}_{B_{0k}}\Big)^q + \sum_{j=1}^{\infty}2^{jsq}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|c_{j-1,k}|\widetilde{\chi}_{B_{j-1,k}}\Big)^q\Big)^{1/q}, L_p\right\|,$$

где $\widetilde{\chi}_{B_{jk}}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\chi_{B_{jk}}(x)$ и множества B_{jk} при $j = 0,1,2,\ldots,\ k = (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$ определяются следующим образом: $B_{0k} := [k_1, k_1+1) \times [k_2, k_2+1)$, $B_{jk} := M^{-j}B_{0k}$.

Ортонормированная система $\Psi = \{\varphi_{0k}, \psi_{jk}\}_{j=0,1,2,\ldots,\ k\in\mathbb{Z}^2}$ образует безусловный базис в пространствах $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)$ при $-\infty < s < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, $1 < p < \infty$, причем

$$\left\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2)\right\| \sim \Big(\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|c^0_{0k}|^p\Big)^{q/p} + \sum_{j=1}^{\infty}2^{j\left(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)q}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^2}|c_{j-1,k}|^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q}$$

с понятным видоизменением при $q = \infty$.

Аналогичный вопрос для системы сепарабельных всплесков, построенных на основе всплесков Мейера-Давида, в пространствах Бесова и Лизоркина-Трибеля изучен в [2]. Базисность несепарабельных всплесков в пространствах Бесова расмотрен в [3].

Литература

1. Bownik M., Speegle D. Meyer Type Wavelet Bases in $\mathbb{R}^2$//Journal of Approximation Theory 116 (2002). —P. 49-75.

2. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., М. А. Скопина М. А. Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005. — 616 с.

3. Lindemann M. Approximation Properties of Non-Separable Wavelet Bases with Isotropic Scaling Matrices and their Relations to Besov Spaces / University Bremen, 2005. — 126 p.

Задания всероссийских студенческих олимпиад по информатике и современное математическое образование

О.Д. Горбенко, О.Ф. Ускова, А.Е. Поляков, Д.С. Мамонов, В.А. Сушков, А. Борискин, А.П. Якубенко

(Воронеж, ВГУ)

Девять лет подряд в соответствии с приказами Министерства образования и науки Российской Федерации Воронежский государственный университет является базовым вузом при организации и проведении третьего тура Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» [1]. Олимпиада 2006 года была посвящена памяти первого декана факультета прикладной математики, информатики и механики (ПММ) Воронежского университета профессора Геннадия Ивановича Быковцева. Факультет ПММ был образован в нашей стране в числе первых факультетов подобного профиля, в 2009 году он отметил свое 40-летие. В рамках празднования этого юбилея была проведена седьмая Всероссийская студенческая олимпиада по информатике и программированию. Шестидесятилетию российской информатики была посвящена шестая Всероссийская олимпиада 2008 года [2]. Она была связана с именем выдающегося ученого, профессора Воронежского университета Селима Гершковича Крейна, который считается одним из первых в СССР авторов расчетных программ для ЭВМ. Олимпиада 2011 года посвящена 425-летию основания города Воронежа.

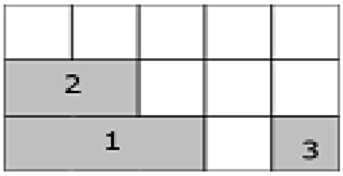
Студенческие олимпиады по информатике способствуют развитию студенческой активности, а также повышению качества современного математического образования. Приведем некоторые варианты заданий последних лет [3, 4].

Задача «Черное и белое»

Для игры в «Черное и белое» используется прямоугольное поле из $N \times M$ клеток. Некоторые клетки объединяются в блоки, на которые игрок может класть по одной черной фишке. Спустя определенное время, которое задается отдельно для каждого блока и называется временем замены, эту черную фишку можно поменять на белую.

Однако не на все блоки в любой момент времени можно класть черную фишку. Если в состав блока входит хотя бы одна клетка такая, что ниже нее вплотную находится клетка другого блока, на котором в данный момент нет белой фишки, то класть черную фишку на первый блок нельзя.

Ниже представлена иллюстрация для примера №1: положить черную фишку на блок №2 можно только тогда, когда на блоке №1 будет лежать белая фишка.



В начале игры время $T = 0$. Время дискретно — целое неотрицательное число. Считается, что в одну единицу времени игрок при желании всегда успевает положить и заменить фишки на всех блоках, на каких это возможно.

Чтобы закончить игру, игрок должен добиться того, что на всех блоках будут лежать белые фишки.

Необходимо написать программу, которая по заданной схеме блоков и заданному для каждого блока времени замены будет определять, возможно ли закончить игру. Если возможно, то также необходимо найти минимальное время, за которое можно пройти игру, и для каждого блока указать минимально возможный отрезок времени такой, что с вероятностью 100% можно утверждать, что при игре за минимальное время черная фишка была положена на этот блок в момент времени, принадлежащий этому отрезку.

Входные данные

В первой строке файла *input.txt* через пробел записаны два целых числа $1 \leq N, M \leq 1000$ — размеры поля (сначала число строк, затем — число столбцов).

Во второй строке записано число $1 \leq K \leq 1000$ — количество блоков.

Далее идут K строк, описывающие строго по порядку блоки с 1-го по K-й. В каждой такой строке через пробел записаны целые числа: сначала число $1 \leq T \leq 10^8$ — время замены; затем число $1 \leq B \leq 10000$ — число клеток, входящих блок. После него следуют B пар чисел $1 \leq X, Y \leq 1000$ – координаты каждой клетки X – номер строки, Y – номер столбца). Номера отсчитываются от верхнего левого угла.

Выходные данные

Если игру закончить невозможно, то нужно вывести слово impossible. Иначе в первой строке должно быть минимальное время, за которое возможно закончить игру. Далее следуют K строк, каждая из которых содержит два числа через пробел — соответственно, левую и правую границы минимально возможного отрезка времени такого, что с вероятностью 100% можно утверждать, что при игре за минимальное время черная фишка была положена на этот блок в момент времени, принадлежащий этому отрезку. Если можно точно определить этот момент времени, то границы отрезка будут совпадать.

Задача «Водяные пробки»

Транспортные потоки на улицах города можно смоделировать движением жидкости. Имеется набор трасс, соединенных между собой P перекрестками, перенумерованными, начиная с 1. Для каждой трассы и для каждого перекрестка задана пропускная способность – количество воды, пропускаемой в единицу времени. Необходимо вычислить пропускную способность всей системы при подаче воды в точке 1 и заборе в точке P.

Дополнительно необходимо выдать рекомендации по увеличению пропускной способности всей сети как минимум на N единиц минимальными затратами. Считается, что цена увеличения пропускной способности любого элемента сети на M единиц равна M рублей.

Входные данные

В первой строке файла *input.txt* заданы количество перекрестков $1 < P \leq 100$ и число $1 < N < 1000$. В каждой из следующих P строк файла содержатся описания перекрестков: пропускная способность перекрестка, количество трасс R, которые соединяет этот перекресток с другими перекрестками, затем R пар чисел - номер перекрестка, с которым он соединен трассой, и пропускная способность этой трассы. Все трассы являются двусторонними, т.е. поток возможен в оба направления. Пара перекрестков напрямую может быть связана не более, чем одной трассой. Все числа в строках файла целые и разделены пробелами.

Выходные данные

В первую строку текстового файла *output.txt* необходимо вывести два числа, разделенных пробелом, – пропускную способность системы и минимальную стоимость модернизации.

Ограничение времени – 5 секунд.

Задача «Объекты»

Пусть на координатной плоскости задана целочисленная сетка с шагом 1, в некоторых узлах которой расположены объекты (например, роботы или танки). Все объекты перенумерованы, начиная с 1. Объекты могут передвигаться лишь вдоль линий сетки и останавливаться только в ее узлах. В одном узле сетки могут находиться несколько объектов. На одном участке пути также могут находиться более одного объекта. Основная цель всех объектов: выстроиться на горизонтальной прямой так, чтобы объект с номером i стоял посередине между объектами с номерами $i-1$ и $i+1$, а расстояние между двумя соседними объектами равнялось наперед заданному натуральному числу m.

Необходимо найти требуемое расположение объектов, при котором суммарный пройденный объектами путь будет минимальным.

Входные данные

В первой строке входного текстового файла *input.txt* содержится пара чисел n и m. Число n $(1 \leq n \leq 1000)$ определяет количество объектов, расположенных на плоскости, а число m $(1 \leq m \leq 100)$ – расстояние между объектами после их перестроения. Последующие n строк файла задают их начальные координаты, т.е. $i+1$ строка содержит пару целых чисел x_i, y_i, которые являются координатами i-ого объекта на плоскости $(-100000 \leq x_i, y_i \leq 100000)$. Все пары чисел в файле разделены пробелами.

Выходные данные

В первой строке выходного текстового файла *output.txt* должно содержаться одно целое число S – суммарный путь, пройденный объектами при перестроении. В последующие n строк следует вывести координаты объектов после перестроения, т.е. $i+1$ строка должна содержать координаты i-ого объекта, записанные через пробел.

Литература

1. Информатика. Программирование. Информационные технологии: Всероссийские студенческие олимпиады, Воронеж, 11 – 12 ноября 2011 года / Отв. редактор О.Ф.Ускова : Воронежский государственный университет.- Воронеж, 2011.- 48 с.

2. Ускова О.Ф. Шестидесятилетию Российской информатики посвящается / О.Ф. Ускова, О.Д. Горбенко. Современные методы теории функций и смежные проблемы // Материалы Воронежской зимней математической школы (доп. выпуск).- Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009.- 35 с. С.23-29.

3. Ускова О.Ф. Качество содержания заданий Всероссийской студенческой олимпиады по информатике / О.Ф.Ускова, О.Д.Горбенко. Математика. Компьютер. Образование. // Тезисы докладов 16 Международной конференции, 19-24 января 2009 года. Пущино. Ч.2. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.- 634 с. С.596.

4. Горбенко О.Д. Специфика заданий основного этапа третьего тура IX Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» / О.Д.Горбенко, О.Ф.Ускова. Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования [ПМТУММ] // Материалы IV Международной научной конференции, Воронеж, 12-17 сентября 2011 года.- Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2011.- 333 с. С.73-76.

Корректная разрешимость некоторых нестационарных задач в пространствах с надэкспоненциально растущими и подэкспоненциально убывающими весами

В.А. Горлов

(Воронеж, ВГУ; gorlov.vladimir@gmail.com)

Определение 1 Через $S^+_{p,\psi,\rho}$ будем обозначать множество локально интегрируемых по Лебегу функций $f(t)$ на $(0,\infty)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{S^+_{p,\psi,\rho}} = \sup_{\mu>0}[\int_{\psi^{-1}(\mu)}^{\psi^{-1}(\mu+1)} \frac{(\psi'(s))}{\rho_+(\psi(s))}|f(s)|^p ds]^{\frac{1}{p}}$$

где $p \in [1,\infty), \psi(s) = \tau^{-1}(s), \rho_+$- положительная, монотонно возрастающая и дифференцируемая функция, такая, что: а)$\rho(0) = 1$, б) $\rho'(0) > 0$ и для которых выполняется соотношение

$$\rho_+(t)\rho_+(s) \leq \rho_+(t+s).$$

Определение 2 Через $S^-_{p,\psi,\rho}$ будем обозначать множество локально интегрируемых по Лебегу функций $f(t)$ на $(0,\infty)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{S^-_{p,\psi,\rho}} = \sup_{\mu>0}[\int_{\psi^{-1}(\mu)}^{\psi^{-1}(\mu+1)} \frac{(\psi'(s))}{\rho_-(\psi(s))}|f(s)|^p ds]^{\frac{1}{p}}$$

где $p \in [1,\infty), \psi(s) = \tau^{-1}(s), \rho_-$- положительная, монотонно убывающая и дифференцируемая функция, такая , что: а)$\rho(0) = 1$; б)$\rho'(0) < 0$; в) для которых выполняется соотношение

$$\rho_-(t)\rho_-(s) \geq \rho_-(t+s)(t, s \geq 0).$$

Сформулируем теоремы о равномерно корректной разрешимости в классах функций, определенных выше.

Теорема 1 Если $q(t) \in S^{+}_{p,\psi,\rho}$, то задача

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = a(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \tag{1}$$

$$u(0,x) = 0; \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(t,x) = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = q(t). \tag{4}$$

$$0 < x < \infty, t > 0, a(t) > 0.$$

равномерно корректна и ее решение представимо в виде

$$u(\tau,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau} (\tau - s)^{-\frac{1}{2}}\varphi(s)ds \tag{5}$$

где $\tau(t) = \int_0^t \frac{d\xi}{a(\xi)}, \varphi(s) = q(t(\tau))$.

При этом справедлива оценка

$$\|u\|_{S^{+}_{p,\psi,\rho}} \leq \sqrt{|\rho'_{+}(0)|}\|q\|_{S^{+}_{p,\psi,\rho}} \tag{6}$$

Теорема 2 Если $q(t) \in S^{-}_{p,\psi,\rho}$, то задача

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = a(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \tag{7}$$

$$u(0,x) = 0; \tag{8}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(t,x) = 0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = q(t). \tag{10}$$

$$0 < x < \infty, t > 0, a(t) > 0.$$

равномерно корректна и ее решение представимо в виде

$$u(\tau,0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\tau}^{\infty} (s - \tau)^{-\frac{1}{2}}\varphi(s)ds \tag{11}$$

где $\tau(t) = \int_t^{\infty} \frac{d\xi}{a(\xi)}, \varphi(s) = q(t(\tau))$.

При этом справедлива оценка

$$\|u\|_{S^{-}_{p,\psi,\rho}} \leq \sqrt{|\rho'_{-}(0)|}\|q\|_{S^{-}_{p,\psi,\rho}} \tag{12}$$

Заметим, что в случае классических L_p - пространств с экспоненциальными весами оценки (6) и (11) не имеют места.

Литература

1. Иосида К. Функциональный анализ: Учебник/ К. Иосида, пер. с анг. В.М. Волосова.– М.: Мир, 1967—624 с.

2. Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова/ А.В. Костин, В.А. Костин.— Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007.— 259 с.

Априорные оценки решений для обыкновенного дифференциального оператора с интегральными условиями, содержащими производные искомой функции[3]

К.А. Даровская
(Москва, РУДН; k.darovsk@gmail.com)

Мы рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор

$$Au + \lambda^2 u := -a_0(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) + \lambda^2 u(x) = f_0(x) \quad (x \in (0,1)) \quad (1)$$

с интегральными условиями

$$B_\rho^j u := \int\limits_0^1 h_\rho(x) u^{(j)}(x) dx = f_\rho \quad (\rho = 1, 2). \quad (2)$$

Здесь $j \in \{0, 1, 2\}$ фиксировано (т. е. оба интегральных условия содержат производные одного порядка, например, второго), a_i $(i = 0, 1, 2)$— вещественнозначные функции такие, что $a_0 \geq k > 0$ $(x \in [0, 1])$, и $a_1,\ a_2 \in C[0, 1]$; $f_0 \in L_2(0, 1)$, $f_\rho \in \mathbb{C}$ $(\rho = 1, 2)$; $\lambda \in \mathbb{C}$— спектральный параметр, h_ρ— произвольные линейно независимые вещественнозначные функции.

Введем обозначения:

- $C^\alpha_\beta[0, 1] = \{v \in L_2(0, 1) : v \in C^\alpha[0, \beta], v \in C^\alpha[1 - \beta, 1]\}$ $(\beta \in (0, 1/2\,))$, где $C^\alpha[a, b]$— пространство Гёльдера $(\alpha \in (0, 1])$.
- $W^1_{\infty,\beta}(0, 1) = \{v \in C[0, 1] : v \in W^1_\infty(0, \beta), v \in W^1_\infty(1 - \beta, 1)\}$ $(\beta \in (0, 1/2))$, где $W^1_\infty(a, b)$— пространство абсолютно непрерывных функций $v(x)$, $x \in [a, b]$ таких, что $v' \in L_\infty(a, b)$.

В дальнейшем предполагаем, что

$$a_0 \in W^1_{\infty,\beta}(0, 1) \text{ и } h_\rho \in C^\alpha_\beta[0, 1] \ (\alpha \in (1/2, 1],\ \beta \in (0, 1/2)).$$

Далее, $\omega_{\varepsilon,q} = \{\gamma \in \omega_\varepsilon : |\gamma| \geq q\}$, где $\omega_\varepsilon = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\arg\gamma| \leq \varepsilon \text{ или } |\arg\gamma - \pi| \leq \varepsilon\}$ и $0 < \varepsilon < \pi/2$. Введем также определитель из концевых значений весовых функций:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} h_1(0) & h_1(1) \\ h_2(0) & h_2(1) \end{vmatrix}. \quad (3)$$

В пространстве Соболева $W^2_2(0, 1)$ введем эквивалентную норму, зависящую от спектрального параметра

$$|||u|||_{W^2_2(0,1)} = \left(\|u\|^2_{W^2_2(0,1)} + |\lambda|^4 \|u\|^2_{L_2(0,1)} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Эквивалентная норма в пространстве $\mathcal{W}[0, 1] := L_2(0, 1) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ зависит не только от спектрального параметра, но и от фиксированного j :

$$|||f|||_{\mathcal{W}[0,1]} = \left(\|f_0\|^2_{L_2(0,1)} + |\lambda|^{\frac{4-j}{j!}} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2 \right) \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где $f = (f_0, f_1, f_2)$, $|\lambda| \geq 1$.

[3]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 10–01–00395–a и Немецко–Российским междисциплинарным научным центром (G-RISC), финансируемым Федеральным министерством иностранных дел Германии через Германскую службу академических обменов (DAAD), проект № M–2011b–9.

Замечание 1 *В (5) мы не вводим дополнительный индекс j в обозначение для нормы, поскольку везде далее будет понятно, какая именно степень $|\lambda|$ участвует в записи.*

Замечание 2 *Соотношение (5) задает правило выбора эквивалентных норм в пространстве $\mathcal{W}[0,1]$ для подобных задач. Эквивалентная норма в пространстве $W_2^2(0,1)$ остается неизменной и задается соотношением (4).*

Рассмотрим линейный оператор $L^j(\lambda) : W_2^2(0,1) \to \mathcal{W}[0,1]$ вида

$$L^j(\lambda) = \left(A + \lambda^2 I, B_1^j, B_2^j\right).$$

Теорема 1 *Пусть $\Delta_h \neq 0$. Тогда для любого $j \in \{0,1,2\}$ и для любого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ существует $q > 1$ (возможно, свое для каждого j) такое, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ любая функция $u \in W_2^2(0,1)$ удовлетворяет неравенству*

$$|||u|||_{W_2^2(0,1)} \leq C\,|\lambda|^{1/2}\,|||L^j(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,1]} \qquad (6)$$

где $C > 0$ не зависит от λ, u.

Для фиксированного $j \in \{0,1,2\}$ введем оператор $\mathcal{A}_{B^j} \colon \mathcal{D}(\mathcal{A}_{B^j}) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{B^j}) := \left\{u \in W_2^2(0,1) : B_\rho^j u = 0, \rho = 1,2\right\}$$

по формуле $\mathcal{A}_{B^j} u = Au \quad (u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{B^j}))$.

Следствие 1 *Пусть $\Delta_h \neq 0$. Тогда для любого $j \in \{0,1,2\}$ операторы $L^j(\lambda) \colon W_2^2(0,1) \to \mathcal{W}[0,1]$ и $\mathcal{A}_{B^j} \colon \mathcal{D}(A_{B^j}) \to L_2(0,1)$ фредгольмовы и $ind\, L^j(\lambda) = ind\, \mathcal{A}_{B^j} = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.*

При рассмотрении задачи (1), (2) мы предполагали, что параметр j — порядок производной — фиксирован. Возникает вопрос, что будет в случае, когда в интегральные условия входят производные разных порядков? Чтобы ответить на него, мы вначале рассмотрим задачу (1) с интегральными условиями, содержащими линейную комбинацию производных (включая нулевую) неизвестной функции.

Замечание 3 *Задача (1), (2) подробно рассматривалась в [3] и [2] при фиксированном j. Метод, использованный в этих работах для получения априорной оценки решений и доказательства фредгольмовой разрешимости, позволяет получить желаемые результаты также для задачи с интегральными условиями, содержащими линейную комбинацию производных неизвестной функции.*

Итак, мы рассматриваем задачу (1) с интегральными условиями

$$B_\rho^{k,m} u := \int_0^1 \left(g_\rho(x) u^{(k)}(x) + h_\rho(x) u^{(m)}(x)\right) dx = f_\rho \quad (\rho = 1,2). \qquad (7)$$

Здесь $0 \leq k < m \leq 2$ — фиксированы, $g_\rho \in L_2(0,1) \quad (\rho = 1,2), \quad h_\rho \in C_\beta^\alpha[0,1] \quad (\rho = 1,2,\ \alpha \in (1/2,1],\ \beta \in (0,1/2))$— линейно независимые вещественнозначные функции.

В пространстве $\mathcal{W}[0,1]$ мы будем использовать эквивалентную норму, отвечающую максимальному порядку производной в условиях (7):

$$|||f|||_{\mathcal{W}[0,1]} = \Big(\|f_0\|^2_{L_2(0,1)} + |\lambda|^{\frac{4-m}{m!}} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right)\Big)^{1/2}, \tag{8}$$

где $f = (f_0, f_1, f_2)$, $|\lambda| \geq 1$.

Определитель Δ_h задается соотношением (3).

Теорема 2 *Пусть $\Delta_h \neq 0$. Тогда для любых k и m таких, что $0 \leq k < m \leq 2$, и для любого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ существует $q > 1$ (возможно, свое для каждой пары k, m) такое, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ любая функция $u \in W_2^2(0,1)$ удовлетворяет неравенству*

$$|||u|||_{W_2^2(0,1)} \leq C\,|\lambda|^{1/2}\,|||L^{k,m}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,1]} \tag{9}$$

где $C > 0$ не зависит от λ, u, а $L^{k,m}(\lambda)$ — оператор, соответствующий задаче (1), (7).

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2 *Пусть $\Delta_h \neq 0$. Тогда для задачи (1), (7) при $0 \leq k < m \leq 2$ справедливы утверждения следствия 1 (для соответствующих операторов).*

Рассмотрим теперь задачу (1) с интегральными условиями вида (2), где $j \in \{0, 1, 2\}$ не фиксировано. Нам будет удобно записать их в следующем виде:

$$\begin{aligned} B_1^m u &:= \int_0^1 H_1(x) u^{(m)}(x)dx = f_1, \\ B_2^k u &:= \int_0^1 H_2(x) u^{(k)}(x)dx = f_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $0 \leq k < m \leq 2$ (мы рассматриваем k строго меньшим, чем m, поскольку в случае равенства $k = m$ мы в точности имеем задачу (1), (2)).

Далее, H_ρ $(\rho = 1, 2)$ — линейно независимые вещественнозначные функции из пространства $C^\alpha_\beta[0,1]$ $(\alpha \in (1/2, 1], \beta \in (0, 1/2))$, f_ρ $(\rho = 1, 2)$ — комплексные константы. Норма в пространстве $\mathcal{W}[0,1]$ соответствует старшей производной в условиях (10), т. е. имеет вид

$$|||f|||_{\mathcal{W}[0,1]} = \Big(\|f_0\|^2_{L_2(0,1)} + |\lambda|^{\frac{4-m}{m!}} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right)\Big)^{1/2}, \tag{11}$$

а определитель Δ_H задается соотношением

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} H_1(0) & H_1(1) \\ H_2(0) & H_2(1) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Теорема 3 *Пусть $\Delta_H \neq 0$. Тогда для любых $0 \leq k < m \leq 2$ и для любого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ существует $q > 1$ (возможно, свое для каждой пары k, m) такое, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q}$ любая функция $u \in W_2^2(0,1)$ удовлетворяет неравенству*

$$|||u|||_{W_2^2(0,1)} \leq C\,|\lambda|^{1/2}\,|||\widetilde{L}^{k,m}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,1]} \tag{13}$$

где $C > 0$ не зависит от λ, u, а $\widetilde{L}^{k,m}(\lambda)$ — оператор, соответствующий задаче (1), (10).

Доказательство Рассмотрим задачу (1), (7) с интегральными условиями

$$\begin{aligned} B_1^{k,m}u &:= \int\limits_0^1 \left(0 \cdot u^{(k)}(x) + H_1(x)u^{(m)}(x)\right) dx = f_1 \\ B_2^{k,m}u &:= \int\limits_0^1 \left(H_2(x)u^{(k)}(x) + |\lambda|^{-\frac{4-m}{m!}-\phi} H_2(x)u^{(m)}(x)\right) dx = f_2, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\phi > 0$ — произвольное вещественное число. В частности, мы можем положить $\phi = \varepsilon$ с ε, фигурирующем в теореме 2.

Применив теорему 2, мы получим, что если $\Delta_H \neq 0$, то для любых $0 \leq k < m \leq 2$ и для любого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ существует $q_0 > 1$ (возможно, свое для каждой пары k, m) такое, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon,q_0}$ любая функция $u \in W_2^2(0,1)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} |||u|||_{W_2^2(0,1)} \leq c_1 |\lambda|^{1/2} \Bigg(\|f_0\|^2_{L_2(0,1)} + |\lambda|^{\frac{4-m}{m!}} \Bigg(\Bigg| \int\limits_0^1 H_1(x)u^{(m)}(x)dx \Bigg|^2 + \\ + \Bigg| \int\limits_0^1 \left(H_2(x)u^{(k)}(x) + |\lambda|^{-\frac{4-m}{m!}-\varepsilon} H_2(x)u^{(m)}(x)\right) dx \Bigg|^2 \Bigg)\Bigg)^{1/2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь и далее константы $c_i > 0$ не зависят от λ, u.

Из (15) следует, что

$$|||u|||_{W_2^2(0,1)} \leq c_2 |\lambda|^{1/2} |||\widetilde{L}^{k,m}(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,1]} + c_2 G_m, \tag{16}$$

где $G_m = |\lambda|^{1/2-\frac{4-m}{2m!}-\varepsilon} \left| \int\limits_0^1 H_2(x)u^{(m)}(x)dx \right|$.

Оценим G_m.

$$G_m \leq c_3 |\lambda|^{1/2-\frac{4-m}{2m!}-\varepsilon} \int\limits_0^1 \left|u^{(m)}(x)\right| dx.$$

Для оценки G_1 мы используем известное (см. [1, гл. 1, § 1]) интерполяционное неравенство

$$|a|^{k-s}\|u\|_{W_2^s(0,1)} \leq c \left(\|u\|_{W_2^k(0,1)} + |a|^k \|u\|_{L_2(0,1)} \right), \tag{17}$$

где $a \in \mathbb{C}$, $k, s \in \mathbb{N}$, $0 < s < k$, $c > 0$ не зависит от u, a и $u \in W_2^k(0,1)$— произвольная.

Тогда

$$\begin{aligned} G_1 \leq c_4|\lambda|^{-1-\varepsilon}\|u'\|_{L_2(0,1)} \leq c_4|\lambda|^{-1-\varepsilon}\|u\|_{W_2^1(0,1)} \leq \\ \leq c_5|\lambda|^{-2-\varepsilon} \left(\|u\|_{W_2^2(0,1)} + |\lambda|^2\|u\|_{L_2(0,1)} \right) \leq c_6|\lambda|^{-2-\varepsilon}|||u|||_{W_2^2(0,1)}. \end{aligned} \tag{18}$$

$$G_2 \leq c_7|\lambda|^{-\varepsilon}\|u''\|_{L_2(0,1)} \leq c_7|\lambda|^{-\varepsilon}\|u\|_{W_2^2(0,1)} \leq c_8|\lambda|^{-\varepsilon}|||u|||_{W_2^2(0,1)}. \tag{19}$$

Определим положительное число θ_m следующим образом:

$$\theta_m = \begin{cases} 2+\varepsilon, & m=1, \\ \varepsilon, & m=2. \end{cases} \tag{20}$$

Из (18)–(20) следует, что

$$G_m \le c_9|\lambda|^{-\theta_m} |||u|||_{W_2^2(0,1)}, \tag{21}$$

где $\theta_m > 0$.

Выбирая $q_1 > q_0$ так, чтобы $c_2 c_9 q^{-\theta_m} < 1$, получим (13) из (16) и (21). Теорема доказана.

Следствие 3 *Пусть* $\Delta_H \neq 0$. *Тогда для задачи* (1), (10) *при* $0 \le k < m \le 2$ *справедливы утверждения следствия 1* (*для соответствующих операторов*).

Литература

1. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. — 1964. — 19, № 3. — С. 53–161.

2. Даровская К. А., Скубачевский А. Л. Об одной спектральной задаче с интегральными условиями // Труды семинара им. И. Г. Петровского — 2010. — 28. — С. 149–162.

3. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Т. 26. — С. 3–132.

О некоторых методах исследования вариационных неравенств

Н.А. Демьянков

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; praetoriax@gmail.com)

Сообщение посвящено некоторым качественным и численным методам исследования вариационных неравенств. Рассматривается операторное включение

$$0 \in A(y) + N(y)\,. \tag{1}$$

Рассматривается случай, когда A – ограниченный выпуклозначный оператор монотонного типа из сепарабельного и рефлексивного пространства Y в сопряженное к нему Y^*, N – конуснозначный оператор. Устанавливается критерий отсутствия решений включения (1). Вводятся целочисленные характеристики многозначных отображений, обладающие свойствами гомотопической инвариантности и аддитивности. Простые следствия этих свойств приводят к теоремам существования решений включения (1). Будут намечены приложения к операторным включениям с параметром и теории вариационных неравенств с многозначными операторами.

Литература

1. П. Панагиотополос. Неравенства в механике и их приложения. М.: Мир. 1989.

2. И.П. Рязанцева. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород. 2008.

Состояния обратимости дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами.

В.Б. Диденко

(Воронеж, ВГУ; vladimir.didenko@gmail.com)

Пусть X - банахово пространство над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $EndX$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, определенных на всем пространстве X.

Символом $C_\omega = C_\omega(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать банахово пространство непрерывных периодических периода $w > 0$ функций, определенных на всей вещественной оси X и принимающих свои значения в пространстве X, с нормой, определяемой равенством

$$||x|| = \max_{t \in [0,w]} ||x(t)||.$$

Через $L^p_w = L^p_w(\mathbb{R}, X), p \in [1, \infty]$ обозначим банахово пространство измеримых по Бохнеру периодических периода w (классов) функций, действующих из $\mathbb{R}$ в X, для которых конечна величина (принимаемая за норму в соотвествующем пространстве)

$$||x||_p = (\int\limits_0^w ||x(\tau)||^p d\tau)^{1/p}, p \neq \infty,$$

$$||x||_\infty = ess \sup_{\tau \in [0,w]} ||x(\tau)||, p = \infty.$$

Далее символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначатся одно из введенных выше пространств $L^p_w(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$, $C_w(\mathbb{R}, X)$.

Символом Δ обозначим множество $\{(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t \geq s\}$. Отображение $\mathcal{U} : \Delta \to EndX$ называется сильно непрерывным w - периодическим *семейством эволюционных операторов*(«вперед»), если выполнены следующие условия:

(1) $\mathcal{U}(t, t) = I$ - тождественный оператор для любого $t \in \mathbb{R}$;

(2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех $t \leq s \leq \tau$ из $\mathbb{R}$;

(3) отображение $(t, s) \longmapsto \mathcal{U}(t, s)x : \Delta \to X$ непрерывно для любого $x \in X$;

(4) $\sup_{0 \leq t-s \leq w} ||\mathcal{U}(t, s)|| = M \leq \infty$;

(5) $\mathcal{U}(t + w, s + w) = \mathcal{U}(t, s)$ для всех (t, s) из Δ.

В данной работе рассматривается оператор

$$\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F},$$

который определяется следующим образом. Непрерывная функция x из $\mathcal{F}$ включается в область определения оператора $\mathcal{L}$, если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что верны равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, 0)x(0) - \int\limits_0^t \mathcal{U}(t, s)f(s)ds, t \in [0, w].$$

При этом полагается $\mathcal{L}x = f$. Отметим корректность определения оператора $\mathcal{L}$(т.е. единственность функции f, построенной по x).

Определение. Пусть $A : D(A) \subset X \to X$ - замкнутый оператор. Рассмотрим следующие условия:

(1) $KerA = \{0\}$(т.е. оператор A инъективен);

(2) $1 \leq n = dimKerA \leq \infty$;

(3) $KerA$ - дополняемое подпространство либо в $D(A)$(с нормой графика) либо в X;

(4) $\overline{ImA} = ImA$, что эквивалентно положительности величины(минимального модуля оператора A)

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus KerA} \frac{||Ax||}{dist(x, KerA)} = \inf_{Ax=y, x \overline{\in} KerA} \frac{||y||}{dist(x, KerA)},$$

где $dist(x, KerA) = \inf_{x_0 \in KerA} ||x - x_0||$;

(5) Оператор A корректен(равномерно инъективен), т.е. $KerA = \{0\}$ и $\gamma(A) > 0$;

(6) ImA - замкнутое дополняемое в X подпространство;

(7) ImA - замкнутое подпространство из X коразмерности $1 \leq m = codimImA \leq \infty$;

(8) $ImA = X$, т.е. A - сюръективный оператор;

(9) оператор A обратим, т.е. $KerA = \{0\}$ и $ImA = X$.

Если для A выполнены все условия из совокупности условий $S = \{i_1, .., i_k\}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < .. < i_k \leq 9$, то будем говорить, что оператор A находится в состоянии обратимости S. Множество состояний обратимости оператора A обозначим символом $St_{inv}(A)$. В частности, если оператор A находится в состоянии обратимости $F = \{2, 7\}$, то он называется фредгольмовым. Индексом фредгольмова оператора A назовем число $ind(A) = dimKerA - codimImA$.

Теорема. *Для операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{U}(w, 0) - I$ имеет место равенство их множеств состояний обратимости*

$$St_{inv}\mathcal{L} = St_{inv}(\mathcal{U}(w, 0) - I).$$

Теорема. *Оператор $\mathcal{L}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовым является оператор $\mathcal{U}(w, 0) - I$, причем их индексы совпадают.*

Литература

1. Баскаков А. Г., Кобычев К. С. Оценки оператора вложения пространства Соболева периодических функций и оценки решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. // Дифференц. уравнения., Т. 47., № 5., 611–620, 2011.

2. Walter Hutter. Hyperbolicity of almost periodic evolution families. // Tubinger Berichte zur Funktionalanalysis 6, 92-109, 1997.

Профессиональноразвивающая роль НИР аспирантов и магистрантов-математиков в период научно-педагогической практики
(компетентностный подход)

В.Н. Донцов, Д.В Костин, Л.А. Кунаковская, М.А. Малюгина, В.К. Мусиенко
(Воронеж, ВГУ; don@math.vsu.ru, dvkostin@rambler.ru, malyugina-vrn@mail.ru)

В контексте сферно-аспектного подхода [1] ядром научно - педагогической практики аспирантов и магистрантов является научная и педагогическая деятельность в области избранной математической специальности. Это системообразующий элемент в структуре целостной системы их деятельности как учащихся высшей школы. НИР в области прикладных математико - педагогических проблем и научно - методического обеспечения преподавания высшей и конкурсной математики (студентам бакалавриата и специалитета, абитуриентам, учащимся профильных классов) в период локальной, ограниченной во времени, научно - педагогической практики (НПП) может квалифицироваться как *профессиональноразвивающий компонент* в обобщённой структурно - функциональной модели деятельности аспирантов и магистрантов как преподавателей высшей / средней профессиональной школы.

Технология организации и управления НИР в период НПП может включать в себя проектирование и выполнение плана прикладной научно - исследовательской деятельности по психолого-педагогическим проблемам методики обучения математике. Один из таксонов педагогических задач, который может быть включен в *портфолио практиканта-математика*, связан с дидактометрическим обследованием и описанием структуры предлагаемых абитуриентам на ЕГЭ (а также школьникам на ЦИА - 9) по математике контрольно-измерительных материалов. Нормативной целью проектируемого дидактического исследования является обучение практикантов приложениям кластерного анализа к многомерной классификации по критерию трудности тестовых заданий, предлагающихся на ЕГЭ по математике. За коэффициенты трудности тестовых заданий принимаются официально опубликованные проценты выпускников репрезентативных выборок, не выполнившие их на федеральном уровне. Задача состоит в выявлении однородных дидактем в структуре действующих учебных программ по математике для средней школы на федеральном уровне, усвоение которых носит неравномерный характер. В качестве примера можно привести следующую возможную структуру НИР в период НПП на тему "Математическое моделирование структуры тестовых заданий на ЕГЭ по математике агломеративным методом кластерного анализа (на базе компьютерной системы STATISTICA или SPSS)"[6], [8], [11]. Поэтапная логика продуктивного решения сформулированных дидактометрических задач может быть следующей. I. Постановка исследовательской методической задачи о кластеризации КИМ-ов для абитуриентов / школьников. II. Компьютерный подход к решению задачи (на базе компьютерной системы SPSS или STATISTICA). III. Математические результаты исследования и их графическое моделирование: а) матрица расстояний (евклидовых, манхэттенских, чебышевских, степенных) между коэффициентами трудностей тестовых заданий; б) последовательность объединения типов заданий в кластеры; в) графическая модель методической структуры тестовых заданий в форме дендрограммы (горизонтальной или вертикальной); г) компонентный состав кластеров. IV. Методическая интерпретация математических результатов, проектирование дидактем и методических рекомендаций в форме конструирования тематических и проблемных лекций, практикумов, эвристических и катехизических бесед, дифференцированных уровневых и индивидуальных вариативных самостоятельных работ.

Проектирование НИР аспирантов/ магистрантов по теории и методике математического образования в локальный период научно-педагогической практики позволяет целенаправленно формировать у них многообразие *профессиональноразвивающих компетенций*: психолого - педагогических, дидактических, методических, математико - прагматических, компьютерных, субъектно - личностных, общекультурных. Рассмотренная образовательная технология способствует преодолению традиционного методического противоречия, существующего в вузовском учебно - научном процессе между теоретическими (декларативными) знаниями аспирантов / магистрантов и прикладными (процессуальными) знаниями по решению реальных, содержательных педагогических / дидактических / методических задач. Приобретаемый в университете практикантом (магистрантом, аспирантом) ментальный опыт комплексного применения психолого-педагогических и математических методов прикладного системного исследования может стать акмеологическим инвариантом при проектировании, развитии и совершенствовании авторской научно-педагогической деятельности на этапе её старта. Рассмотренная образовательная технология прошла успешную апробацию и внедрение на математическом факультете классического университета и послужила основой: а) для подготовки магистрантами ВКР при получении дополнительной квалификации "Преподаватель б) для участия студентов и аспирантов в конкурсах молодых ученых, в) при написании статей в предметной области теории и методики математического образования [3], [5], [6], [8], [11], [14].

Литература

1. Бордовская Н.В. Технология оценки качества профессиональной деятельности вузовского преподавателя // Современные образовательные технологии : учеб. пособие / коллектив авторов; под ред. Н.В. Бордовской. - М., 2011. - С. 402-427.

2. Боровских А.В. Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика : пособие для системы профессионального педагогического образова-ния, переподготовки и повышения квалификации научно - педагогических кадров / А.В. Боровских, Н.Х. Розов. - М. : МАКСПресс, 2010. - 80 с.

3. Донцов В.Н. Научная статья студента-математика по ме тодике преподава-ния как акмеологический фактор его профессионального развития // Воспита-тельная среда вуза как фактор профессионального становления специалиста : межрегион. науч. - практ. конф. / под ред. Н.И. Вьюновой. - Воронеж, 2001. - С. 204-207.

4. Донцов В.Н. Кластерный анализ в дидактических приложениях : учеб. пособие для вузов / В.Н. Донцов. - Воронеж, 2006. - 55 с.

5. Донцов В.Н. Дискриминантный анализ в дидактической классификации типов тестовых B-заданий на ЕГЭ по математике (акмеологический подход) / В.Н. Донцов, Е.В. Лылов // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2009. - Тез. докл. - Воронеж : Воронеж. гос. ун - т, 2009. - С. 55.

6. Кластерный анализ в дидактической классификации B-заданий Централизованного итогового тестирования "Геометрия : 10-11"(акмеологический подход) / В.Н. Донцов, М.А. Малюгина, Т.А. Смагина // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования : Материалы 2-ой науч. конф. 12 декабря -16 декабря 2007 г.- Воронеж, 2007. - С. 105.

7. Краевский В.В. Основы обучения. Дидактика и методика : учеб. пособие / В.В.

Краевский, А.В. Хуторской. - М. : Академия, 2007. - 352 с.

8. Методы кластерного анализа в дидактической классификации заданий централизованного тестирования по "Геометрии : 7 - 9 классов"(акмеологический подход) / В.Н. Донцов, М.А. Малюгина, Е.В. Санина // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2008 : тез. докладов / отв. ред. В.А. Костин. - Воронеж : ВорГУ, 2008. - С. 52.

9. Методы непараметрической статистики на педагогической практике аспи-ранта и студента / В.Н. Донцов, Е.В. Лылов, В.К. Мусиенко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимн. матем. школы. - Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2011. - С.118-120.

10. Методы системного педагогического исследования / Н.В. Кузьмина, В.А. Якунин, В.Н. Донцов [и др.]; под ред. Н.В. Кузьминой - М., 2002. -208 с.

11. Опыт применения в компьютерной системе SPSS кластерного анализа к дидактической классификации тестовых заданий Единого государственного экзамена (акмеологический подход) / В.Н. Донцов, М.В. Каширина, С.И. Логунов // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования : Материалы конф. - Воронеж, 2005. - С. 84.

12. Садовничий В.А. О математике и её преподавании в школе : доклад на Всероссийском съезде учителей математики в МГУ имени М.В. Ломоносова 28 октября 2010 г. - М. : МГУ имени М.В. Ломоносова, 2010. - 24 с.

13. Теория и методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие / И.Е. Малова [и др.]. - М. ВЛАДОС, 2009. - 445 с.

14. Multidimensional modeling of the academic group structure on progress in probationer's pedagogical activity (acmeological approach) / V.N. Dontsov, V.K. Musienko, G.J. Ovsyannikov. - // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2010 : тез. докладов / отв. ред. В.А. Костин.- Воронеж, 2010. - С. 163-164.

Задача Римана на системе концентрических колец и дискретные уравнения типа свертки[4]

В.Б. Дыбин, Е.В. Бурцева

(Ростов-на-Дону, ЮФУ; vladimir-dybin@yandex.ru, evg-burceva@yandex.ru)

Составной контур Γ является системой концентрических окружностей Γ_j радиуса $r_j,\ 0 < r_1 < ... < r_{2n} < \infty$, лежащих в комплексной плоскости с центром в начале координат. Окружности Γ_j с нечетными номерами ориентированы по часовой стрелке, а с четными номерами - против часовой стрелки. Указанная ориентация разбивает комплексную плоскость на две области D^+ и D^- , где D^+ лежит слева от Γ и является объединением колец $D^+ = \bigcup\limits_{m=1}^{n} K_m,\ K_m = \{z \in \mathbb{C} | r_{2m-1} < |z| < r_{2m}\}$, а $D^- = \mathbb{C} \setminus \overline{D^+}$.

На контуре Γ в пространстве $L_p(\Gamma),\ 1 < p < \infty$, изучается оператор краевой задачи Римана $R = P_\Gamma^+ + aP_\Gamma^-$ с символом

$$a(t) = (a_1(t_1), a_2(t_2), ..., a_{2n}(t_{2n})) , \tag{1}$$

где $a_j(t_j) \in W(\Gamma_j)$ - алгебре Винера на окружности Γ_j . Множество векторов вида (1) образует банахову алгебру $W(\Gamma)$ с поэлементными операциями сложения и умножения. Подалгебры $W^\pm(\Gamma)$ вводим следующим образом:

$$W^+(\Gamma) = P_\Gamma^+ W(\Gamma),\ W^-(\Gamma) = (\mathbb{O} \times \mathbb{O} \times ... \times \mathbb{O} \times \mathbb{C}) + P_\Gamma^- W(\Gamma),$$

[4]Эта работа выполнена в рамках развития теории уравнений типа свёртки в пространствах функций и последовательностей, суммируемых с показательными весами [1-5]

здесь $(\mathbb{O}\times\mathbb{O}\times ... \times\mathbb{O}\times\mathbb{C})$ - одномерное подпространство векторного пространства $\mathbb{C}^{2n}$.

Подалгебра $W^+(\Gamma)$ состоит из 2n-мерных векторов следующего вида:

$$a^+ \in W^+(\Gamma),\ a^+ = (a_i^+)_{i=1}^{2n}, \text{где } a_i^+(t_i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{ik}t_i^k,$$

при этом $a_i^+(t_i) = a_{i+1}^+(t_i),\ i = 1, 3, ..., 2n-1,$

$$a^+ = \begin{pmatrix} a_1^+(t_1) \\ a_2^+(t_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{2n-1}^+(t_{2n-1}) \\ a_{2n}^+(t_{2n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^+(t_1) \\ a_1^+(t_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{2n-1}^+(t_{2n-1}) \\ a_{2n-1}^+(t_{2n}) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Подалгебра $W^-(\Gamma)$ состоит из 2n-мерных векторов вида:

$$a^- \in W^-(\Gamma),\ a^- = \{a_i^-\}_{i=1}^{2n}, \text{где}$$

$$a_1^-(t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}t_1^k,\ a_{2n}^-(t_{2n}) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_{2n,k}t_{2n}^k,$$

$$a_i^-(t_i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{ik}t_i^k,\ i = 2, 3, ..., 2n-1,$$

при этом $a_i^-(t_i) = a_{i+1}^-(t_i),\ i = 2, 4, ..., 2n-2,$

$$a^- = \begin{pmatrix} a_1^-(t_1) \\ a_2^-(t_2) \\ a_3^-(t_3) \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{2n-2}^-(t_{2n-2}) \\ a_{2n-1}^-(t_{2n-1}) \\ a_{2n}^-(t_{2n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{1k}t_1^k \\ a_2^-(t_2) \\ a_2^-(t_3) \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{2n-2}^-(t_{2n-2}) \\ a_{2n-2}^-(t_{2n-1}) \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} a_{2n,k}t_{2n}^k \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Индекс символа, являющийся индексом оператора R , определяется стандартным образом [7].

$$\aleph = \underset{\Gamma}{ind}\ a(t) = \aleph_1 + \aleph_2 + ... + \aleph_{2n},\ \aleph_j = \underset{\Gamma_j}{ind}\ a_j(t_j),\ j \in \overline{1, 2n}.$$

Факторизация символа оператора R проводится на основе классической факторизации М.Г. Крейна на окружности:

$$a(t) = a^+(t)a_0(t)a^-(t),$$

где

$$a_0(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - z_it^{-1})^{\aleph_{2i-1}+\aleph_{2i}},\ z_i \in K_i^+,\ i = 1, ..., n. \tag{4}$$

На основе матричного операторного исчисления порядка $2n$ построена теория односторонней обратимости оператора R , по форме аналогичная классической теории краевой задачи Римана на замкнутом контуре ([6],[7]), указаны конструкции обратных операторов и описаны подпространства $Ker\ R$ и $Im\ R$.

Теорема 1. *Пусть $a(t) \in W(\Gamma)$, $\aleph = \underset{\Gamma}{ind}\ a(t)$. Для того, чтобы оператор $R(a)$ был односторонне обратимым $\Phi-$ оператором в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $a(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ (т.е. $a_j(t) \neq 0$, $t \in \Gamma_j$, $j \in \overline{1, 2n}$). Если последнее условие выполнено, тогда:*

1) если $\aleph = 0$, оператор $R(a)$ обратим,

2) если $\aleph > 0$, оператор $R(a)$ обратим справа,

3) если $\aleph < 0$, оператор $R(a)$ обратим слева,

а соответствующий обратный оператор $[R(a)]^{-1}$ может быть представлен в виде:

$$[R(a)]^{-1} = R(a^+, 1/a^-)R(1/a_0)((1/a^+)I). \tag{5}$$

Здесь функции $a_0(t), a^{\pm}(t)$ определены формулами (5)–(4).

Этот метод является альтернативным методу И.Ц.Гохберга - Н.Я. Крупника [7, гл.III] и предназначен для исследования различных классов систем дискретных уравнений типа свертки в пространствах последовательностей, суммируемых с показательными весами.

В качестве приложения теоремы 1 рассмотрена система дискретных уравнений типа свертки следующего вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{j-1}(-1)^{l+1}A_j^- f_l + A_j^{\mp} f_j + \sum\limits_{l=j+1}^{2n}(-1)^l A_j^+ f_l = g_j,\ j = 2k-1, \\ \sum\limits_{l=1}^{j-1}(-1)^{l+1}A_j^- f_l + A_j^{\pm} f_j + \sum\limits_{l=j+1}^{2n}(-1)^l A_j^+ f_l = g_j,\ j = 2k,\ k \in \overline{1, n} \end{cases} \tag{6}$$

в пространстве $\{\rho_2, \rho_1\}_p^2 \times \{\rho_4, \rho_3\}_p^2 \times ... \times \{\rho_{2n}, \rho_{2n-1}\}_p^2$, $\rho_j = r_j^{-1}$, $j \in \overline{1, 2n}, 1 \leq p < \infty$. Здесь через $\{\rho_{2j}, \rho_{2j-1}\}_p$ обозначено пространство последовательностей

$$f_l = \{f_{lk}\}_{k\in\mathbb{Z}},\ f_{lk} = \rho_{2j}^k(P_+ f_l)_k + \rho_{2j-1}^k(P_- f_l)_k,\ l \in \overline{1, 2n},\ j \in \overline{1, n},$$

$$\text{где}\ \ f_l = \{f_{lk}\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z}),\ A_j^- = P_- - C(a_j)P_-,\ A_j^{\mp} = P_- + C(a_j)P_+,$$

$$A_j^+ = P_+ - C(a_j)P_+,\ A_j^{\pm} = P_+ + C(a_j)P_-,\ P_{\pm} f_l = \{1/2(1 \pm sign\ k)f_{lk}\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

$C(a_j)-$оператор дискретной свертки с символом $a_j \in W(\Gamma_j)$, $j \in \overline{1, 2n}$. Для системы (6) построена теория односторонней обратимости, найдены обратные операторы, описаны дефектные подпространства.

Литература

1. Дыбин В.Б., Уравнение свертки на вещественной прямой в пространстве функций, суммируе-мых с экспоненциальными весами. Часть 1 // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. № 2. 2011. С. 16-27.

2. Дыбин В.Б., Уравнение свертки на вещественной прямой в пространстве функций, суммируе-мых с экспоненциальными весами. Часть 2 // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. № 3. 2011. С. 39-48.

3. Дыбин В.Б., Джиргалова С.Б., Оператор дискретной свертки в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p,\ 1\le p\le\infty$ // Известия вузов Северо - Кавказский регион. Ест.науки. Приложение. № 9. 2003. С.3-16.

4. Дыбин В.Б., Джиргалова С.Б., Скалярные составные дискретные свертки в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p,\ 1\le p\le\infty$. Односторонняя обратимость // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Ест. науки. Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. 2005. С.56-63.

5. Дыбин В.Б., Джиргалова С.Б., Составные дискретные свертки в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p,\ 1\le p\le\infty$. Часть II.// РГУ, Деп. ВИНИТИ 12.11.03. №1946-В 2003.

6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи – М.: Наука. 1977.– 640 с.

7. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных операторов – Кишинев: Штиинца. 1973. – 426 с.

8. Дыбин В.Б., Бурцева Е.В., Оператор краевой задачи Римана на кольце и его приложение к одному классу систем уравнений в дискретных свертках // Труды научной школы И.Б.Симоненко. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ. 2010. С.79-92.

9. Дыбин В.Б., Бурцева Е.В., Оператор краевой задачи Римана на кольце и его приложение к одному классу систем уравнений в дискретных свертках // ЮФУ, Ростов-на-Дону, рук. Деп. в ВИНИТИ, № 361-В2011, от 22.07.11. 2011. – 26 с.

О верхнетругольных матричных алгебрах Ли, отвечающих аффинно-однородным гиперповерхностям пространства[5] $\mathbb{C}^3$

В.К. Евченко, А.В. Лобода

(Воронеж, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет)

В [1] и [2] построены большие семейства алгебраических аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей комплексного пространства $\mathbb{C}^3$. Локально каждая такая поверхность является интегральным многообразием некоторой 5-мерной вещественной алгебры Ли аффинных векторных полей. В свою очередь, каждая такая алгебра допускает матричное представление.

В [3] анонсирована возможность представления алгебр Ли, соответствующих построенным поверхностям, в верхнетреугольном виде. Ниже приводится более подробное описание заявленных ранее результатов.

ТЕОРЕМА 1. *При произвольных $A = m + in, s$ $(m, n, s \in \mathbb{R})$ вещественные 5-мерные пространства матриц с базисами одного из двух следующих типов являются матричными алгебрами Ли:*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & (iA-s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (iA+s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

[5]Работа поддержана грантами НШ - 3877.2008.1 и РФФИ-08-01-00743-а

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (iA+s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Именно к таким алгебрам приводят продолжения (см. [1]) 3-мерной подалгебры

$$g = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

алгебры $GL(2, \mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 2. *С точностью до аффинной эквивалентности все аффинно-однородные вещественные гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^3$, отвечающие алгебрам вида (1), задаются следующими уравнениями:*

$$(n-s)y_1^2 - nx_1^2 + 2mx_1y_1 - 2(m^2+n^2-sn)y_2 = 0, \tag{3}$$

$$v = x_2y_1 - x_1y_2 + \frac{1}{3s}x_1^3 + \frac{1}{s}x_1y_1^2 + Cy_1^3, \tag{4}$$

$$v = x_2y_1 + \left(\frac{m}{n}y_1y_2 - \frac{1}{2n}x_1y_1^2 - \frac{m}{6n^2}y_1^3\right) - \frac{s(y_1^2-2ny_2)^2}{4n(nx_1-my_1)} + C(nx_1-my_1)^3, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} v = x_2y_1 + \left(\frac{m}{n}y_1y_2 - \frac{1}{2n}x_1y_1^2 - \frac{m}{6n^2}y_1^3\right) + \\ + \frac{(N+2ns)(nx_1-my_1)}{6n^2N^2}\left(2(nx_1-my_1)^2 - 3N(y_1^2-2ny_2)\right) + \\ + C\left|(nx_1-my_1)^2 - N\left(y_1^2-2ny_2\right)\right|^{3/2}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} v = x_2y_1 + x_1y_2 - \frac{x_1^2y_1}{m} + \frac{(m^2-2s^2)y_1^3}{3m^3} + \frac{2sy_1(x_1y_1-my_2)}{m^2} + \\ + C|sy_1^2 - 2m(x_1y_1-my_2)|^{3/2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Во всех формулах (4) - (7) C - произвольная константа; в формуле (6) через N обозначено выражение m^2+n^2-ns.

Легко убедиться, что при $(m, n, s) = (0, 0, 0)$ ранг алгебры (2) в любой точке пространства $\mathbb{C}^3$ является неполным, и потому интегральные многообразия этой алгебры не являются вещественными гиперповерхностями. Гиперповерхности, отвечающие алгебрам (2) при остальных наборах (m, n, s), описываются ниже.

ТЕОРЕМА 3. *Аффинно-однородная гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^3$, являющаяся интегральным многообразием какой-либо из алгебр семейства (2) при $(m, n, s) \neq (0, 0, 0)$, аффинно эквивалентна вблизи любой своей точки либо поверхности (3), либо одной из поверхностей следующего списка:*

$$v = 0 - \textit{вещественная гиперплоскость}, \tag{8}$$

$$v = x_1^3 \ (x_1 \neq 0), \tag{9}$$

$$v = |y_2 + (x_1^2 + \gamma y_1^2)|^{3/2}, \tag{10}$$

с некоторым $\gamma \in \mathbb{R}$ *.*

Отметим возможность голоморфных переформулировок полученных утверждений об аффинной однородности. Например, справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Аффинно-однородная поверхность, отвечающая любой из алгебр (2), сводится голоморфными преобразованиями либо к вещественной гиперплоскости* $v = 0$*, либо к одной из 4-х (алгебраических) трубок:*

1) $v = x_1^3$ *;*

2) $v = x_1^{2/3}$ *(или* $v = x_1^{3/2}$*);*

3) $v = x_1^2 - x_2^{2/3}$ *;*

4) $v = x_1^2 + x_2^{2/3}$*.*

Замечание 2. В отличие от работ [1] и [2] некоторые поверхности из приведенных списков являются вырожденными в смысле Леви. Например, это - вещественная гиперплоскость (8) и поверхности 1) и 2) из теоремы 4.

Замечание 3. Все поверхности, описанные выше, являются алгебраическими гиперповерхностями 1-го, 2-го, 3-го, 4-го или 6-го порядков.

Литература

1. Лобода А.В., Ходарев А.С. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства // Известия ВУЗов. Сер. Математика. – 2003. – N 10. – С. 38 - 50.

2. Данилов М.С. Примеры аффинно-однородных индефинитных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ // "Вестник ВГУ Сер. "Физика. Математика". 2010, N 1. С. 52-61.

3. Евченко В.К., Лобода А.В. Об интегрировании матричных алгебр Ли // Воронежская зимняя матем. школа. Тез. докл. – Воронеж, 2011. – С. 121-122.

Об одной управляемой системе.

Н.М. Жук

(Воронеж, ВГПУ; chuk_n_m@mail.ru)

В работе [1] была доказана бесконечномерная версия теоремы Борсука-Улама в случае, когда нечетное отображение F является многозначным. Применим ее для изучения одной управляемой системы.

Пусть $E_1,\ E_2$ — банаховы пространства, $S_r(0) \subset E_1$ — сфера радиуса r с центром в нуле пространства E_1, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный сюръективный оператор, F – многозначное отображение, определенное на множестве $S_r(0) \subset E_1$ и действующее в E_2. Если образы любой точки $x \in S_r(0)$ являются выпуклыми компактами, то будем это записывать $F : S_r(0) \to Kv(E_2)$.

Определение 1. *Будем говорить, что отображение* $F : S_r(0) \to Kv(E_2)$ *— компактно по модулю отображения* A *(или* A*-компактно), если для любого ограниченного множества* $D \subset E_2$ *и любого множества* $B \subset S_r(0)$ *множество* $\overline{F(B \cap A^{-1}(D))}$ *является компактным. Если отображение* F *является* A*-компактным и полунепрерывным сверху, то будем говорить, что оно* A*-вполне непрерывно.*

Рассмотрим следующее включение:

$$A(x) \in F(x).$$

Обозначим множество решений этого включения $N(A, F)$.

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть* $F : S_r(0) \to Kv(E_2)$ *— A-вполне непрерывное нечетное многозначное отображение, если* $dim(Ker\ A) \geq n > 0$*, то множество* $N(A, F) \neq \emptyset$ *и* $dim(N(A, F)) \geq n - 1$.

Применим эту теорему к изучению следующей задачи.

Пусть E_1, E_2, E_3 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор, $f : E_1 \times E_3 \to E_2$ — нелинейное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:
(f_1) *f является непрерывным отображением;*
(f_2) *отображение* $f(x, \cdot) : E_3 \to E_2$ *является линейным для любого* $x \in E_1$*;*
(f_3) *отображение* $f(\cdot, u) : E_1 \to E_2$ *является нечетным для любого* $u \in E_3$.

Пусть $U : E_1 \to Kv(E_3)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение, удовлетворяющее следующем условиям:
(U_1) *отображение U является нечетным отображением.*

Рассмотрим следующую задачу:

$$A(x) = f(x, u), \tag{7}$$

$$u \in U(x). \tag{8}$$

Будем называть задачу (7)-(8) — задачей управления с обратной связью, а множество $U(x)$ — множеством допустимых управлений для точки $x \in E_1$.

Решением управляемой системы (7), (8) будем называть пару (x_*, u_*) такую, что

$$A(x_*) = f(x_*, u_*),$$

$$u_* \in U(x_*).$$

Точку $x_* \in E_1$ будем называть траекторией управляемой системы, а $u_* \in E_3$ - соответствующим управлением.

Из теоремы 1 естественно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть отображения f и U удовлетворяют сделанным предположениям. Если многозначное отображение F является вполне непрерывным, то для любого числа* $r > 0$ *существует траектория x управляемой системы (7), (8) такая, что* $||x|| = r$ *и множество таких траекторий имеет топологическую размерность большую или равную* $dim(Ker(A)) - 1$.

Применим теорему 2 к изучению следующей задачи.

Пусть $f : [0, 1] \times R^n \times R^p \to R^n$ – отображение, удовлетворяющим следующим условиям:
(I_1) *для любых* $x \in R^n$, $u \in R^p$ *отображение* $f_{x,u} = f(\cdot, x, u) : [0, 1] \to R^n$ *является измеримым;*
(I_2) *для почти всех* $t \in [0, 1]$ *отображение* $f_t = f(t, \cdot, \cdot) : R^n \times R^p \to R^n$ *является непрерывным;*
(I_3) *существуют такие суммируемые функции* $\alpha, \beta : [0, 1] \to R^1$*, что для любых* $x \in R^n$, $u \in R^p$ *и почти всех* $t \in [0, 1]$ *выполнено неравенство*

$$||f(t, x, u)|| \leq \alpha(t)(||x|| + ||u||) + \beta(t);$$

(I_4) *для почти всех* $t \in [0, 1]$ *отображение* $f_t(x, u) = f(t, x, u)$ *является нечетным по* $x \in R^n$ *и линейным по* $u \in R^p$.

Пусть многозначное отображение $G : [0,1] \times R^n \to Kv(R^p)$ удовлетворяет следующим условиям:
(G_1) *для каждого* $x \in R^n$ *многозначное отображение* $G(\cdot, x) : [0,1] \to Kv(R^n)$ *имеет измеримое сечение;*
(G_2) *для почти всех* $t \in [0,1]$ *многозначное отображение* $G(t, \cdot) : R^n \to Kv(R^n)$ *является полунепрерывным сверху и нечетным;*
(G_3) *существуют такие суммируемые функции* $\alpha_1, \beta_1 : [0,1] \to R^1$*, что для любого* $x \in R^n$ *и почти всех* $t \in [0,1]$ *выполнено неравенство*

$$\max_{y \in G(t,x)} ||y|| \leq \alpha_1(t)||x|| + \beta_1(t).$$

Пусть заданы линейные непрерывные функционалы $l_i : C_{[0,1]} \to R^1$, $i = 1, ..., k$, причем $0 \leq k < n$. Рассмотрим линейный оператор $L : C_{[0,1]} \to R^k$ определенный соотношением, $L(x) = (l_1(x), ..., l_k(x))$.

Будем считать пространство R^n вложенным в пространство $C_{[0,1]}$, т.е. точке $x_0 \in R^n$ сопоставим постоянное отображение $x^0(t) = x_0$. Будем предполагать тогда, что отображение L удовлетворяет следующему условию:
(L_1) *отображение* $L|_{R^n} : R^n \subset C_{[0,1]} \to R^k$ *является сюръективным оператором.*

Пусть M — произвольное положительное число.

Рассмотрим следующую задачу:

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \text{ для любого } t \in [0,1], \tag{9}$$
$$u'(t) \in G(t, x(t)), \text{ для п.в. } t \in [0,1], \tag{10}$$
$$u(0) = 0 \in R^p, \tag{11}$$
$$l_i(x(1)) = 0 \text{ для любого } i = 1,\ 2,\ ...,\ k, \tag{12}$$
$$\max_{t \in [0,1]} ||x(t)|| = M. \tag{13}$$

Решением задачи (9),(10), (11), (12) и (13) будем называть пару функций $(x(t), u(t))$, определенных на промежутке $[0,1]$ и удовлетворяющие уравнению (9) и условиям (10), (11), (12) и (13). Дифференцируемая функция $x(t)$ является траекторией системы, а абсолютно непрерывная функция $u(t)$ управлением системы. Обозначим через $\Sigma_{M,L}[0,1]$ множество траекторий задачи (9),(10), (11), (12) и (13).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $(I_1) - (I_4)$, $(G_1) - (G_3)$, (L_1). *Тогда для любого* $M > 0$ *существует решение* $(x(t), u(t))$ *задачи (9),(10), (11), (12), (13) и*

$$dim(\Sigma_{M,L}[0,1]) \geq (n - k - 1).$$

Литература

1. Гельман Б.Д., Жук Н.М. О бесконечномерной версии теоремы Борсука-Улама для многозначных отображений (в печати).

2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В., Введение в теорию многозначных отображений // М: КомКнига (URSS). - 2005.

Критерий существования семейства Бонне[6]

Г.Р. Жуков
(Москва; grzhukov@gmail.com)

Рассматривается вопрос о локальном существовании семейства Бонне.
Определение 1. Изометричные поверхности с общей средней кривизной называются парами Бонне.

В работе [3] T. Y. Thomas, с помощью операции ковариантного дифференцирования, вывел формулы для коэффициентов второй квадратичной формы поверхности в произвольной системе координат, выразив их через гауссову, среднюю кривизны и их ковариантные производные. В статье [2] И. Х. Сабитовым, методами тфкп, были получены аналогичные формулы в изотермической системе координат. В этой же статье приведены необходимые условия для существования трёх поверхностей Бонне, а значит, и семейства Бонне: $A = \widetilde{g}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \zeta} - \widetilde{f}\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \zeta} \equiv 0$, где
$\widetilde{f} = 2\lambda^2 \frac{\partial H}{\partial \zeta}$, $\widetilde{g} = 4(H^2 - K)\lambda^4$, H и K - средняя и гауссова кривизны, соответственно.

В настоящей работе
1. В изотермической системе координат установлены соотношения между формулами Сабитова и Thomas'а.
2. Доказано, что условие $A \equiv 0$ является не только необходимым, но и достаточным. Таким образом справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы поверхность локально имела непрерывное нетривиальное семейство Бонне, необходимо и достаточно, чтобы $A \equiv 0$.*
3. Как следствие теоремы 1 верна

Теорема 2. *Для того, чтобы поверхность вращения S,не постоянной средней кривизны, имела непрерывное нетривиальное семейство Бонне, необходимо, чтобы существовала константа $c \neq 0$ такая, что функция $f(s)$, равная расстоянию от точки поверхности до её оси вращения, удовлетворяла дифференциальному уравнению*

$$\sqrt{1-f'^2}f(1-f'^2+ff'')^2 = 2c(f^2f'^2f''' - f^2f''' - f^2f'f''^2 - ff'f'' + ff'^3f'' - f' + 2f'^3 - f'^5).$$

Литература

1. Сабитов И. Х. О решениях уравнения $\Delta u = f(x,y)e^{cu}$ в некоторых специальных случаях. Матем. сб.,2001, 192,№6, с.89-104.
2. Сабитов И. Х. Изометричные поверхности с общей средней кривизной и проблема пар Бонне. Матем. сб.,2011.
3. Thomas T. Y. Algebraic determination of the second fundamental form of a surface by its mean curvature. Bull. of Amer. Mat. Soc., 1945, 51, №6, part 1, p. 390 – 399.

[6]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00748), программы "Ведущие научные школы РФ"(грант НШ-3224.2010.1), АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект РНП-2.1.1.3704), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(контракты 02.740.11.5213 и 14.740.11.0794)

О локальных решениях одного класса вырожденных дифференциальных включений

А.В. Завьялова
(Воронеж, ВГПУ; an-toshka85@mail.ru)

Пусть E_1, E_2 - два банаховых пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$- линейный замкнутый сюрьективный оператор. Рассмотрим многозначный обратный оператор $A^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$, где $A^{-1}(y) = \{x \in E_1 | A(x) = y\}$. Число

$$||A^{-1}|| = \sup_{y \in E_2} (\frac{inf\{||x|| \ | \ x \in E_1, A(x) = y\}}{||y||})$$

называется нормой многозначного отображения A^{-1}. Имеет место следующая лемма (см. [2]).

Лемма 1. *Пусть y_0 – произвольная точка из пространства E_2, x_0 – произвольная точка из множества $A^{-1}(y_0)$, тогда для любого числа k, $||A^{-1}|| < k$, существует непрерывное отображение $P : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*
1) $A(P(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;
2) $||x_0 - P(y)|| \leq k||y_0 - y||$ для любого $y \in E_2$.

Пусть x_0 - точка в $D(A)$, $B_R[x_0]$ - шар радиуса R с центром в точке x_0. Пусть многозначное отображение $F(t, x) : [0, T] \times B_R[x_0] \longrightarrow Kv(E_2)$ -вполне непрерывно по совокупности переменных.

Рассмотрим следующую задачу:

$$Ax' \in F(t, x), \tag{1}$$

$$A(x(0)) = A(x_0). \tag{2}$$

Решением данной задачи на промежутке $[0; h]$, где $0 < h \leq T$, называется абсолютно непрерывная функция $x(t)$ такая, что $A(x'(t)) \in F(t, x(t))$ для почти всех $t \in [0, h]$, и $A(x(0)) = A(x_0)$. Обозначим $\sum(x_0, [0, h])$ - множество решений задачи $(1), (2)$ на промежутке $[0, h]$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *При сделанных предположениях найдется такое число $h_0 > 0$, что $\sum(x_0, [0, h_0]) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть непрерывное отображение $P : E_2 \to E_1$ удовлетворяет условиям леммы 1. И пусть $coP(F(t, X)) = Q(t, x)$. Тогда отображение Q является вполне непрерывным и имеет выпуклые компактные образы (см. [1]). Рассмотрим следующую задачу:

$$x' \in Q(t, x), \tag{3}$$

$$x(0) = x_0. \tag{4}$$

В силу сделанных предположений существует число $h_0 \in (0, T]$ такое, что задача (3), (4) имеет решение на промежутке $[0, h_0]$. Пусть $x_* = x_*(t)$ - решение этой задачи, тогда на промежутке $[0, h_0]$ существует суммируемая функция $y(s)$ такая, что $y(s) \in Q(s, x_*(s))$ для почти всех $s \in [0, h_0]$. Тогда выполняется равенство

$$x_*(t) = x_0 + \int_0^t y(s)ds, \tag{5}$$

Так как $Q(t,x) = coP(F(t,X))$, то для почти всех $s \in [0,h_0]$ справедливо представление

$$y(s) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P(y_i), \tag{6}$$

где $\lambda_i \in [0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, а точки $y_i \in F(s, x_*(s))$.

Продифференцируем равенство (5), имеем $x'_*(t) = y(t)$ для почти всех $t \in [0,h_0]$. Применим к полученному равенству оператор A, получим

$$A(x'_*(t)) = A(y(t)) = A(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P(y_i)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A(P(y_i)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$$

Так как $y_i \in F(t, x_*(t))$, а множество $F(t, x_*(t))$ выпукло, то

$$A(x'_*(t)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i \in F(t, x_*(t)).$$

Отсюда следует, что $(Ax'(t)) \in F(t, x_*(t))$ для почти всех $t \in [0,h_0]$, то есть x_* - является решением включения (1).

Равенство (2) очевидно, так как $x_*(0) = x_0$ и $A(x_*(0)) = A(x_0)$, то $A(x(0)) = A(x_0)$.

Теорема доказана.

Литература

1. Гельман Б.Д. Об операторных включениях с сюръективными операторами./ Б.Д. Гельман // Вестник ВГУ, серия: физика, математика - 2006. №1 - с.119-127.

2. Гельман Б.Д. Операторные уравнения и задача Коши для вырожденных дифференциальных уравнений./ Б.Д. Гельман // Вестник ВГУ, серия: физика, математика - 2007. №2 - с.86-91.

Гамильтоновы системы и движения планет с замкнутыми орбитами

О.А.Загрядский, Е.А.Кудрявцева, Д.А.Федосеев, А.Т.Фоменко
(Москва)

Цель настоящих лекций - доступно рассказать о новых качественных методах и геометрических результатах в теории гамильтоновых систем.

1. Примеры классических гамильтоновых интегрируемых систем в механике и физике. Проблема описания топологии решений, бифуркаций.

2. Симплектические многообразия. Теорема Лиувилля. Слоение Лиувилля.

3. Случай двух степеней свободы. 3-атомы, 2-атомы, граф-молекула интегрируемой системы на изоэнергетической 3-поверхности. Классификационная теорема Фоменко-Цишанга.

4. Задача Кеплера. Законы Кеплера.

5. Задача Бертрана об описании потенциалов с замкнутыми орбитами. История вопроса (Дарбу, Бертран, Сантепрет и др.).

6. Классификация потенциалов и метрик поверхностей вращения. Точная постановка задачи и ее решение. Связь с поверхностями, на которых все геодезические замкнуты.

Фазовое пространство полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка

А.А. Замышляева, Е.В. Бычков
(Челябинск, ЮУрГУ; alzama@mail.ru, jigan-laym@mail.ru)

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}), N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \tag{1}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа [1]

$$A\ddot{u} = B_1\dot{u} + B_0 u + N(u). \tag{2}$$

Известно, что если оператор не является непрерывно обратимым, то задача (1)–(2) является принципиально неразрешимой при любых начальных значениях, и в связи с этим возникает задача построения фазового пространства [2] уравнения (2) как множества допустимых начальных значений, содержащего решения уравнения (2).

Определение 1. Вектор-функцию $u \in C^\infty((-\tau,\tau);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2) при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$, называют *решением этого уравнения*, а если решение удовлетворяет условию (1), то оно называется *решением задачи* (1), (2).

Определение 2. Множество $\mathfrak{P}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2), если
(i) для любых $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (1), (2);
(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при $t \in (-\tau,\tau)$.

Обозначим через $\overrightarrow{B}$ пучок операторов B_1, B_0 [3, 4]. Множества $\rho^A(\overrightarrow{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})\}$ и $\sigma^A(\overrightarrow{B}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \rho^A(\overrightarrow{B})$ будем называть соответственно A-*резольвентным множеством* и A-*спектром пучка* $\overrightarrow{B}$. Введем в рассмотрение оператор-функцию комплексной переменной $R^A_\mu(\overrightarrow{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\overrightarrow{B})$, которую назовем A-*резольвентой пучка* $\overrightarrow{B}$.

Определение 3. Пучок операторов $\vec{B}$ называется полиномиально ограниченным относительно оператора A (или просто полиномиально A-ограниченным), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})).$$

Введем в рассмотрение дополнительное условие

$$\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})d\mu \equiv \mathbb{O}, \tag{A}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Лемма 1. [3] Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено (A). Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})\mu A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu A R^A_\mu(\vec{B}) d\mu$$

– проекторы в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно.

Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \text{im } P$, $\mathfrak{F}^1 = \text{im } Q$. Из предыдущей леммы следует, что $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$. Через A^k (B_l^k) обозначим сужение оператора A (B_l) на $\mathfrak{U}^k,\ k = 0, 1;\ l = 0, 1$.

Теорема 1. [3] Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнено (A). Тогда

(i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k),\ k = 0, 1;$

(ii) $B_l^k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k),\ k = 0, 1,\ l = 0, 1;$

(iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$;

(iv) существует оператор $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Построим операторы $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^\circ)$ и $H_1 = (B_0^0)^{-1} B_1^0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^\circ)$.

Определение 4. Определим семейство операторов $\{K_q^1, K_q^2\}$ следующим образом:

$$K_1^1 = H_0,\ K_1^2 = -H_1,$$
$$K_{q+1}^1 = K_q^2 H_0,\ K_{q+1}^2 = K_q^1 - K_q^2 H_1,\ q = 1, 2, \ldots.$$

Определение 5. Точка ∞ называется

(i) устранимой особой точкой A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_1^1 \equiv \mathbb{O}$, $K_1^2 \equiv \mathbb{O}$;

(ii) полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_p^1 \not\equiv \mathbb{O}$, $K_p^2 \not\equiv \mathbb{O}$, но $K_{p+1}^1 \equiv \mathbb{O},\ K_{p+1}^2 \equiv \mathbb{O}$;

(iii) существенно особой точкой A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_k^2 \not\equiv \mathbb{O}$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

Определение 6. Если пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, то будем называть пучок операторов $\vec{B}$ (A, p)-ограниченным.

Если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$, то уравнение (2) тривиально редуцируется к эквивалентному ему уравнению

$$\ddot{u} = F(u, \dot{u}), \tag{3}$$

где оператор F класса C^∞ по построению. Существование единственного решения задачи (1), (3) результат следующей теоремы:

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{M}$ банахово C^k-многообразие $(k \geq 3)$, оператор F класса $C^l, l \leq k - 1$. Тогда $\mathfrak{M}$ является фазовым пространством уравнения (2).

Пусть $\ker A \neq \{0\}$, пучок операторов $\vec{B}$ $(A, 0)$-ограничен. Тогда, в силу теоремы 1, уравнение (2) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{gathered} 0 = (I - Q)(B_0 + N)(u^0 + u^1), \\ \ddot{u}^1 = A_1^{-1} Q B_1 (\dot{u}^0 + \dot{u}^1) + A_1^{-1} Q (B_0 + N)(u^0 + u^1), \end{gathered} \tag{4}$$

где $u^1 = Pu, u^0 = (I - P)u$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (I - Q)(B_0 u + N(u)) = 0\}$.

Пусть $u_0 \in \mathfrak{M}$, положим $u_0^1 = P u_0 \in \mathfrak{U}^1$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке u_0 является банаховым C^k-многообразием, если существуют окрестности $\mathcal{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathcal{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек u_0 и u_0^1 соответственно и C^k-диффеоморфизм $\delta : \mathcal{O}^1 \to \mathcal{O}$ такой, что δ^{-1} равен сужению проектора P на $\mathcal{O}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется банаховым C^k-многообразием, моделируемым пространством $\mathfrak{U}^1$, если оно является банаховым C^k-многообразием в каждой своей точке.

Пусть $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, то есть существует точка $u_0 \in \mathfrak{U}$, причем выполнено условие:

$$(I - Q)(B_0 u_0 + N'_{u_0}) : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0 \text{ – топлинейный изоморфизм.} \tag{5}$$

Тогда, в силу теоремы о неявной функции, существуют окрестности $\mathcal{O}^0 \subset \mathfrak{U}^0$ и $\mathcal{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек $u_0^0 = (I-P)u_0, u_0^1 = Pu_0$ соответственно и оператор $B \in C^\infty(\mathcal{O}^1; \mathcal{O}^0)$ такой, что $u_0^0 = B\big(u_0^1\big)$. Построим оператор $\delta = I + B : \mathcal{O}^1 \to \mathfrak{M}$, $\delta\big(u_0^1\big) = u_0$. Тогда оператор δ^{-1} вместе со множеством $\mathcal{O}^1$ задает карту множества $\mathfrak{M}$ и равен сужению проектора P на $\delta[\mathcal{O}^1] = \mathcal{O} \subset \mathfrak{M}$. Таким образом, доказана

Лемма 2. *Множество* $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (I-Q)(B_0 u + N(u)) = 0\}$ *при выполнении (5) является* C^∞ *многообразием в точке* u_0.

Подействуем производной Фреше второго порядка $\delta''_{(u^1,v^1)}$ на второе уравнение системы (4). Тогда, так как

$$\delta''_{(u^1,v^1)}\ddot{u}^1 = \frac{d^2}{dt^2}\big(\delta(u^1)\big) \text{ и } \delta(u^1) = u,$$

получим уравнение вида (3), определенное на $\mathcal{O}$, где

$$F(u,\dot{u}) = \delta''_{(u^1,v^1)}A_1^{-1}QB_1\dot{u} + \delta''_{(u^1,v^1)}A_1^{-1}(B_0 + N)(u).$$

В силу теоремы 2 имеет место

Теорема 3. Пусть пучок операторов $\vec{B}$ $(A,0)$-ограничен, выполнено условие (A), оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M}$, при выполнении условия (5) является локально фазовым пространством уравнения (2).

Литература

1. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Дифференц. уравн. 1990. – Т. 26, № 2. – С. 250 – 258.

2. Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

3. Замышляева А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка /А.А. Замышляева// Вычислит. технол.– 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45–54.

4. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Дифференц. уравн. – 2006.– Т. 42. № 2. С. 252–260.

О разрешимости одной математической модели с производной Яуманна

А.В. Звягин

(Воронеж, ВГУ; zvyagin@math.vsu.ru)

Исследуется слабая разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений, которые описывают движение слабо концентрированных водных растворов полимеров в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3$ с границей класса C^∞ на промежутке времени $[0,T]$. Определяющее соотношение для данной модели имеет вид

$$\sigma = 2\nu\left(\mathcal{E} + \varkappa\nu^{-1}\frac{D\mathcal{E}}{Dt}\right), \quad \varkappa, \nu > 0, \tag{1}$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости; $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}(v)_{ij})$, $\mathcal{E}(v)_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ - тензор скоростей деформации; $\varkappa$ — время запаздывания. Коэффициент $\varkappa$ называют также временем релаксации деформаций. Мы обозначаем через $\frac{D}{Dt}$ производную

Яуманна:

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + T(t,x)W(t,x) - W(t,x)T(t,x),$$

где $T(t,x)$ - произвольная тензорнозначная функция, не зависящая от наблюдателя, $W(v) = (W(v)_{ij})$, $W(v)_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ - тензор завихренности. Разрешимость в слабом смысле модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров с полной производной была изучена в работе [1].

Подставляя σ из реологического соотношения (1) в систему уравнений движения несжимаемой жидкости в форме Коши, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa Div\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right) +$$
$$+ Div\left(\mathcal{E}(v)W(v) - W(v)\mathcal{E}(v)\right) + gradp = f(x,t), \quad x \in \Omega,\, t \in [0,T]; \quad (2)$$

$$divv(x,t) = 0, \quad x \in \Omega,\, t \in [0,T]. \quad (3)$$

Здесь $v(x,t)$ — скорость частицы жидкости в точке x в момент времени t; $p = p(x,t)$ — давление в жидкости; $f(x,t)$ — плотность внешних сил, действующих на жидкость.

Для данной системы уравнений рассматривается начально-краевая задача с начальным условием

$$v(x,0) = a(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

и граничным условием "прилипания"

$$v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \quad (5)$$

Для того чтобы ввести понятие слабого решения нам потребуются определения некоторых пространств:

Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ будем обозначать пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω.

Пусть $\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \ldots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : div\, v = 0\}$, а

$$V^0 = \text{ замыкание } \mathcal{V} \text{ по норме } L_2(\Omega)^n.$$

Мы будем также использовать хорошо известное разложение Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)^n$ (см., например, [2],[3]):

$$L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega),$$

где $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$, $\oplus$ — знак ортогональной суммы (пространства V^0 и $\nabla H^1(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)^n$).

Пусть

$$\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$$

проектор Лере.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор

$$A = -\pi\Delta.$$

Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным (подробнее см., например, в [4]). Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Отметим, что если граница области Ω принадлежит классу C^∞, то $\{e_j\}$ — собственные функции оператора A будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A. Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j и определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Таким образом, мы получили необходимые пространства $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Теперь на основе полученных данных введём пространство, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

$$E_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1),\, v' \in L_2(0,T;V^{-1})\},$$

с нормой:

$$\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Будем предполагать, что $f \in L_2(0,T;V^{-1}), a \in V^1$.

Определение: Слабым решением начально-краевой задачи (2)-(5) называется функция $v \in E_1$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^3$ и почти всех $t \in (0,T)$ равенству

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx + {}\\ + \varkappa \int\limits_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi\,dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx - {}\\ - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx + \int\limits_\Omega (\mathcal{E}(v)W(v) - W(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi \rangle\end{aligned} \tag{7}$$

и начальному условию

$$v(0) = a. \tag{8}$$

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема: Для любых $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ и $a \in V^1$ начально-краевая задача (2)-(5) имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in E_1$.

Литература 1. Zvyagin V.G., Turbin M.V. The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids // Journal of Mathematical

Sciences v.168. 2010. pp. 157-308. 2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости – М.: Наука. 1970. – 288с. 3. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир. 1981. – 408с. 4. Ворович И.И., Юдович В.И. Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости // Математический сборник – т. 53. № 4. 1961. С. 393-428.

О разрешимости задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной

С.П. Зубова
(Воронеж, ВГУ; spzubova@mail.ru)

Для уравнения
$$A(t)\frac{dx(t)}{dt} = B(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$
где $A(t)$ и $B(t)$ — операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, линейные, замкнутые, с плотными в E_1 областями определения, $t \in \mathfrak{T} = [0, T]$, $f(t) \in C^0(\mathfrak{T} \to E_2)$, $A(t)$ — нётеров при каждом $t \in \mathfrak{T}$, ставится задача Коши:
$$x(0) = x^0 \in E_1. \tag{2}$$
Если $\exists t \in \mathfrak{T}$ такое, что $A(t)$ необратим, то уравнение (1) называют сингулярным, вырожденным, критическим, дифференциально–алгебраическим, алгебро-дифференциальным. Всё чаще используется название *дескрипторное* уравнение.

Задачу (1), (2) с нётеровым оператором $A(t)$ с ненулевым индексом æ исследовали Ю. Е. Бояринцев, Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев, В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова, их ученики и другие авторы. Как правило, рассматривались регулярные случаи, то есть либо пара $(A,\, B)$ регулярная (пучок $(A - \lambda B)$ регулярный), или полон B–жорданов набор элементов для оператора A. В нерегулярном случае авторы отмечают лишь существование решения не при любых $x^0 \in E_1$ и возможную неединственность решения.

Нас интересуют в случае нерегулярной пары $(A,\, B)$ вопросы разрешимости и единственности решения задачи (1), (2), свойства решений. Для исследований применяем метод каскадной декомпозиции уравнения (1), или метод каскадного расщепления уравнения (1) на уравнения в подпространствах и исследование полученных уравнений в подпространствах (*каскадный метод*).

Используем следующее свойство, вполне определяющее нётеров оператор $A(t)$.

Свойство 1. Имеют место разложения пространств в прямые суммы:
$$E_1 = CoimA(t)\dot{+}KerA(t), \quad E_2 = ImA(t)\dot{+}CokerA(t),$$
где $CokerA(t)$ — дефектное подпространство для $A(t)$, $CoimA(t)$ — прямое дополнение к $KerA(t)$ в E_1. Сужение $\tilde{A}(t)$ оператора $A(t)$ на $CoimA(t) \bigcap D(A)$ имеет ограниченный обратный $A^-(t)$, называемый полуобратным.

От $B(t)$ требуем: $A^-(t)B(t)$ и $Q(A)B(t)$ — ограниченные операторы.

Операторы A и B, обладающие перечисленными выше свойствами, приводятся в следующем примере.

Пример. Пусть $E_1 = \{x(t,s) \in \mathbb{R}^3(\mathfrak{T} \times [0,1]) \bigcap C^0([\mathfrak{T} \times [0,1]) : x(t,0) = 0\}$,
$E_2 = \{y(t,s) \in \mathbb{R}^4(\mathfrak{T} \times [0,1]) \bigcap C^0(\mathfrak{T} \times [0,1]\}$,
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\partial}{\partial s} & -1 \\ 0 & (\frac{\partial}{\partial s} - 1) & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\partial}{\partial s} & b_{13}\frac{\partial}{\partial s} \\ -1 & b_{22}\frac{\partial}{\partial s} & b_{23}\frac{\partial}{\partial s} \\ -1 & b_{32}\frac{\partial}{\partial s} & b_{33}\frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix}.$$

Оператор A — нётеров,

$$A^{-}B(\cdot) = \begin{pmatrix} e^s \int\limits_0^s e^{-z}(\cdot)dz & -1 - e^s \int\limits_0^s e^{-z}(\cdot)dz & 0 \\ -e^s \int\limits_0^s e^{-z}(\cdot)dz & e^s \int\limits_0^s e^{-z}(\cdot)dz & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если

$$b_{13} = 0,\, b_{22} = 0,\, b_{23} = 1,\, b_{32} = 0,\, b_{33} = 1,\, b_{42} = -1,\, b_{43} = 1, \tag{3}$$

то

$$Q(A)B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если

$$b_{13} = 1,\, b_{22} = 1,\, b_{23} = -1,\, b_{32} = 1,\, b_{33} = -1,\, b_{42} = 0,\, b_{43} = 0, \tag{4}$$

то $Q(A)B = 0$.

———-

Уравнение (1) с помощью свойства 1 расщепляется на уравнения в подпространствах $Coker\, A(t)$ и $Im\, A(t)$:

$$Q(A)B(t)x(t) + Q(A)f(t) \equiv 0, \quad t \in \mathfrak{T}, \tag{5}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^{-}(t)B(t)x(t) + A^{-}(t)f(t) + P(A)\frac{dx(t)}{dt}, \quad \forall P(A)\frac{dx(t)}{dt} \in KerA(t). \tag{6}$$

В результате обозначений:

$$\begin{gathered} A_0(t) = A(t), \quad B_0(t) = B(t), \\ S_0(t) = Q(A_0)B_0(t), \quad T_0(t) = A_0^{-}(t)B_0(t), \quad K_0(t) = Q(A) \end{gathered} \tag{7}$$

получаем:

уравнение (1) эквивалентно системе, состоящей из тождества:

$$S_0(t)x(t) + K_0(t)f(t) \equiv 0 \tag{8}$$

и уравнения (6). И теперь задача состоит в нахождении $P(A)\dfrac{dx(t)}{dt}$ из системы (6), (7).

Пусть выполняется условие

s_0) вектор–функции $S_0(t)$ и $K_0(t)f(t)$ дифференцируемы при каждом $t \in \mathfrak{T}$.

Замечание. *Свойство дифференцируемости* $S_0(t)$ *не означает дифференцируемости* $A(t)$ и $B(t)$.

Продифференцировав соотношение (8), и заменив в полученном выражении $\dfrac{dx(t)}{dt}$ с помощью (6), получаем:

$$\begin{gathered} S_0(t)P(A_0)\frac{dx(t)}{dt} + \left(S_0(t)T_0(t) + \frac{dS_0(t)}{dt}\right)x(t) + \\ + \Big(S_0(t)A^{-}(t)f(t) + \frac{d}{dt}\Big(K_0(t)f(t)\Big)\Big) \equiv 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Обозначим:
$$A_1(t)=S_0(t)P(A_0)=Q(A_0)B_0(t)P(A_0),$$
$$K_1(t)f(t)=S_0(t)A^-(t)f(t)+\frac{d}{dt}(K_0(t)f(t)), \tag{10}$$
С условием s_0) и обозначениями (10) уравнение (9) таково:
$$A_1(t)P(A_0)\frac{dx(t)}{dt}=-\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)x(t)-K_1(t)f(t). \tag{11}$$
Пусть, кроме того, выполняется требование:

r_0) $dim\,Ker\,A(t)=const=n_0$, $dim\,Coker\,A(t)=const=m_0$.

Тогда $A_1(t)$ при каждом $t\in\mathfrak{T}$ — линейный ограниченный оператор, действующий из R^{n_0} в R^{m_0} , следовательно, нётеров, и
$$KerA_0(t)=CoimA_1(t)\dot{+}KerA_1(t),\quad CokerA_0(t)=ImA_1(t)\dot{+}CokerA_1(t).$$

Пусть выполняется требование:

r_1) $dimKerA_1(t)=const=n_1$,

тогда $dimCokerA_1(t)=const=des=m_1$ в силу конечномерности $A_1(t)$.

В случае $n_0>n_1$ уравнение (11) по свойству 1 эквивалентно следующим соотношениям:
$$Q(A_1)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)x(t)+Q(A_1)K_1(t)f(t)\equiv 0, \tag{12}$$
$$P(A_0)\frac{dx(t)}{dt}=-A_1^-(t)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)x(t)-A_1^-(t)K_1(t)f(t)+P(A_1)\frac{dx(t)}{dt},$$
$\forall P(A_1)\dfrac{dx(t)}{dt}\in KerA_1(t)$. Подставив последее выражение в (6) , получаем:
$$\frac{dx(t)}{dt}=\Big(T_0(t)-A_1^-(t)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)\Big)x(t)+P(A_1)\frac{dx(t)}{dt}. \tag{13}$$
В результате обозначений:
$$S_1(t)=Q(A_1)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big),\quad T_1(t)=T_0(t)-A_1^-(t)\Big(S_0(t)T_0(t)+\frac{dS_0(t)}{dt}\Big)$$
уравнение (13) принимает вид:
$$\frac{dx(t)}{dt}=T_1(t)+\Big(A_0^-(t)-A_1^-(t)K_1(t)\Big)f(t)+P(A_1)\frac{dx(t)}{dt},$$

а условие (12) вид:
$$S_1(t)x(t)+Q(A_1)K_1(t)f(t)\equiv 0.$$
Итак, при выполнении условий s_0) и r_0), r_1) уравнение (1) эквивалентно двум соотношениям:
$$S_0(t)x(t)+Q(A_0)K_0(t)f(t)\equiv 0,$$
$$S_1(t)x(t)+Q(A_1)K_1(t)f(t)\equiv 0,\quad t\in\mathfrak{T},$$
и уравнению:
$$\frac{dx(t)}{dt}=T_1(t)+\Big(A_0^-(t)-A_1^-(t)K_1(t)\Big)f(t)+P(A_1)\frac{dx(t)}{dt}. \tag{14}$$

Продолжая этот процесс дальше с введением обозначений:

$$\begin{gathered} A_i(t) = S_{i-1}(t)P(A_{i-1}), \quad S_i(t) = Q(A_i)\Big(S_{i-1}(t)T_{i-1}(t) + \frac{dS_{i-1}(t)}{dt}\Big), \\ T_i(t) = T_{i-1}(t) - A_i^-(t)\Big(S_{i-1}(t)T_{i-1}(t) + \frac{dS_{i-1}(t)}{dt}\Big) \\ K_i f(t) = S_{i-1}(t)\Big(A_0^-(t) - \sum_{j=1}^{i-1} A_j^-(t)K_j(t)\Big)f(t) + \\ + \frac{d}{dt}Q(A_{i-1})K_{i-1}(t)f(t), \quad i = 1, 2, ... \end{gathered} \tag{15}$$

и при выполнении условий:

s_i) вектор–функции $S_i(t)$ и $Q(A_i)K_i(t)f(t)$ дифференцируемы на $\mathfrak{T}$, $\quad i = 0, 1, 2, \ldots,$

r_i) $dimKerA_i(t) = const = n_i, \quad i = 0, 1, 2, ...$

получаем следующий результат.

Лемма. Уравнение (1) при выполнении условий s_i), $i = \overline{0, q-1}$, $\;r_i$), $i = \overline{0, q}$ эквивалентно системе:

$$S_i(t)x(t) + Q(A_i)K_i(t)f(t) \equiv 0, \quad i = \overline{0, q}, \quad t \in \mathfrak{T}, \tag{16}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = T_q(t) + (A_0^-(t) - \sum_{j=1}^{q} A_j^-(t)K_j(t))f(t) + P(A_q)\frac{dx(t)}{dt}, \tag{17}$$

$\forall P(A_q)\dfrac{dx(t)}{dt} \in KerA_q(t).$

Обозначим $dimCokerA_i(t) = const = m_i, \quad i = 1, 2, \ldots .$

Заметим, если $n_k = n_{k-1}$, то и $m_k = m_{k-1}$, оператор $A_k(t)$ в таком случае тождественно нулевой, в формулах (15) $P(A_k) = I$, $Q(A_k) = I$, и процесс расщепления пространств продолжается дальше. Получаем:

$$\begin{aligned} & E_1 = CoimA(t)\dot{+}KerA(t) = CoimA(t)\dot{+}CoimA_1(t)\dot{+}KerA_1(t) = ... \\ & ... = CoimA(t)\dot{+}CoimA_1(t)\dot{+}...\dot{+}CoimA_q(t) + KerA_q(t), \\ & E_2 = ImA(t)\dot{+}CokerA(t) = ImA(t)\dot{+}ImA_1(t)\dot{+}CokerA_1(t) = ... \\ & ... = ImA(t)\dot{+}ImA_1(t)\dot{+}...\dot{+}ImA_q(t) + CokerA_q(t). \end{aligned}$$

На этом пути возможны лишь следующие исходы.

Случай 1. Существует $p \in N$ такое, что $n_{p-1} > n_p = 0$ и $m_{p-1} > m_p = 0$, что возможно лишь при æ $= 0$, то есть в случае фредгольмовского оператора $A(t)$.

Случай 2. Существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $n_{p-1} > n_p = 0$ и $m_{p-1} > m_p \neq 0$, что возможно лишь при æ $\neq 0$.

Случай 3. Существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $n_{p-1} > n_p \neq 0$ и $m_{p-1} > m_p = 0$, æ $\neq 0$.

Случай 4. Существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $n_{p-1} > n_p = n_{p+1} = \ldots$, $m_{p-1} > m_p = m_{p+1} = \ldots$. Это возможно и при æ $= 0$ и при æ $\neq 0$.

В зависимости от наличия или отсутствия ядра у оператора $A_p(t)$ на основании приведённой леммы формулируются две следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\exists p \in \mathbb{N}$ *такое, что выполняются условия* s_i) с $i = \overline{0, p-1}$, r_i) *с* $i = \overline{0, p}$ и $T_p(t) \in C^0(\mathfrak{T} \to E_1)$.

В случаях 1 *и* 2 *решение* $x(t)$ *задачи* (1), (2) *существует в том и только том случае, когда выполняются условия согласования:*

$$S_i(t)x^0 + Q(A_i)K_i(t)f(t)|_{t=0} \equiv 0 \tag{18}$$

с $i=\overline{0,p-1}$ в первом случае, и $i=\overline{0,p}$ во втором,

и

$$R(t)=\int\limits_0^t U(t-s)\Big(A_0^-(s)-\sum_{j=1}^p A_j^-(s)K_j(s)\Big)f(s)ds \tag{19}$$

дифференцируем на $\mathfrak{T}$.

При выполнении этих условий $x(t)$ единственно, обладает свойствами:

$$S_i(t)x(t)+Q(A_i)K_i(t)f(t)\equiv 0, \tag{20}$$

и равно:

$$x(t)=U(t)x^0+R(t), \tag{21}$$

где $U(t)$ — сильно непрерывная полугруппа, порождённая оператором $T_p(t)$.

Таким образом, фазовым пространством в случае 1 при выполнении условий теоремы 1 является пространство $M_{p-1}(t)$:

$$M_{p-1}(t)=\{x\in E_1:\quad S_i(t)x+Q(A_i)K_i(t)f(t)\equiv 0,\quad t\in\mathfrak{T},\quad i=\overline{0,p-1}\}, \tag{22}$$

и в случае 2 — пространство $M_p(t)$:

$$M_p(t)=\{x\in E_1:\quad S_i(t)x+Q(A_i)K_i(t)f(t)\equiv 0,\quad t\in\mathfrak{T},\quad i=\overline{0,p}\}. \tag{23}$$

Теорема 2. *Пусть $\exists p\in\mathbb{N}$ такое, что выполняются условия s_i) с $i=\overline{0,p-1}$, r_i) с $i=\overline{0,p}$, и $A_p(t)$ сюрьективен, или $A_{p+j}(t)\equiv 0$, $j\in\mathbb{N}_0$. Решение $x(t)$ задачи* (1), (2) *существует точно тогда, когда выполняются условия согласования* (18) *с $i=\overline{0,p}$ в случае* 3, *и $i\in\mathbb{N}_0$ в случае* 4, *и $R(t)$ дифференцируем на $\mathfrak{T}$.*

При этом $x(t)$ обладает свойствами (20), *неединственно, и имеет вид*:

$$x(t)=U(t)x^0+\int\limits_0^t U(t-s)\Big(\Big(A_0^-(s)-\sum_{j=1}^p A_j^-(s)K_j(s)\Big)f(s)+P(A_p)c(s)\Big)ds, \tag{24}$$

$\forall c(t)\in C^0([0,T]\to E_1)$.

Фазовым пространством при выполнении условий теоремы 2 является в случае 3 пространство $M_{p-1}(t)$, и в случае 4 пространство $M_\infty(t)=\{x\in E_1:\quad S_i(t)x+Q(A_i)K_i(t)f(t)\equiv 0,\quad t\in\mathfrak{T},\quad i\in\mathbb{N}_0\}$.

Следствие. При выполнении условий s_i), r_i) решение задачи (1), (2) единственно тогда и только тогда, когда $\exists p\in\mathbb{N}$ такое, что $KerA_p=\{0\}$ (выполнения условий s_i) требуется при $i=\overline{0,p-1}$), r_i) при $i=\overline{0,p}$).

Имеют место следующие разложения.

В случае 1:

$$\begin{gathered}E_1=CoimA\dot{+}KerA=CoimA\dot{+}CoimA_1\dot{+}KerA_1=...\\...=CoimA\dot{+}CoimA_1\dot{+}...\dot{+}CoimA_p,\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}E_2=ImA\dot{+}CokerA=ImA\dot{+}ImA_1\dot{+}CokerA_1=...\\...=ImA\dot{+}ImA_1\dot{+}...\dot{+}ImA_p.\end{gathered} \tag{26}$$

В случае 2 пространство E_1 разлагается в прямую сумму (25), для E_2 имеет место разложение:

$$E_2 = ImA \dot{+} ImA_1 \dot{+} ... \dot{+} ImA_p \dot{+} CokerA_p. \tag{27}$$

В случае 3 для E_1 имеет место разложение:

$$E_1 = CoimA \dot{+} CoimA_1 \dot{+} ... \dot{+} CoimA_p \dot{+} KerA_p. \tag{28}$$

Пространство E_2 раскладывается в прямую сумму (26).

В случае 4 для E_1 и E_2 получаем разложения (28) и (27).

——–-

Установить единственность или неединственность решения задачи Коши для уравнения (1) можно и более простыми способами. Один из таких способов — применение свойств операторного пучка $A(t) - \lambda B(t)$.

Пару $(A(t), B(t))$ назовём *псевдорегулярной на* $\mathfrak{T}$ (*псевдорегулярной*), если $\exists \lambda_0 \in \mathbb{C}$ такое,что уравнение $(A(t) - \lambda B(t))y(t) = 0$, $\forall \lambda \in \dot{U}_{\lambda_0}(0)$[7] имеет лишь тривиальное решение $y(t) \equiv 0$, $t \in \mathfrak{T}$.

Для нахождения условий псевдорегулярности пары $(A(t), B(t))$ рассмотрим уравнение:

$$(A(t) - \lambda B(t))y(t) = z(t), \quad y(t) \in E_1,\ z(t) \in E_2. \tag{29}$$

В силу свойства 1 и обозначений (15) это уравнение эквивалентно системе:

$$-\lambda S_0(t)y(t) = Q(A)z(t), \tag{30}$$

$$(I - \lambda T_0(t))y(t) = A^-(t)z(t) + P(A)y(t), \tag{31}$$

$\forall P(A)y(t) \in KerA(t)$. При λ таких, что:

$$\|\lambda A^-(t)B(t)\| < 1, \quad \forall t \in \mathfrak{T}, \tag{32}$$

находим из (31):

$$y(t) = (I - \lambda T_0(t))^{-1}A^-(t)z(t) + (I - \lambda T_0(t))^{-1}P(A)y(t). \tag{33}$$

Обозначим через $\dot{U}_{\lambda_1}(0)$ значения $\lambda \neq 0$, при которых выполняется неравенство (32). Подставим выражение (33) при $\lambda \in \dot{U}_{\lambda_1}(0)$ в условие (30):

$$-\lambda S_0(t)(I - \lambda T_0(t))^{-1}P(A)y(t) - \lambda Q(A)B(t)(I - \lambda T_0(t))^{-1}A^-(t)z(t) = Q(A)z(t),$$

откуда:

$$S_0(t)(I - \lambda T_0(t))^{-1}P(A)y(t) = -\frac{1}{\lambda}L_1(\lambda)z(t), \tag{34}$$

где

$$L_1(t, \lambda) = Q(A)\Big(I + \lambda S_0(t)(I - \lambda T_0(t))^{-1}A^-(t)\Big).$$

Воспользовавшись равенством: $(I - \lambda T_0(t))^{-1} = I + \lambda T_0(t)(I - \lambda T_0(t))^{-1}$, получим из (34):

$$\Big(S_0(t)P(A) + \lambda S_0(t)T_0(t)(I - \lambda T_0(t))^{-1}\Big)P(A)y(t) = -\frac{1}{\lambda}L_1(t, \lambda)z(t),$$

[7] $\dot{U}_{\lambda_k}(0) = \{\lambda : 0 < |\lambda| < |\lambda_k|\}$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

или в обозначениях (7):

$$\Big(A_1(t)+\lambda S_0(t)T_0(t)(I-\lambda T_0(t))^{-1}\Big)P(A)y(t)=-\frac{1}{\lambda}L_1(t,\lambda)z(t). \tag{35}$$

В силу нётеровости оператора $A_1(t)$ и свойства 1 последнее соотношение эквивалентно системе:

$$\lambda Q(A_1)S_0(t)T_0(t)(I-\lambda T_0(t))^{-1}P(A)y(t)=-\frac{1}{\lambda}Q(A_1)L_1(t,\lambda)z(t), \tag{36}$$

$$\begin{aligned}&\Big(I+\lambda A_1^-(t)S_0(t)T_0(t)(I-\lambda T_0(t))^{-1}\Big)P(A)y(t)=\\&=-\tfrac{1}{\lambda}A_1^-(t)L_1(t,\lambda)z(t)+P(A_1)y(t),\end{aligned} \tag{37}$$

$\forall P(A_1)y(t)\in KerA_1(t)$.

Рассмотрим случай $KerA_1(t)\equiv 0$.

Обозначим через $\dot U_{\lambda_2}(0)$ совокупность $\lambda\neq 0$, для которых выполняются неравенство (32) и неравенство:

$$\|\lambda A_1^-(t)S_0(t)T_0(t)(I-\lambda T_0(t))^{-1}\|<1,\quad \forall t\in\mathfrak{T}.$$

При $\lambda\in\dot U_{\lambda_2}(0)$ из соотношения (35) получаем:

$$P(A)y(t)=-\frac{1}{\lambda}\Big(I+\lambda A_1^-(t)S_0(t)T_0(t)(I-\lambda T_0(t))^{-1}\Big)^{-1}A_1^-(\lambda)L_1(t,\lambda)z(t). \tag{38}$$

Отсюда и из (33) находим $y(t)$:

$$y(t)=(I-\lambda T_0(t))^{-1}A^-z(t)-$$

$$-\frac{1}{\lambda}(I-\lambda T_0(t))^{-1}\Big(I+\lambda A_1^-(t)S_0(t)T_0(t)(I-\lambda T_0(t))^{-1}\Big)^{-1}A_1^-(\lambda)L_1(t,\lambda)z(t),$$

то есть:

$$\begin{aligned}&y(t)=(I-\lambda T_0(t))^{-1}A^-(t)z(t)-\\&-\tfrac{1}{\lambda}\Big(I-\lambda T_0(t)+\lambda A_1^-(t)S_0(t)T_0(t)\Big)^{-1}A_1^-(\lambda)L_1(t,\lambda)z(t).\end{aligned} \tag{39}$$

Подставив выражение (38) в соотношение (34) (или (39) в (30)) и используя обозначения (16), получаем условие

$$L_2(t,\lambda)L_1(t,\lambda)z(t)\equiv 0, \tag{40}$$

где

$$L_2(t,\lambda)=Q(A_1)\Big(I-\lambda S_1(t)(I-\lambda T_1(t))^{-1}A_1^-(t)\Big).$$

Итак, *в случае, если* $P(A_1)\equiv 0$, *уравнение* (29) *разрешимо относительно* $y(t)$ *в том и только том случае, если* $z(t)$ *удовлетворяет условию* (40). *При выполнении этого условия решение* $y(t)$ *единственно и имеет вид* (39).

Уравнение $(A(t)-\lambda B(t))y(t)=0$ в случае $P(A_1)\equiv 0$ имеет лишь тривиальное решение, то есть пара $(A(t),B(t))$ в этом случае псевдорегулярная.

Отметим, при $P(A_1)\equiv 0$ имеют место два свойства: единственность решения задачи Коши для уравнения (1) при каждом возможном x^0 (теорема 1) и псевдорегулярность пары $(A(t),B(t))$.

Если же $KerA_1(t) \neq 0$, то связь между единственностью решения задачи (1), (2) и единственностью решения уравнения (29) может нарушаться.

При переменных $A(t)$ и $B(t)$, рассмотренных выше, справедлива

Теорема 3. *Если* $S_i(t)$ — *постоянные операторы,* $dimKer\,A_i(t) = const$, $dimCoker\,A_0(t) = const$, $\exists p \in \mathbb{N}$ *такое, что* A_p — *инъекция и* $T_p(t) \in C^0([0,T] \to CoimA(t))$, *то задача Коши для уравнения* (1) *имеет единственное решение при каждом возможном* x^0 *тогда и только тогда, когда уравнение*

$$(A(t) - \lambda B(t))y(t) = 0 \tag{41}$$

при $\lambda \in \dot{U}(0)$ *имеет лишь нулевое решение, и в том и только том случае, когда все* $B(t)$*–жордановы цепочки для оператора* $A(t)$ *имеют конечные длины.*

Но в случае постоянных A и B имеется прямая связь между единственностью решения задачи Коши для уравнения (1) при каждом возможном x^0, псевдорегулярностью пары $(A,\,B)$ и полнотой B–жорданова набора для A.

В приведённом примере с коэффициентами (3) пара $(A,\,B)$ псевдорегулярная, задача коши для этого уравнения имеет единственное решение (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющее условиям $x_i(0,s) = x_i^0(s)$, $i = \overline{1,3}$, $x_2^0(s) = x_3^0(s)$. В случае же коэффициентов (4) B–жорданова цепочка для A бесконечна и решение задачи Коши существует при любых $x_i(0,s) = x_i^0(s)$ и неединственно.

Литература 1. Zubova S. P. Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator multiplying the derivative // Doklady Mathematics. 2009. Vol. 80, № 2. P. 710–712.

О полной наблюдаемости нестационарной возмущенной динамической системы

С.П. Зубова, Фам Туан Кыонг, Е.В. Раецкая
(Воронеж, ВГУ, ВГЛТА; spzubova@mail.ru, tuancuonghd@yahoo.com, raetskaya@inbox.ru)

Рассматривается дифференциально-алгебраическая нестационарная возмущенная система:

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = B(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$F(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon), \tag{2}$$

где $x(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$; $B(t,\varepsilon) = B_0(t) + \varepsilon B_{01}(t,\varepsilon)$; $B_0(t), B_{01}(t,\varepsilon) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $A(t,\varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_{01}(t,\varepsilon)$; $A_0(t), A_{01}(t,\varepsilon) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $f(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n, F(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^m; t \in [0,T]; \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]; A_0(t), B_0(t), A_{01}(t,\varepsilon), B_{01}(t,\varepsilon)$ -равномерно ограниченные коэффициенты.

Вектор-функция $x(t,\varepsilon)$ называется вектором состояний системы, $f(t,\varepsilon)$- входной и $F(t,\varepsilon)$- выходной функциями, соответственно.

Систему (1), (2) будем называть полностью наблюдаемой (идентифицируемой по Калману), если по реализуемым, наблюдаемым входной и выходной функциям состояние системы определяется однозначно. При исследовании полной наблюдаемости возмущенной системы (1), (2) используется метод каскадной декомпозиции исходного пространства, то есть поэтапного перехода к системам в подпространствах, вполне аналогичным исходной. Этот метод применялся ранее для исследования полной наблюдаемости и полной управляемости различных систем [1] - [3]. Рассматривается дифференциально-алгебраическая нестационарная предельная система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = B_0(t)x(t) + f(t), \tag{3}$$

$$F(t) = A_0(t)x(t). \tag{4}$$

Матрице $A_0(t)$: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ соответствуют разложения:

$$\mathbb{R}^n = KerA_0(t) + CoimA_0(t), \mathbb{R}^m = CokerA_0(t) + ImA_0(t), \tag{5}$$

с проекторами $P_0(t)$ и $Q_0(t)$ на подпространства $KerA_0(t)$ и $CokerA_0(t)$, соответственно. Осуществляется переход от системы (3), (4) к эквивалентной совокупности соотношений:

$$Q_0(t)F(t) = 0, \tag{6}$$

$$x(t) = A_0^-(t)F(t) + x_1(t) \tag{7}$$

и редуцированной системе первого шага расщепления:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = B_1(t)x_1(t) + f_1(t), \tag{8}$$

$$F_1(t) = A_1(t)x_1(t), \tag{9}$$

где $x_1(t) = P_0(t)x(t)$. Установлено [3] , что при выполнении условий:
1) $P_0(t), P_1(t) \in C^1[0,T]$;
2) $A_0^-(t)F(t), A_1^-(t)F_1(t) \in C^1[0,T]$;
3) $KerA_1(t) = \{0\}\,, \forall t \in [0,T]$;
предельная система является полностью наблюдаемой, при этом функция состояния единственным образом определяется по формуле:
$x(t) = A_0^-(t)F(t) + A_1^-(t)F_1(t)$,
а входная и выходная функции связаны соотношением:

$$\frac{d}{dt}\left(A_0^-(t)F(t) + A_1^-(t)F_1(t)\right) = B(t)(A_0^-(t)F(t) + A_1^-(t)F_1(t)) + f(t).$$

В данной работе устанавливаются условия, при выполнении которых из полной наблюдаемости предельной системы (3),(4) с инъективной матрицей $A_1(t)$ следует полная наблюдаемость возмущенной системы (1), (2). Выводится формула для функции состояния возмущенной системы (1), (2). Устанавливается вид соотношений, которым необходимо должны удовлетворять входная и выходная функции, для реализации процесса, описываемого возмущенной системой (1), (2).

Литература

1. Zubova S.P. On polynomial solutions of the linear stationary control system/ S.P. Zubova, L.H. Trung, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. 2008. T.69. 11. - C. 1852-1858.

2. Зубова С.П. Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов.- 2010. Том 15, вып 6. - С. 1678-1679.

3. Зубова С.П. Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально-алгебраической системы/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Воронежского государственного технического университета. Воронеж. - 2010. Том 6. № 82010 г. - С. 82-86.

Об операторах с многомерными частными интегралами в пространствах $C(D)$

А.И. Иноземцев
(Липецк, ЛГПУ; inozemcev.a.i@gmail.com)

Работа содержит условия действия и непрерывности оператора

$$K = \sum_{i=1}^{2^n} K_i, \tag{1}$$

где операторы K_i определяются равенствами

$$(K_1x)(t) = k_1(t)x(t),$$

$$(K_ix)(t) = \int\limits_{D_i} k_i(t, S_i)x(s_i)\, dS_i,\ 1 < i < 2^n,$$

$$(K_{2^n}x)(t) = \int\limits_{D} k_{2^n}(t, \tau)x(\tau)\, d\tau,\ i = 2^n,$$

$k_i\colon D \times D_i \to R$ — измеримые функции, интегралы понимаются в смысле Лебега ($n \geqslant 2$), $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — вектор n -мерного пространства Лебега, $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_{2^n}\}$ — совокупность всех подмножеств множества $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, где $T_1 = \varnothing$, $T_2 = \{\tau_1\}, \ldots, T_{n+1} = \{\tau_n\}$, $T_{n+2} = \{\tau_1, \tau_2\}$ и т.д. S_i и dS_i — набор переменных τ_j и набор дифференциалов $d\tau_j$ соответственно из i-го подмножества T_i множества $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$. Вектор s_i получается заменой компонент вектора t соответствующими элементами S_i. D_i — декартово произведение множеств, на которых определены $\tau_i \in T_i$.

В случае $n = 2$ получим

$$(K_1x)(t) = k_1(t_1, t_2)x(t_1, t_2), \qquad (K_2x)(t) = \int\limits_{D_2} k_2(t_1, t_2, \tau_1)x(\tau_1, t_2)\, d\tau_1,$$

$$(K_3x)(t) = \int\limits_{D_3} k_3(t_1, t_2, \tau_2)x(t_1, \tau_2)\, d\tau_2, \quad (K_4x)(t) = \iint\limits_{D} k_4(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)x(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2,$$

где $D = D_2 \times D_3$. Систематическое изложение теории линейных операторов K с частными интегралами при $n = 2$ в различных функциональных пространствах содержится в работах А.С. Калитвина, П.П. Забрейко, В.А. Калитвина, Ю. Аппелля, Е.В. Фроловой и др. Оператор с частными интегралами (1) отличается от рассмотренных в [1], [2], [3] операторов, так как помимо операторов, которые интегрируются по одной и двум переменным, содержит при $n > 2$ операторы, которые интегрируются по трем и более переменным.

Пусть D — компакт, $C\,(D)$ — пространство непрерывных на D функций с нормой $\|x\| = \max\limits_{t \in D} |x\,(t)|$. $C\,(D)$ — банахово пространство.

Будем рассматривать свойства оператора (1) в $C\,(D)$. Для этого оператора справедлив аналог теоремы Банаха о непрерывности интегрального оператора.

Теорема 1. *Если оператор K действует в $C\,(D)$, то он непрерывен.*

Определение. Измеримые функции $k_i(t, S_i)$ называются непрерывными в целом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|t - t^0\| < \delta$ вытекает неравенство

$$\int\limits_{D_i} |k_i(t, S_i) - k_i(t^0, S_i)|\, dS_i < \varepsilon,$$

и интегрально ограниченными, если

$$\sup_D \int\limits_{D_i} |k_i(t, S_i)|\, dS_i = L_i < \infty.$$

Теорема 2. *Пусть функция $k_1(t)$ непрерывна на D, а ядра $k_i(t, S_i)$ непрерывны в целом и интегрально ограничены. Тогда K является непрерывным линейным оператором на $C(D)$.*

Непрерывность в целом ядер $k_i(t, S_i)$ $1 < i \le 2^n$ выполняется, если $k_i(t, S_i)$ — непрерывные по совокупности переменных функции.

Теорема 3. *Пусть $\|k_i(t, \cdot)\|_{L^{p_i}} \le A_i < \infty$, $1 < i \le 2^n$, где $t \in D$, $\forall i$ $1 < p_i < \infty$, A_i — некоторые постоянные, и пусть ядра $k_i(t, S_i)$ имеют разрывы только вдоль конечного числа поверхностей $\tau_{S_i} = \varphi_{S_i}(t)$, где τ_{S_i} — набор τ_j из подмножества T_i множества $\{\tau_i, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, $\varphi_{S_i}(t)$ — набор непрерывных функций $\varphi^j_{S_i}(t)$ таких, что $T_i \ni \tau_j = \varphi^j_{S_i}(t)$. Тогда ядра $k_i(t, S_i)$ непрерывны в целом и интегрально ограничены.*

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro—Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

3. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегалами. C-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004. — 195 с.

Солитонные решения нелинейного уравнения диффузии

В.М. Ищенко

(Ставрополь, СтаГУ, ishchenko_vm@mail.ru)

Методы решения нелинейных уравнений с частными производными тесно связаны с теорией солитонов [1]. Рассмотрим уравнение

$$\gamma q_x + k(\ln q)_{xx} - 2f_x = q_t, \tag{1}$$

описывающее процессы с нелинейной диффузией [2]. Здесь k и γ – постоянные величины, $f(x,t)$ и $u(x,t)$ – функции.

Умножим обе части (1) на q^2:

$$\gamma q^2 q_x + k\left(q_{xx} q - q_x^2\right) = \left(q_t + 2f_x\right) q^2, \tag{2}$$

где функция описывает некоторое возмущение.

Теорема 1. *Если решение уравнения*

$$\gamma q^2 q_x + k\left(q_{xx} q - q_x^2\right) = \left(q_t + 2f_x\right) q^2$$

имеет вид одиночного солитона

$$q = \frac{ae^{\tau_1}}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^2},$$

где $\tau_1 = k_1x + r_1t + \eta_1$, k_1, r_1, η_1, a *—* $const$, *то возмущение* $f(x,t)$ *представляет собой кинк или антикинк*:

$$f(x,t) = \frac{a\gamma k_1 - 2kk_1^2}{4k_1} + \frac{kk_1}{(e^{\tau_1}+1)}.$$

Доказательство. При $n = 1$ искомую функцию q будем считать заданной в солитонном виде $q = \frac{ae^{\tau_1}}{(e^{\tau_1}+1)^2}$, найдем возмущение $f(x,t)$, при котором уравнение (2) обращается в верное тождество.

Из уравнения (2) следует, что

$$f = \frac{1}{2}\gamma q + \frac{k}{2}\left(\ln q\right)_x - \frac{1}{2}\int q_t dx. \tag{3}$$

Нам остается лишь подставить q в уравнение (3) и выполнить ряд вычислений.

Рассмотрим эти вычисления отдельно:

$$q_x = \frac{ak_1e^{\tau_1}\left(e^{2\tau_1}+2e^{\tau_1}+1\right) - \left(2k_1e^{2\tau_1}+2k_1e^{\tau_1}\right)ae^{\tau_1}}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^4} =$$
$$= \frac{ak_1e^{3\tau_1}+2ak_1e^{2\tau_1}-2ak_1e^{3\tau_1}-2ak_1e^{2\tau_1}+ak_1e^{\tau_1}}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^4} =$$
$$= \frac{ak_1e^{\tau_1}-ak_1e^{3\tau_1}}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^4} = \frac{ak_1e^{\tau_1}\left(1-e^{\tau_1}\right)}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^3}; \tag{4}$$

Используя найденные значения, определим

$$\left(\ln q\right)_x = \frac{q_x}{q} = \frac{ak_1e^{\tau_1}\left(1-e^{\tau_1}\right)}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^3}\cdot\frac{\left(e^{\tau_1}+1\right)^2}{ae^{\tau_1}} = \frac{k_1\left(1-e^{\tau_1}\right)}{\left(e^{\tau_1}+1\right)} \tag{5}$$

и третье слагаемое в равенстве (3)

$$\int q_t dx = \int \frac{ar_1e^{\tau_1}\left(1-e^{\tau_1}\right)}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^3}dx = ar_1\int\frac{e^{\tau_1}}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^3}dx - ar_1\int\frac{e^{2\tau_1}}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^3}dx =$$
$$= \frac{ar_1}{k_1}\int\left(e^{\tau_1}+1\right)^{-3}d\left(e^{\tau_1}+1\right) - \frac{ar_1}{2k_1}\int d\left(\frac{e^{\tau_1}}{e^{\tau_1}+1}\right)^2 =$$
$$= \frac{ar_1}{2k_1}\cdot\frac{1}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^2} - \frac{ar_1}{2k_1}\cdot\frac{e^{2\tau_1}}{\left(e^{\tau_1}+1\right)^2}. \tag{6}$$

Подставляя (5), (6) в уравнение (3), получим искомое возмущение

$$f = \frac{2k_1\gamma ae^{\tau_1} + 2kk_1^2\left(1-e^{2\tau_1}\right) + ar_1\left(1+e^{2\tau_1}\right)}{4k_1\left(e^{\tau_1}+1\right)^2}.$$

Преобразуем последнее равенство

$$f=\frac{2\gamma k_1 a e^{\tau_1}+2kk_1^2-2kk_1^2e^{2\tau_1}+ar_1+ar_1e^{2\tau_1}}{4k_1\left(e^{\tau_1}+1\right)^2}=$$
$$=\frac{2\gamma k_1 a\left(e^{\tau_1}+1\right)-2\gamma k_1 a+2kk_1^2+ar_1+e^{2\tau_1}\left(ar_1-2kk_1^2\right)}{4k_1\left(e^{\tau_1}+1\right)^2}=$$
$$=\frac{\gamma a}{2\left(e^{\tau_1}+1\right)}+\frac{e^{2\tau_1}\left(ar_1-2kk_1^2\right)-\left(ar_1-2kk_1^2\right)+2ar_1-2\gamma k_1 a}{4k_1\left(e^{\tau_1}+1\right)^2}=$$
$$=\frac{\gamma a}{2\left(e^{\tau_1}+1\right)}+\frac{a(r_1-\gamma k_1)}{2k_1\left(e^{\tau_1}+1\right)^2}+\frac{\left(e^{\tau_1}-1\right)\left(ar_1-2kk_1^2\right)}{4k_1\left(e^{\tau_1}+1\right)}=$$
$$=\frac{\gamma a}{2\left(e^{\tau_1}+1\right)}+\frac{ar_1-2kk_1^2}{4k_1}-\frac{\left(ar_1-2kk_1^2\right)}{2k_1\left(e^{\tau_1}+1\right)}+\frac{a\left(r_1-\gamma k_1\right)}{2k_1\left(e^{\tau_1}+1\right)^2}.$$

Учитывая результаты, полученные ранее, а именно $r_1=\gamma k_1$, имеем требуемое равенство.

Теорема 2. *Если решение уравнения*

$$\gamma q^2 q_x+k\left(q_{xx}q-q_x^2\right)=\left(q_t+2f_x\right)q^2$$

имеет двусолитонный вид

$$q=\frac{a\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)^2},$$

где $\tau_i=k_i x+r_i t+\eta_i, k_i,\ r_i,\ \eta_i,\ a-const,\ i=1,\ 2,$ *то возмущение* $f(x,\ t)$ *представляет собой функцию:*

$$f(x,t)=-\frac{k}{2}\cdot\frac{k_1e^{\tau_1}+k_2e^{\tau_2}}{e^{\tau_1}+e^{\tau_2}}+k\frac{k_1e^{\tau_1}+k_2e^{\tau_2}}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}\right)}.$$

Доказательство. При $n=2$ выберем $q=\dfrac{a\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)^2}$ и определим каждый член уравнения (3)

$$q_x=\frac{\left(ak_1e^{\tau_1}+ak_2e^{\tau_2}\right)\left(e^{2\tau_1}+e^{2\tau_2}+1+2e^{\tau_1+\tau_2}+2e^{\tau_1}+2e^{\tau_2}\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)^4}-$$
$$-\frac{a\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}\right)\left(2k_1e^{2\tau_1}+2k_2e^{\tau_2}+2\left(k_1+k_2\right)e^{\tau_1+\tau_2}+2k_1e^{\tau_1}+2k_2e^{\tau_2}\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)^4}=$$
$$=\frac{ak_1\left(-e^{3\tau_1}-2e^{2\tau_1+\tau_2}-e^{\tau_1+2\tau_2}+e^{\tau_1}\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)^4}+\frac{ak_2\left(-e^{3\tau_2}-e^{2\tau_1+\tau_2}-2e^{\tau_1+2\tau_2}+e^{\tau_2}\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)^4}=$$
$$=-\frac{a\left(k_1e^{\tau_1}+k_2e^{\tau_2}\right)\left(\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}\right)^2-1\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)^4}=-\frac{a\left(k_1e^{\tau_1}+k_2e^{\tau_2}\right)\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}-1\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)^3},$$

$$q_t=-\frac{a\left(r_1e^{\tau_1}+r_2e^{\tau_2}\right)\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}-1\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)^3}, \qquad (7)$$

$$\left(\ln q\right)_x=-\frac{\left(k_1e^{\tau_1}+k_2e^{\tau_2}\right)\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}-1\right)}{\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}+1\right)\left(e^{\tau_1}+e^{\tau_2}\right)}. \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (3), получим

$$f = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma a \left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2}\right)}{\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} + 1\right)^2} - \frac{k}{2} \cdot \frac{\left(k_1 e^{\tau_1} + k_2 e^{\tau_2}\right)\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} - 1\right)}{\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} + 1\right)\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2}\right)} + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{a\left(r_1 e^{\tau_1} + r_2 e^{\tau_2}\right)\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} - 1\right)}{\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} + 1\right)^3} dx. \quad (9)$$

Используя связь между r_i и k_i для возмущенного случая $r_i = \gamma k_i$, рассмотрим последнее слагаемое уравнения (9)

$$\int \frac{a\left(\gamma k_1 e^{\tau_1} + \gamma k_2 e^{\tau_2}\right)\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} - 1\right)}{\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} + 1\right)^3} dx = \int \frac{a\left(\gamma k_1 e^{\tau_1} + \gamma k_2 e^{\tau_2}\right)}{\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} + 1\right)^2} dx - \\ - 2 \int \frac{a\left(\gamma k_1 e^{\tau_1} + \gamma k_2 e^{\tau_2}\right)}{\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} + 1\right)^3} dx = -\frac{a\gamma}{e^{\tau_1} + e^{\tau_2} + 1} + \frac{a\gamma}{\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} + 1\right)^2}. \quad (10)$$

Подстановка (10) в (9) определяет возмущение

$$f(x,t) = -\frac{k}{2} \cdot \frac{k_1 e^{\tau_1} + k_2 e^{\tau_2}}{e^{\tau_1} + e^{\tau_2}} + k \frac{k_1 e^{\tau_1} + k_2 e^{\tau_2}}{\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2} + 1\right)\left(e^{\tau_1} + e^{\tau_2}\right)},$$

при котором уравнение (2) имеет 2-солитонное решение.

Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. - М.: Мир, 1987. - 478 с.

2. Журавлев В.М. Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией. Точно решаемые модели. – Ульяновск, Изд-во УлГУ, 2001. – 256 с.

О треугольных алгебрах операторов, действующих в интерполяционных семействах пространств

М.В. Кабанко

(Курск, КурГУ; kabankom@mail.ru)

Известно что, что интерполяционные пространства, построенные для семейств пространств (для случая больше двух пространств), по вещественным $K-$ и $J-$ методам не совпадают, в отличие от случая пар пространств (см. [2], [3]). В.И. Овчинников высказал гипотезу, что такие экстремальные свойства, связаны с простым устройством алгебр операторов, действующих в этих семействах. Приведенные ниже примеры частично подтверждают эту гипотезу.

Пусть $\{H_0, H_1\}$ – вложенная гильбертова пара, то есть $H_0 \hookrightarrow H_1$. Рассмотрим интерполяционной пространство построенной по вещественному методу $(H_0, H_1)_{\theta,\infty}$, где $0 \le \theta \le 1$. Выберем вектор $a \in (H_0, H_1)_{\theta,\infty}$ такой, что a не является элементом пространства H_1 и обозначим H_2 – одномерное пространство, порождённое вектором a с нормой из пространства H_0. Рассмотрим тройку пространств $\overrightarrow{H} = \{H_0, H_1, H_2\}$. В силу построения пространства H_2, пересечение этой тройки совпадает с $\{0\}$ (см. [2]).

Предложение 1. Алгебра операторов, действующих в указанной выше тройке пространств $\overrightarrow{H} = \{H_0, H_1, H_2\}$, совпадает с полем скаляров.

Доказано, что существуют семейства даже бесконечномерных пространств, с нулевым пересечением, в которых алгебра операторов, совпадает с множеством скалярных операторов [1]. Если же пересечение семейства конечномерно, то оператор, действующий в этом семействе, раскладывается в сумму скалярного и оператора, отображающего сумму пространств в пересечение. Более того, есть примеры семейств весовых гильбертовых пространств, в которых алгебры операторов имеют похожее строение.

Рассмотрим гильбертовы пары $\{l_2(\omega), l_2(\omega^{-1})\}$, где $\omega_j = 2^{-2^j}$ и $\{l_2(u), l_2(v)\}$, где

$$u_{2n-1} = 2^{2^{2n-1}},\ u_{2n} = 2^{2^{2n}},\ u_{2n+1} = 2^{-2^{2n+1}},\ u_{2n+2} = 2^{-2^{2n+2}};$$

$$v_{2n-1} = 2^{-2^{2n-1}},\ v_{2n} = 2^{-2^{2n}},\ v_{2n+1} = 2^{2^{2n+1}},\ v_{2n+2} = 2^{2^{2n+2}}.$$

Предложение 2. Операторы, действующие в четвёрке пространств $\overrightarrow{H} = \{l_2(\omega),$ $l_2(\omega^{-1})$, $l_2(u)$, $l_2(v)\}$, представимы в виде суммы диагонального оператора и треугольных операторов, один из которых отображает сумму семейства в пространство l_2, а второй пространство l_2 в пересечение.

Литература

1. Кабанко М.В. Об алгебрах операторов, совпадающих с полем скаляров. // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. - Курск, 2008. - № 4(8) URL: http://scientific-notes.ru/pdf/008-06.pdf № государственной регистрации 0421000068/0052 .

2. Sparr G. Interpolation of several Banach spaces // Ann. Math. Pura Appl. V. 99. 1974. P.247-400.

3. Cwikel M., Janson S. Real and complex interpolation methods for finite and infinite families of Banach spaces // Advances in Math. V.66. 1987. P.234-290.

Об (A, ψ)-уплотняющих отображениях

С.Н. Калабухова

(Воронеж, ВГПУ; Sv-tik.86@mail.ru)

(A, ψ)-уплотняющие отображения

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый линейный непрерывный сюръективный оператор, $\Gamma(A) \subset E_1 \times E_2$ – график оператора A. Пусть $t : \Gamma(A) \to E_1$ – отображение проектирования на область определения оператора A, т.е. $t(x, y) = x$.

Пусть в E_2 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ.

Определение 1. *Будем говорить, что однозначное отображение $f : D(f) \subset E_1 \to E_3$ является (A, ψ)-уплотняющим, если:*
1) для любого множества $\Omega \subset (D(A) \cap D(f))$ из неравенства $\psi(A(\Omega)) \le \psi(f(\Omega))$ следует, что $\psi(A(\Omega)) = 0$;
2) если $X = t^{-1}(D(f))$, то композиция $f \circ t : X \to E_3$ является непрерывным отображением.

Пусть E_1, E_2 и E_3 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый сюрьективный линейный оператор, $B : D(B) \subset E_1 \to E_3$ – замкнутый линейный оператор.

Определение 2. *Будем говорить, что оператор B подчинен оператору A, если:*
(1) $D(A) \subset D(B)$;
(2) для любого $x \in D(A)$ справедливо неравенство $||A(x)|| \geq ||B(x)||$.

Пусть E_1, E_2 и E_3 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ - замкнутый линейный сюръективный оператор. Пусть отображение $g : X \subset D(A) \to E_3$.

Определение 3. *Будем говорить, что отображение g - вполне непрерывно по модулю отображения A (или A-вполне непрерывно), если оно непрерывно и для любого ограниченного множества $Q \subset E_2$ и любого ограниченного множества $M \subset X$ множество $\overline{g(M \cap A^{-1}(Q))}$ является компактным в E_3. Пустое множество по определению считается компактным.*

Справедливо следующее условие A-полной непрерывности отображения g.

Известно, что множество $D(A)$ можно превратить в бенахово пространство, наделив его нормой графика: $||x||_{D(A)} = ||x||_{E_1} + ||A(x)||_{E_2}$. Пусть банахово пространство E — это множество $D(A)$, снабженное этой нормой. Очевидно, что отображение вложения $j : E \to E_1$ является непрерывным. Пусть $X \subset D(A)$. Обозначим $\tilde{X} = j^{-1}(X)$ и рассмотрим отображение $\tilde{g} : \tilde{X} \to E_3$, $\tilde{g}(x) = g(j(x))$.

Предложение 1. *Непрерывное отображение g является A-вполне непрерывным, тогда и только тогда, когда отображение $\tilde{g}$ является вполне непрерывным.*

Следствие 1. *Пусть E_1, E_2, E_3 и E_4 — банаховы пространства. Если отображение $g : X \subset E_1 \to E_3$ – A-вполне непрерывное, $f_1 : E_3 \to E_4$ является непрерывным отображением , то отображение $f_1 \circ g : X \subset E_1 \to E_4$ является A-вполне непрерывным.*

Следствие 2. *Если отображение g является A-вполне непрерывным, то для любого ограниченного множества $Y \subset X$ такого, что множество $A(Y)$ является ограниченным в E_2, множество $g(Y)$ является относительно компактным.*

Рассмотрим некоторые примеры уплотняющих отображений.

Пример 1. Предположим, что оператор B подчинен оператору A, множество X – ограниченное подмножество в $D(A)$ такое, что множество $A(X)$ также ограничено в E_2. Пусть $\varphi : X \times E_3 \to E_2$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует такое число $k \in (0,1)$, что для любой точки $x \in X$ и любых $y_1, y_2 \in E_3$ справедливо неравенство $||\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)|| \leq k||y_1 - y_2||$;

2) для любого $y \in E_3$ отображение $\varphi(\cdot, y) : X \to E_2$ является A-вполне непрерывным.

Рассмотрим отображение $f : X \to E_3$, $f(x) = \varphi(x, B(x))$. Пусть в пространстве E_2 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ.

Предложение 2. *При сделанных предположениях отображение f является (A, χ)-уплотняющим отображением.*

Пример 2. Пусть, как и раньше, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый сюрьективный линейный оператор, $B : D(B) \subset E_1 \to E_3$ – замкнутый оператор, подчиненный оператору A. Пусть в пространстве E_2 задана мера некомпактности Куратовского α. Пусть множество X является ограниченным подмножеством в $D(A)$ таким, что множество $A(X)$ также ограничено в E_2. Предположим, что непрерывное отображение $f_1 : X \to E_1$, удовлетворяет следующему условию:

существует такое число $k \in (0,1)$, что для любых точек $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$||f_1(x_1) - f_1(x_2)|| \leq k||B(x_1) - B(x_2)||,$$

то есть f_1 является B-сжимающим отображением.

Примером такого отображения является отображение $f_1 = q \circ B$, где $q : E_3 \to E_1$ – сжимающее отображение.

Пусть $f_2 : X \to E_2$ — A-вполне непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Предложение 3. *При сделанных предположениях отображение f является (A, α)-уплотняющим отображением.*

Уравнения с (A, ψ)-уплотняющими отображениями

Пусть E_1, E_2 — банахавы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — замкнутый линейный оператор. Пусть в E_2 задана монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная, вещественная, правильная мера некомпактности ψ. Пусть $q : E_2 \to E_1$ — непрерывное отображение, правое обратное к отображению A. Рассмотрим ограниченное открытое множество $U \subset E_1$ и (A, ψ)-уплотняющее отображение $f : \overline{U} \to E_2$.

Лемма. *Пусть множество $V \subset E_2$ такое, что $q(V) \subset \overline{U}$. Тогда отображение $g = f \circ q : V \to E_2$ является ψ-уплотняющим.*

Пусть $x_0 \in D(A)$ – некоторая точка, $B_R[x_0] \subset E_1$ – замкнутый шар радиуса R с центром в x_0. Пусть отображение $f : B_R[x_0] \to E_2$ является (A, ψ)-уплотняющим отображением на любом ограниченном множестве $X \subset B_R[x_0]$ таком, что множество $A(X)$ является ограниченным в E_2.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) = f(x). \tag{1}$$

Теорема 1. *Если $||A(x_0) - f(x)|| \le \frac{R}{k}$, где $k > ||A^{-1}||$, то уравнение (1) имеет решение.*

Рассмотрим следствие вытекающее из теоремы 1. Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый сюръективный линейный оператор, $B : D(B) \subset E_1 \to E_3$ – замкнутый линейный оператор, подчиненный оператору A. Пусть $x_0 \in D(A)$, $B_R[x_0] \subset E_1$ – замкнутый шар радиуса $R > 0$. Пусть $\varphi : B_R[x_0] \times E_3 \to E_2$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любой точки $x \in B_R[x_0]$ и любых $y_1, y_2 \in E_3$ справедливо неравенство $||\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)|| \le k||y_1 - y_2||$;

2) для любого $y \in E_3$ отображение $\varphi(\cdot, y) : B_R[x_0] \to E_2$ является A-вполне непрерывным.

Следствие 1. *Если для любой точки $x \in B_R[x_0]$ существует число $k > ||A^{-1}||$ такое, что $||A(x_0) - \varphi(x, B(x))|| \le \frac{R}{k}$, то уравнение $A(x) = \varphi(x, B(x))$ имеет решение в шаре $B_R[x_0]$.*

Рассмотрим еще одно утверждение, вытекающее из теоремы 1. Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый сюръективный линейный оператор, $B : D(B) \subset E_1 \to E_3$ – замкнутый линейный оператор, подчиненный оператору A. Пусть $\varphi : E_1 \times E_3 \to E_2$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует такое число $k \in (0, 1)$, что для любой точки $x \in E_1$ и любых $y_1, y_2 \in E_3$ справедливо неравенство $||\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)|| \le k||y_1 - y_2||$;

2) для любого $y \in E_3$ отображение $\varphi(\cdot, y) : E_1 \to E_2$ является A-вполне непрерывным.

Рассмотрим отображение $f : D(A) \to E_2,\ f(x) = \varphi(x, B(x))$. Пусть в пространстве E_2 задана мера некомпактности Хаусдорфа χ. Нас будет интересовать разрешимость следующего уравнения:

$$A(x) = \varphi(x, B(x)). \tag{2}$$

Теорема 2. *Если существуют такие константы $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ что для любой точки $x \in E$ справедливо неравенство $||\varphi(x, y)|| \leq \alpha(||x|| + ||y||) + \beta$ и произведение $\alpha(||A^{-1}|| + 1) < 1$. Тогда уравнение (2) имеет решение.*

Литература

1. Калабухова С.Н. Об отображениях, уплотняющих относительно замкнутого оператора // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1092-11094.

Об операторах и уравнениях Вольтерра с частными интегралами

А.С. Калитвин
(Липецк, ЛГПУ; kalitvinas@mail.ru)

В работе рассматривается линейный оператор Вольтерра

$$(Vx)(t,s) = \int_0^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_0^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+ \int_0^t \int_0^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{1}$$

где $(t,s) \in D = [0,1] \times [0,1]$, l, m, n — заданные на $D \times [0,t], D \times [0,s], D \times [0,t] \times [0,s]$ соответственно функции и интегралы понимаются в смысле Лебега, а также указываются некоторые особенности, связанные с решением интегрального уравнения

$$\lambda x = Vx + f. \tag{2}$$

Наличие в правой части равенства (1) интегралов, в которых функция $x(t,s)$ интегрируется по части переменных (одномерымх частных интегралов), приводит к принципиальному отличию оператора V от обычных интегральных операторов Вольтерра

$$(Lx)(t) = \int_0^t l(t,\tau)x(\tau)d\tau,\ (Nx)(t,s) = \int_0^t \int_0^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

Например, оператор V с ненулевыми непрерывными ядрами l, m, n не является компактным ни в пространстве непрерывных по совокупности переменных функций, ни в пространствах L^p $(1 \leq p \leq \infty)$, тогда как обычные интегральные операторы Вольтерра L и N с непрерывными ядрами компактны в таких же пространствах функций одной и двух переменных соответственно.

Линейные операторы Вольтерра с одномерными частными интегралами исследовались в [1,2], в [3] изучались линейные и нелинейные операторы Вольтерра с одномерными и многомерными частными интегралами. Для изучаемых в этих работах линейных операторов получены условия обращения в нуль их спектрального радиуса.

При этом линейные операторы Вольтерра с частными интегралами рассматриваются в пространствах непрерывных функций, в пространствах L^p $(1 \le p \le \infty)$ и в банаховых идеальных пространствах (БИП), а линейные интегральные уравнения с такими операторами имеют единственное решение в рассматриваемых пространствах. Приводимый ниже пример показывает, что наряду с решениями в выбранных пространствах, уравнения Вольтерра с частными интегралами могут иметь решения, которые не принадлежат таким пространствам. Поэтому выбор заранее пространства, в котором отыскиваются решения уравнения Вольтерра с частными интегралами, может привести к потере решений.

Пусть функции l, m, n непрерывны на $D \times [0,t], D \times [0,s], D \times [0,t] \times [0,s]$ соответственно. При этом условии оператор V непрерывен в пространстве $C(D)$ - непрерывных на D функций и в пространствах $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$, а его спектральный радиус равен нулю: $r(V) = 0$ [1, 2]. Поэтому при каждом $\lambda \ne 0$ и любой функции $f \in C(D)$ уравнение (2) имеет единственное непрерывное решение.

Следующий пример показывает, что уравнение (2) может иметь несуммируемые решения.

Пусть в уравнении (2) $\lambda = 3$, $f(t,s) = 0$ на D, $l(t,s,\tau) = a(t,\tau)$, $m(t,s,\sigma) = a(s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = a(t,\tau)a(s,\sigma)$, где

$$a(u,v) = \begin{cases} 0, \text{ если } u = 0, \\ ve^{1/u^2-1}, \text{ если } 0 < v \le ue^{1-1/u^2}, \\ u, \text{ если } ue^{1/u^2-1} \le v \le 1. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется непрерывность функции $a(u,v)$. Тогда $r(V) = 0$, если оператор V рассматривается в $C(D)$ или в $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$. Поэтому уравнение $3x = Vx$ имеет в $C(D)$ и в $L^p(D)$ $(1 \le p \le \infty)$ только нулевое решение.

Функция

$$y(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } u = 0, \\ \frac{1}{u}, \text{ если } 0 < u \le 1, \end{cases}$$

является решением уравнения [1, с. 14]

$$y(u) = \int_0^u a(u,v)y(v)dv$$

и не суммируема. Легко убедиться, что функция $x(t,s) = y(t)y(s)$ есть несуммируемое решение уравнения $3x = Vx$, однако $x \in L^p(D)$ при $0 < p < 1$.

В приведенном примере оператор V не действует в пространстве $L^p(D)$ при $0 < p < 1$, но он действует в некотором его нетривиальном подпространстве, например, в множестве $E \subset L^p(D)$, элементы которого удовлетворяют почти всюду неравенству $|x(t,s)| \le \lambda y(t)y(s)$, где постоянная λ зависит от x. При этом $r(V) \ne 0$.

Пусть u_0 — некоторая положительная функция из $X = L^p(D)$ $(0 < p < 1)$, т.е. $u_0 \in X$ и $u_0(t,s) > 0$ почти всюду на D. Через E_{u_0} обозначим множество функций из X, удовлетворяющих неравенству $|x(t,s)| \le \lambda u_0(t,s)$, где постоянная λ зависит от x. E_{u_0} является банаховым пространством [5] относительно нормы

$$\|x\|_{E_{u_0}} = \inf\{\lambda : |x(t,s)| \le \lambda u_0(t,s), x \in L^p(D), 0 < p < 1\}.$$

Более того, E_{u_0} — совершенное и вполне неправильное идеальное пространство [6].

В рассмотренном выше примере пространство E является пространством E_{u_0} с функцией $u_0(t,s) = y(t)y(s)$, оператор V действует, следовательно, и непрерывен в этом пространстве [1], причем его спектральный радиус $r(V) \geq 3$. Отметим, что пространства $C(D)$ и $L^p(D)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ не вложены в $E_{u_0} = E$. Поэтому для нахождения множества решений уравнения (2) полезно использовать более широкие пространства, например, сумму пространств $G = L^p(D)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ и $H = E_{u_0}$.

Отметим, что под суммой Z БИП G и H с носителем D понимается множество функций z, представимых в виде суммы $g + h$, где $g \in G$, а $h \in H$. При этом Z является БИП [7] относительно нормы

$$\|z\| = \inf\{\|g\|_G + \|h\|_H : z = g + h, g \in G, h \in H\}.$$

Легко видеть, что оператор

$$(Vx)(t,s) = \int_0^t a(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_0^s a(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+ \int_0^t \int_0^s a(t,\tau)a(s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma \qquad (3)$$

действует в пространстве $Z = G + H$, если $G = L^p(D)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, а $H = E$, при этом его спектральный радиус удовлетворяет неравенству $r(V) \geq 3$. Тогда уравнение $3x = Vx + f$ с $f \in C(D)$ и оператором V, определяемым равенством (3), имеет в Z единственное непрерывное решение x_0 и бесконечное множество решений вида

$$x(t,s) = x_0(t,s) + cy(t)y(s),$$

где c — произвольная постоянная.

В заключение заметим, что свойства оператора (1) в пространствах E_{u_0} и $Z = G + H$ фактически не изучались. Отметим лишь два свойства, вытекающие из общей теории линейных операторов с частными интегралами в БИП [1, 8].

Пусть оператор (1) действует из E_{u_0} в E_{u_1}, где E_{u_1} определяется аналогично E_{u_0}, или действует из $Z = G + H$ в $Z_1 = G_1 + H_1$, где G_1 и H_1 — БИП с носителем D. Тогда оператор (1) непрерывен, а его регулярность [1, 8] означает действие в рассматриваемых пространствах оператора (1) с функциями $|l|, |m|, |n|$ вместо функций l, m, n.

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. – Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

2. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.

3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра - Фредгольма с частными интегралами. – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

4. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

5. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М.: Наука, 1966. – 500 с.

6. Забрейко П.П. Исследование интегральных операторов в идеальных пространствах. – Дисс....доктора физ.-матем. наук. – Воронеж, 1968. – 377 с.

7. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

8. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

Об оценке погрешности приближенного решения линейного частично интегрального уравнения

В.А. Калитвин

(Липецк, ЛГПУ; kalitvin@gmail.com)

1. Рассматривается обратимое в пространстве $C(D)$ - непрерывных на прямоугольнике $D = [a, b] \times [c, d]$ функций частично интегральное уравнение

$$x(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + f(t,s) \equiv (Lx)(t,s) + f(t,s), \tag{1}$$

где $l(t,s,\tau)$ и $f(t,s)$ - заданные на $D \times [a,b]$ и D соответственно непрерывные функции.

Хорошо известно [1], что L — не интегральный и не вполне непрерывный оператор в $C(D)$, а само интегральное уравнение (1) принципиально отличается от обычных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами. Поэтому применение к уравнению (1) разработанных методов исследования интегральных уравнений Фредгольма, включая приближенные и численные методы решения, требует обоснования. В частности, требует обоснования возможность применения к уравнению (1) метода механических квадратур, так как известные обоснования этого метода для интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными заданными функциями явно или неявно используют полную непрерывность интегральных операторов, содержащихся в уравнениях [2-4].

При приближенном или численном решении уравнения (1) используется квадратурная формула

$$\int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t,s,t_k)x(t_k,s) + \rho(t,s), \tag{2}$$

где функции $l(t,s,\tau)$ и $x(\tau,s)$ удовлетворяют условиям, при которых остаток $\rho(t,s)$ в квадратурной формуле (2) стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно $(t,s), \alpha_k \geq 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = b - a$. При этом за аналитическое приближение решения $x(t,s)$ уравнения (1) принимается функция

$$x_n(t,s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t,s,t_k)x_k(s) + f(t,s), \tag{3}$$

где $x_k(s)$ определяется при каждом $s \in [c,d]$ из системы

$$x_i(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t_i,s,t_k)x_k(s) + f(t_i,s), i = 1,\ldots,n. \tag{4}$$

Естественно возникает вопрос о сходимости в $C(D)$ x_n к x при $n \to \infty$ и оценке погрешности $\|x_n - x\|$ при замене x на x_n, где норма берется в $C(D)$.

Прежде, чем рассматривать эти вопросы, покажем, что при достаточно больших n формула (3) имеет смысл. Действительно, заменяя в (1) интеграл по формуле (2), получим обратимое в $C(D)$ уравнение

$$x(t,s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t,s,t_k) x(t_k,s) + f(t,s) + \rho(t,s). \tag{5}$$

Полагая в (5) $t = t_1, \ldots, t_n$, получим систему уравнений

$$x(t_i,s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t_i,s,t_k) x(t_k,s) + f(t_i,s) + \rho(t_i,s), i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

относительно точных значений $x(t_1,s), \ldots, x(t_n,s)$. В силу обратимости уравнения (5) $x(t_1,s), \ldots, x(t_n,s)$ определяются однозначно и система (6) обратима. Так как $\rho(t,s) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно (t,s), то в силу устойчивости обратимости относительно достаточно малых возмущений система (4) обратима при достаточно больших n. Таким образом, при достаточно больших n система (4) имеет единственное решение $(x_1(s), \ldots, x_n(s))$ и формула (3) имеет смысл.

Следующая теорема содержит условия сходимости x_n к x и оценку погрешности замены точного решения x уравнения (1) на x_n.

Теорема. Если уравнение (1) обратимо в $C(D)$ и остаток $\rho(t,s)$ квадратурной формулы (2) стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно относительно (t,s), то $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$ и справедлива оценка

$$\|x_n - x\| \le p\|\rho\|, \tag{7}$$

где p — некоторая постоянная, а $\|\cdot\|$ обозначает норму в $C(D)$.

Доказательство. Неравенство (7) вытекает из следующей оценки

$$|x_n(t,s) - x(t,s)| = |\sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t,s,t_k) x_k(s) + f(t,s) - \int\limits_a^b l(t,s,\tau) x(\tau,s) d\tau - f(t,s)| \le$$

$$\le |\sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t,s,t_k) x_k(s) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t,s,t_k) x(t_k,s)| +$$

$$+ |\sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t,s,t_k) x(t_k,s) - \int_a^b l(t,s,\tau) x(\tau,s) d\tau| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k l(t,s,t_k)| |x_k(s) - x(t_k,s)| + |\rho(t,s)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k l(t,s,t_k)| |\rho(t_k,s)| + \rho(t,s) \le$$

$$\le \|\rho\| \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k l(t,s,t_k)| + \|\rho\| \le p\|\rho\|,$$

где
$$p \geq 1 + \| \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k l(t,s,t_k)| \|. \tag{8}$$
Так как в квадратурной формуле (2) $\rho(t,s) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $(t,s) \in D$, то это означает, что $\|\rho\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и (7) следует, что $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Пусть $\max\limits_{D\times[a,b]} |l(t,s,\tau)| = M$. Тогда в неравенстве (8) за p можно взять число $1 + M(b-a)$. В этом случае оценка погрешности (7) примет вид
$$\|x_n - x\| \leq (1 + M(b-a))\|\rho\|. \tag{9}$$
При решении системы (4) вместо $x_i(s)$ обычно находятся $\tilde{x}_i(s) = x_i(s) + \gamma_i(s)(i = 1,\ldots,n)$, где $\gamma_i(s)$ - некоторые невязки. В этом случае формула (3) приобретает вид
$$\tilde{x}_n(t,s) = x_n(t,s) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k l(t,s,t_k)\gamma_k(s).$$
Так же, как в доказательстве теоремы, показывается, что
$$\|\tilde{x}_n - x\| \leq p\|\rho\| + \|\gamma\|, \tag{10}$$
где p удовлетворяет неравенству (8), а
$$\|\gamma\| = \| \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k l(t,s,t_k)\gamma_k(s)| \|.$$
Таким образом, при малых невязках $\gamma_1(s),\ldots,\gamma_n(s)$ и достаточно больших n точное решение x уравнения (1) может быть заменено на $\tilde{x}_n$ с погрешностью, удовлетворяющей неравенству (10).

Аналогично (9), устанавливается оценка
$$\|\tilde{x}_n - x\| \leq (1 + M(b-a))\|\rho\| + M(b-a)\delta, \tag{11}$$
где $\delta = max(\|\gamma_1\|,\ldots,\|\gamma_n\|)$, а $\|\gamma_i\| = \max\limits_{[c,d]} |\gamma_i(s)|(i = 1,\ldots,n)$.

Из (10) и (11) видно, что достаточная малость остатка квадратурной формулы (2) и малость невязок $\gamma_1(s),\ldots,\gamma_n(s)$ приводит к малой погрешности замены точного решения уравнения функцией $\tilde{x}_n$.

2. Рассмотрим обратимое в $C(D)$ частично интегральное уравнение (1), в котором $l(t,s,\tau)$ и $f(t,s)$ — непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными до порядка q включительно по переменным t,τ и t соответственно функции. При этих условиях подынтегральная функция в (1) имеет частные производные по t и τ до порядка q включительно, непрерывные вместе с этой функцией по совокупности переменных, а единственное решение $x(t,s)$ уравнения (1) принадлежит $C(D)$ и имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные по переменной t до порядка q включительно. В силу непрерывности функции $(l(t,s,\tau)x(\tau,s))^{(q)}_{\tau}$ на $D \times [a,b]$ найдется такое число A, что $|l(t,s,\tau)x(\tau,s))^{(q)}_{\tau}| \leq A$. Если теперь квадратурная формула (2) точна для всех многочленов степени $q-1$, то в силу [6] справедлива оценка
$$|\rho(t,s)| \leq \frac{(b-a)^{q+1}C_q A}{n^q}.$$

Тогда $\|\rho\| \leq (b-a)^{q+1}C_qLn^{-q}$. Отсюда и из неравенств (7), (9), (10), (11) вытекают следующие оценки:

$$\|x_n - x\| \leq \frac{(b-a)^{q+1}C_qA}{n^q},$$

$$\|x_n - x\| \leq \frac{(1+M(b-a))p(b-a)^{q+1}C_qA}{n^q},$$

$$\|\tilde{x}_n - x\| \leq \frac{p(b-a)^{q+1}C_qA}{n^q} + \|\gamma\|,$$

$$\|\tilde{x}_n - x\| \leq \frac{(1+M(b-a))(b-a)^{q+1}C_qA}{n^q} + \delta.$$

Отметим, что при $a = 0$ и $b = 1$ постоянные q и C_q для квадратурных формул прямоугольников, трапеций, Симпсона определяются, соответстенно, равенствами [6]:

$$q = 2, C_2 = \frac{1}{24}; q = 2, C_2 = \frac{1}{12}; q = 4, C_4 = \frac{1}{2880}.$$

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York –Basel: Marcel Dekker, 2000. -560 p.

2. Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений. -М.:Наука, 1969. -456 с.

3. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ. —Петербург, 2006. —288 с.

4. Вайникко Г.М. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. -ТарТу, 1970.

5 Като Т. Теория возмущений линейных операторов. —М.:Мир, 1970. —740 с.

6. Никольский С.М. Квадратурные формулы. — М.:Наука, 1988. -256 с.

Целочисленные решетки переменных действия некоторых интегрируемых гамильтоновых систем

Е.О. Кантонистова

(Москва; kysin@rambler.ru)

В последние годы изучение гамильтоновых систем становится все более актуальным, но существует еще много нерешенных задач в этой ветви математики, поэтому исследования в данной области вполне обоснованны. В данной работе применены вычисления на компьютере, с помощью которых получены картинки решеток переменных действия некоторых интегрируемых гамильтоновых систем.

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему (M^{2n}, ω, H) с n степенями свободы. Пусть $F_1, ..., F_n$ - ее первые интегралы, $F_1 = H$. Пусть $\Phi = (F_1, \ldots, F_n)$: $M^{2n} \to \mathcal{R}^n$ - *отображение момента*, Σ -бифуркационная диаграмма отображения момента. Согласно теореме Лиувилля, в окрестности компактного связного регулярного множества уровня $T_\xi = \Phi^{-1}(\xi)$, $\xi \in \mathcal{R}^n$, существуют канонические переменные $(I_1, \ldots, I_n, \varphi_1 mod 2\pi, \ldots, \varphi_n mod 2\pi)$, называемые *переменными действие-угол*, причем переменные действия $I_1, ..., I_n$ являются функциями от первых интегралов.

Первым этапом данной работы стал поиск и вычисление явных формул переменных действия для обобщенного случая Лагранжа в движении твердого тела, для системы сферического маятника, а также для комплексной гамильтоновой системы, заданной полиномом $f(z, w) = z^2 + w^3$.

Определение 1. Множество точек в $\Phi(M^{2n})\backslash\Sigma \subset \mathcal{R}^n$, образованных пересечением n гиперповерхностей уровня функций $I_1 = I_1(\xi), ..., I_n = I_n(\xi)$ с целыми значениями, назовем *целочисленной решеткой* $\Re$ *переменных действия*(далее просто *решеткой*).

На втором этапе, зная явные формулы для переменных действия, строились решетки для исследуемых случаев.

Определение 2. Осуществим однократный обход по замкнутому пути вокруг внутренней особой точки. Начальный базис решетки e_1, e_2 и конечный базис e'_1, e'_2 связаны невырожденным линейным преобразованием с матрицей M. Эта матрица называется *матрицей монодромии* системы.

В результате третьего этапа работы был создан алгоритм обхода вокруг внутренних особых точек исследуемых систем и подсчитаны соответствующие матрицы монодромии.

Литература

1. А.В. Болсинов, А. Т. Фоменко, "Интегрируемые гамильтоновы системы", Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 1999.

2. B. Zhilinskii, "Interpretation of quantum Hamiltonian monodromy in terms of lattice defects", Acta Appl.Math.2005.87.281–307

3. О.Е. Орел, Ш. Такахаши, "Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева–Чаплыгина методами компьютерного анализа", Матем.сб.1996.187, 1.95–112.

4. R.H. Cushman, J.J. Duistermaat, "The Quantum Mechanical Spherical Pendulum", Bull.Amer.Math.Soc.(N.S.) Volume 19, Number 2(1988),475–479

5. R.H. Cushman, L.M. Bates, "Global aspects of classical integrable systems", Birkhauser Basel, 1997

Структура ключевой функции в случае резонанса 1:2.

А.П. Карпова
(Воронеж, ВГУ; karpovaantonina@mail.ru)

Пусть задан гомоморфизм (вообще говоря, не гладкий и даже не непрерывный) $T : G \longrightarrow O(H)$ группы $G = SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H, определяющий ортогональное действие

$$G \times H \longrightarrow H,\ (g, w) \longmapsto y = T_g(w) \qquad \forall (g, w) \in G \times H.$$

Будем предполагать, что пространства $E,\ F$ и функционал V_δ инвариантны относительно данного действия:

$$T_g(E) \subset E, \quad T_g(F) \subset F, \quad V_\delta(T_g(\cdot)) = V_\delta(\cdot),$$

Очевидно, что ключевая функция W_δ также будет инвариантной.

В рассмотренных ниже случаях индуцированное действие $SO(2)$ на $\mathbb{R}^n$ предполагается полусвободным (начало координат — единственная неподвижная точка). В таких случаях $n = 2m$. Если при этом отождествить вектор $\xi \in \mathbb{R}^{2m}$ с комплексным вектором $z = (z_1, \ldots, z_m)^\top \in \mathbb{C}^m,\ \ z_k = \xi_{2k-1} + i\xi_{2k}$, то условие инвариантности W_δ можно записать в виде соотношения

$$W_\delta(\tilde{z}) = W_\delta(z), \qquad \tilde{z} = (\exp(i\, p_1\varphi)z_1, \ldots, \exp(i\, p_m\varphi)z_m)^\top, \quad p_k \in \mathbb{Z},$$

(инвариантность относительно действия

$$\{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto (\exp(i\, p_1\varphi)z_1, \ \dots\ , \exp(i\, p_m\varphi)z_m)^\top \tag{1}$$

группы $SO(2)$).

Теорема 1 *В случае $4-$мерного вырождения ($n = 2m = 4$) ключевая функция W_δ допускает представление в виде* $-\frac{1}{2}\left(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2\right) +$

$$+\frac{1}{3}\left(C_3 I_3 + C_4 I_4\right) + \frac{1}{4}\left(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2B I_1 I_2\right) + o(\|\xi\|^4), \tag{2}$$

где

$$I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \qquad I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2,$$
$$I_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4, \qquad I_4 = 2\xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_4$$

(полная система инвариантов действия (1)), A_1, A_2, B, C_1, C_2 — вычисляемые константы, зависящие от δ.

После масштабирования и деления W_δ на подходящий множитель получим функцию

$$\widetilde{W_\delta} = \widetilde{U_\delta}(\xi) + o(\|\xi\|^4),$$

где

$$\tilde{U}_\delta(\xi) = -\frac{1}{2}\left(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2\right) + \frac{1}{3}\left(C_1 I_3 + C_4 I_4\right) + \frac{1}{4}\left(I_1^2 + I_2^2 + 2a I_1 I_2\right).$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2 *В случае $4-$мерного вырождения с резонансом $1:2$ ключевая функция W_δ допускает в полярных координатах*

$$\xi_1 = r_1\cos(\varphi_1), \quad \xi_2 = r_1\sin(\varphi_1), \qquad \xi_3 = r_2\cos(\varphi_2), \quad \xi_4 = r_2\sin(\varphi_2), \tag{3}$$

представление (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде

$$\widetilde{W} = -\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + c r_1^2 r_2\cos(\psi) + \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 2a r_1^2 r_2^2) + \tag{4}$$
$$+\vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2\varrho(r_1^2, r_2, \psi), \quad a > -1,$$

где $a = a(\delta)$, $c = c(\delta)$ — вычисляемые константы, $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + const$, ϑ, ϱ — некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых

$$\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(|\xi|^6), \qquad \varrho(r_1^2, r_2, \psi) = O(|\xi|^2).$$

Литература

1.Карпова А.П., Сапронов Ю.И. Приближенное вычисление амплитуд циклов, бифурцирующих при наличии резонансов// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008, вып.3. С.12-22.

2. Зачепа В.Р., Сапронов Ю. И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений// Воронеж, ВГУ. 2002. – 185 с.

О численном решении задачи оптимального измерения с учетом резонанса

А.В. Келлер, Е.В. Захарова
(Челябинск, ЮУрГУ)

Теория динамических измерений возникла и развивалась в рамках теории обратных задач [1]. В [2] была предложена модель измерительного устройства (ИУ) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Du, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = x(t)-$ вектор-функция состояний ИУ размера $1 \times n$, $u = u(t)$ размера $1 \times m$ и $y = y(t)$ размера $1 \times s-$ вектор-функции измеряемого и наблюдаемого сигнала соответственно, а матрицы ИУ A, датчика D и наблюдения C имеют соответственно размеры $n \times n$, $n \times m$ и $s \times n$. В [3] впервые было предложено исследовать задачу нахождения измерения u по наблюдению y методами теории оптимального управления, названную в последствии задачей оптимального измерения.

В [4] представлен алгоритм численного решения задачи оптимального измерения с учетом только инерционности ИУ. Однако искажение динамического сигнала вызвано не только механической инерцией ИУ, но и в следствии механического резонанса. Для того, чтобы устранить эту проблему в реальности в ИУ встраиваются различного рода фильтры для устранения резонирующих частот измеряемого сигнала, которые в свою очередь могут давать резонанс. Чтобы их устранить устанавливают новые фильтры и т.д. Математическая модель данной задачи впервые представлена в [5].

Пусть L и $M-$ квадратные матрицы порядка n, $detL = 0$, $M-$ L-регулярна ($\exists \lambda \in \mathbb{C} : det\,(\lambda L - M) = 0$).

Модель ИУ представима как система леонтьевского типа (СЛТ)

$$L\dot{z} = Mz + Du, \tag{2}$$

где $z = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ...y_s)$. Пусть $\mathcal{X} = \{x \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^n)\}$ – пространство состояний, $\mathcal{Y} = N\,[\mathcal{X}]$ – пространство наблюдений и $\mathcal{U} = \{u \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathbb{R}^n) -$ пространство измерений, $\tau \in \mathbb{R}_+$. В $\mathcal{U}$ выделим замкнутое ограниченное выпуклое подмножество допустимых измерений $\mathcal{U}_\partial$. Задача оптимального измерения с учётом резонансов состоит в нахождении пары $(v, y) \in \mathcal{U}_\partial \times \mathcal{X}$ почти всюду на $(0, \tau)$, удовлетворяющую (2) с условиями Шоуолтера-Сидорова

$$[R^L_\alpha(M)]^{(p+1)}(x(0) - 0) = 0 \qquad (3),$$

причём

$$J(v) = \min_{u \in U_\partial} J(u) \qquad (4),$$

а Функционал качества $J(u)$ имеет вид:

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int\limits_0^\tau \left\| y^{(q)}(t) - y_0^{(q)} \right\|^2_{\mathfrak{Y}} dt + \sum_{q=0}^{1} \int\limits_0^\tau \left\langle F_q u^{(q)}(t), u^{(q)}(t) \right\rangle dt \tag{5}$$

где $R_\alpha^L(M) = (\alpha L - M)^{-1} L-$ правая L-резольвента множества M;$\tau \in \mathbb{R}_+$, $y_0(t)$ – наблюдение, полученное в ходе натурального эксперимента, т.е. снятое с ИУ, моделью которого служит система (2); $\|\cdot\|$ – евклидова норма пространства $\mathbb{R}^n$; $u^{(q)}(t)-$ возможное измерение из U_∂ и его производные, $F_q \in \$(u)-$ линейные, непрерывные, самосопряженные, положительно определенные операторы, $q = 0, 1, ..., p+1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ –евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что первое слагаемое в функционале качества учитывает инерционность измерительного устройства, а второе слагаемое – его механические резонансы и играет роль резонансных фильтров. В предлагаемой модели не будут вызываться вторичные резонансы.

Приближённое решение задачи (2)-(5) (u_{kl}, y_k) будем искать в виде

$$x_k(t) = \sum_{q=0}^{\theta} \left(M^{-1}\left(\left(kL_k^L(M)\right)^{p+1} - \mathbb{I}_n\right)L\right)^q M^{-1}(\mathbb{I}_n - (kL_k^L(M))^{p+1})(Du_kl)^{(q)}(t)+$$

$$+((L - \frac{t}{k(p+1)}M)^{-1}L)^{k(p+1)}x_0 + \sum_{j=0}^{m}\left[((L - \frac{t-b_j}{k(p+1)}M)^{-1}[kL_k^L(M)]^{p+1}(Du_kl(b_j))\right]c_j,$$

где b_j и c_j- узлы и веса квадратурной формулы Гаусса соответственно, $j = 0, 1, ..., m$, причём $k = \max\{k_1, k_2\}$,

$$k_1 > \frac{1}{\alpha}\sum_{l=q+1}^{n}|a_l| + 1, k_2 > \frac{1}{|a_q|(n-q)^{n-q}}\sum_{l=0}^{q}|a_l|(n-q+1)^{n-l} + 1, |t| < 1,$$

$\alpha > \max\{1, |a_q|^{-1}(\sum\limits_{l=0}^{q}|a_l|)\}, a_l-$коэффициенты многочлена $det(\mu L - M), q \leq n-$ его степень.

Для определения $u_{kl} = u_{kl}(t)$ заметим,что по построению пространство $\mathcal{U}$ сепарабельно. Значит, существует последовательность $\{\mathcal{U}\}$ конечномерных подпространств $\mathcal{U}_l \subset \mathcal{U}$ монотонно исчерпывающих пространство $\mathcal{U}_l$.

Основной идеей численного метода решения задачи (2)-(5) является представгение измеряемого сигнала в виде

$$u^l(t) = col\left(\sum_{j=0}^{l}a_{1j}sinjt, \sum_{j=0}^{l}a_{2j}sinjt, ..., \sum_{j=0}^{l}a_{nj}sinjt\right)$$

В докладе приводятся вид численного решения задачи (2)-(5), и обсуждается алгоритм численного метода нахождения приближённого решения этой задачи.

Литература

1.Granovskii, V.A. Dynamic Measurements / V.A. Granovskii. Leningrad: Energoizdat, 1984 (rus).

2. Шестаков, А.Л. Динамическая точность измерительного преобразователя с корректирующим устройством в виде модели датчика / А.Л. Шестаков // Метрология.-1987.-№2.-С.26-34.

3. Шестаков, А.Л. Новый подход к измерению динамически искажённых сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Сер. "Математическое моделирование и программирование 2010.- №16(192). - С. 116-120.

4.Келлер А.В. О численном решении задачи динамического измерения как задачи жесткого оптимального управления / А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Всероссийский научный семинар "Неклассические уравнения математической физики". Часть 1 /Якутск: филиал издательства СВФУ Ими, 2010 - С. 67-70.

5. Шестаков, А.Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов. // А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк,Вестник ЮУрГУ. Сер. "Математическое моделирование и программирование 2011.- №17(234), вып.8 - С. 70-75.

Хаотические колебания одной нелинейной распределенной динамической системы

А.Ю. Коверга

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; a.koverga@gmail.com)

Рассматривается идеальный распределенный ротор постоянного сечения длины l, вращайщийся с постоянной угловой скоростью Ω, концы которого опираются на подшипники. Предполагается, что одна из опор ротора испытывает периодическое воздействие (вибрацию). Материал ротора считаем наследственно вязкоупругим и подчиненным следующей реологической модели вязкоупругого тела :

$$\sigma(t) = E\left(f(\varepsilon(t)) - \int\limits_{-\infty}^{0} R(\tau) f(\varepsilon(t+\tau))d\tau\right),$$

где $\sigma(t), \varepsilon(t)$ соответственно напряжение и относительная деформация, E - модуль Юнга, $R(\tau)$ - функция релаксации, $f(\varepsilon) = \varepsilon + f_3\varepsilon^3 + f_5\varepsilon^5 + \ldots$, $(f_j > 0)$ нелинейная функция деформации.

Относительно функции $R(\tau)$ $(-\infty < \tau < 0)$ предполагаем выполнение следующих условий: $R(\tau) > 0$, $d^2R(\tau)/d\tau^2 > 0$, $\int\limits_{-\infty}^{0} R(\tau)d\tau < 1$, $R(\tau) \leq M_0 \exp(\gamma_0 \tau)$, $(M_0, \gamma_0 > 0), \tau \to -\infty$.

Математической моделью рассматриваемой механической системы является следующая краевая задача [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(b\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-\infty}^{0} R(\tau)\exp(-i\Omega\tau) b\left(\left|\frac{\partial^2 u(s,t+\tau)}{\partial s^2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 u(s,t+\tau)}{\partial s^2}d\tau\right) = 0, \quad (1)$$

$$u|_{s=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left.\left(b\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \int\limits_{-\infty}^{0} R(\tau)\exp(-i\Omega\tau) b\left(\left|\frac{\partial^2 u(s,t+\tau)}{\partial s^2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 u(s,t+\tau)}{\partial s^2}d\tau\right)\right|_{s=1} =$$

$$= \nu_1 \exp(i\omega t + i\gamma_1), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(b\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\int\limits_{-\infty}^{0}R(\tau)\exp(-i\Omega\tau)b\left(\left|\frac{\partial^2 u(s,t+\tau)}{\partial s^2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 u(s,t+\tau)}{\partial s^2}d\tau\right)\Bigg|_{s=1}=$$
$$=\nu_2\exp(i\omega t+i\gamma_2), \tag{4}$$

где

$$u(s,t)=u_x(s,t)+iu_y(s,t), i=\sqrt{-1}, 0<\nu_1,\nu_2\ll 1, 0\le\gamma_1,\gamma_2\le 2\pi, \omega\in R.$$

Краевая задача (1)-(4) приведена в безразмерных переменных. Изучается возможность возникновения в краевой задачи (1)-(4) хаотических колебаний (странных аттракторов). В качестве методов исследования используется метод интегральных многообразий, теория нормальных форм уравнений траекторий на интегральных многообразиях и теория бифуркаций.

Уравнение (1) является уравнением с бесконечным запаздыванием аргумента. Положим в (3)-(4) $\nu_1=\nu_2=0$ и рассмотрим сначала линейную часть уравнения (1)

$$u_{tt}+a_0u_t+u_{ssss}-\int\limits_{-\infty}^{0}R(\tau)\exp(-i\Omega\tau)u_{ssss}(s,t+\tau)d\tau=0. \tag{5}$$

Линейная часть краевых условий (3)-(4) эквивалентна следующим

$$u|_{s=0}=u_s|_{s=0}=0, u_{ss}|_{s=1}=u_{sss}|_{s=1}=0. \tag{6}$$

Положим $u_n(s,t)=e_n(s)\exp(\lambda t)$. В результате получим последовательность характеристических уравнений

$$l_n(\lambda)\equiv\lambda^2+a_0\lambda+\omega_n^2(1-\int\limits_{-\infty}^{0}R(\tau)\exp((\lambda-i\Omega)\tau)d\tau)=0, \tag{7}$$

$n=1,2,\ldots$, расположение корней которых определяет устойчивость решений краевой задачи (5)-(6). Отметим, что ввиду расходимости в (7) интеграла при $Re\lambda\le-\gamma_0$, уравнение (7) имеет смысл лишь при $Re\lambda>-\gamma_0$.

Изучим расположение корней последовательности уравнений (7). Воспользуемся методом $\mathcal{D}$-разбиений. Положим для этого в (7) $\lambda=i\sigma$ и выделим вещественную и мнимую части. В результате будем иметь

$$-\sigma^2+\omega_n^2(1-R_C(\sigma-\Omega))=0, \qquad a_0=\omega_n^2R_S(\sigma-\Omega)/\sigma,$$

где $R_C(\sigma)=\int\limits_0^\infty R(-\tau)\cos(\sigma\tau)d\tau$, $\qquad R_S(\sigma)=\int\limits_0^\infty R(-\tau)\sin(\sigma\tau)d\tau$ соответственно составляющие нормированного комплексного модуля упругости материала $E^*(\sigma)=(1-R_C(\sigma)+iR_S(\sigma))$, который определяется экспериментально . Отметим, что согласно свойств функции $R(\tau)$ при $\sigma>0$, $0<R_C(\sigma),R_S(\sigma)<1$, $R_C(\sigma),R_S(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to\infty$. Кривые на плоскости (a_0,Ω), соответствующие корням характеристического уравнения (5), расположенным на мнимой оси, качественно имеют вид, представленный на рис.1. При этом каждая кривая является границей области потери устойчивости решений (5)-(6) по n-й форме. Области неустойчивости заштрихованы. При этом $\Omega_{n0}=\omega_n(1-R_C(0))^{1/2}$.

Рассмотрим случай потери устойчивости решений краевой задачи (5)-(6) по двум собственным формам колебаний краевой задачи (5)-(6). Точку пересечения кривых, исходящих из Ω_{n0} и $\Omega_{n+1,0}$ обозначим (a_{0n}, Ω_n), а соответствующие им значения σ через σ_n и σ_{n+1}. Будем изучать поведение решений краевой задачи (1)-(4) при изменении параметров в окрестности указанных точек. Введем для этого параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ и положим

$$a = a_{0n} + a_{n1}\varepsilon, \quad \Omega = \Omega_n + \Omega_{n1}\varepsilon, \quad \nu_j = \nu_{j0}\varepsilon^{1/2}, (j = 1, 2),$$
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\delta_1 = 2\sigma_n - \sigma_{n+1} + \varepsilon\delta_1. \tag{8}$$

Изучим характер установившихся колебательных решений краевой задачи (1)-(4) возникающих в окрестности нулевого решения при потере его устойчивости в предположениях (8) применительно к к ядру $R(\tau) = \alpha|\tau|^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)\exp(-\tau)$ $(0 < \alpha < 1)$ где $\Gamma(1-\alpha)$ - гамма функция Эйлера, (модифицированное ядро Абеля [1]). В результате будем иметь $R_C(\sigma) = \alpha/(1+\sigma^2)^{(1-\alpha)/2}\cos((1-\alpha)\,\mathrm{arctg}(\sigma))$, $R_S(\sigma) = \alpha/(1+\sigma^2)^{(1-\alpha)/2}\sin((1-\alpha)\,\mathrm{arctg}(\sigma))$. Положим $\alpha = 0.84$ и обратимся к рис. 1. Координаты точки $(a_{01}, \Omega_1) = (0.747, 21.463)$. В данном случае, потеря устойчивости решений краевой задачи (5)-(6) происходит по двум собственным формам. Соответствующие частоты колебаний равны $\sigma_1 = 2.888$ и $\sigma_2 = 21.424$.Выберем $\Omega_{n1} = 1.2$, $a_{n1} = 1.2$, $a_1 = 0.1, b_1 = 0.21, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.6$. Считая $\nu_{10} = \nu_{20} = \nu_0$ и следуя методике построения уравнений траекторий краевой задачи (1)-(4) на интегральном многообразии [2], получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\dot\rho_1 = (3.94 - \rho_1^2 - 1.25\rho_2^2)\rho_1 + 1.8\nu_0\rho_1\rho_2\cos(\Theta - 0.46),$$

$$\dot\rho_2 = (4.7 - 1.41\rho_1^2 - \rho_2^2)\rho_2 + 0.003\nu_0\rho_1^2\cos(-\Theta + 0.55),$$
$$\dot\Theta = \delta + 2.28\rho_1^2 + 1.93\rho_2^2 - 3.6\nu_0\rho_2\sin(\Theta - 0.46) + 0.003\nu_0\rho_1/\rho_2\sin(-\Theta + 0.55),$$

зависящую от двух параметров ν_0 и δ, которая является нормальной формой краевой задачи (1)-(4). Система численно анализировалась при разных значениях параметров ν_0 и δ. Система может иметь как устойчивые состояния равновесия, периодические решения, так и хаотические колебания. Так, при $\delta = 2.1$, изменяя ν_0 имеем следующую динамику. При $\nu_0 = 2.8$ имеем устойчивое состояние равновесия с координатами $\rho_{10} = 1.624$, $\rho_{20} = 0.991$, $\Theta_0 = 8.329$. Затем из состояния равновесия при $\nu_0 \approx 3.25$ происходит рождение цикла и далее при $\nu_0 \approx 4.73$, $\nu_0 \approx 4.961$, $\nu_0 \approx 4.997$ происходит серия бифуркаций удвоения периода. В результате чего при $\nu_0 \approx 5.05$ образуется хаотический аттрактор. Его ляпуновские показатели равны $\lambda_1 \approx 0.38, \lambda_2 \approx 0, \lambda_3 \approx -7.195$, а ляпуновская размерность $d_L \approx 2.053$. Проекция аттрактора на плоскость (ρ_1, ρ_2) приведена на рис. 2. При этом переменная Θ неограниченно возрастает при $t \to \infty$.

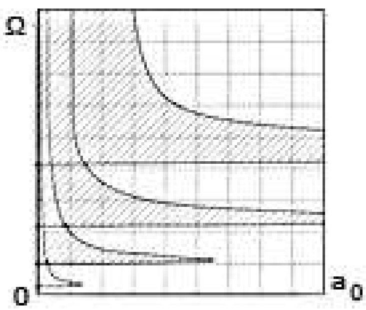


Рис. 1. Картина D-разбиений.

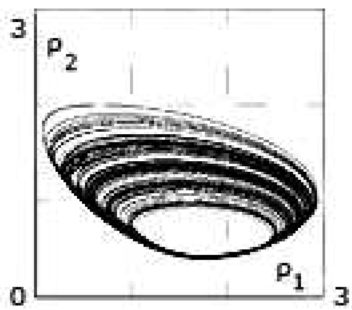


Рис. 2. Проекция аттрактора.

Литература

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел – М.: Наука. 1977. – 384 с.

2. Кубышкин Е.П. Некоторые вопросы динамики распределенных роторов // Математика в Ярославском университете. Сборник обзорных статей к 25-летию математического факультета. Ярославль. 2001. С.157-182.

Хаотическое поведение решений одного нелинейного дифференциально-разностного уравнения в случае двухчастотного параметрического резонанса

А.Ю. Коверга, Е.П. Кубышкин

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г.Демидова; a.koverga@gmail.com, kubysh@uniyar.ac.ru)

Рассматривается дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) + x(t) + kf(x(t - h(t,\varepsilon))) = 0, \tag{1}$$

где $k > 0$ некоторый параметр, $f(x) = x + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots$, $|x| < x_0$ гладкая функция, $h(t,\varepsilon) = h(1 + \varepsilon a_1\cos(\omega_1 t + \beta_1) + \varepsilon a_2\cos(\omega_2 t + \beta_2))$ - величина запаздывания аргумента, в которой $h, \omega_j, a_j > 0; 0 \le \beta_j < 2\pi, j = 1,2; 0 < \varepsilon \ll 1$.

Уравнение вида (1) возникает при математическом моделировании ряда физических задач. В частности, RC-генератора с запаздывающей обратной связью [1], импульсного нейрона, механизма производства красных кровяных телец (модель Мэки-Гласса) и др.

Ниже изучается возможность и условия возникновения в уравнении (1) сложных, в том числе хаотических, колебательных решений, принадлежащих некоторой фиксированной окрестности нулевого решения уравнения (1) и обусловленных двухчастотным изменением запаздывания малой амплитуды.

В уравнении (1) положим сначала $a_j = 0, (j = 1,2)$ и рассмотрим его линейную часть. Изучим расположение корней характеристического уравнения. Воспользуемся для этого методом D-разбиения. Положим $\lambda = i\sigma$, $(\sigma \ge 0)$ и выделим вещественную и мнимую части

$$1 + k\cos(\sigma h) = 0, \qquad \sigma - k\sin(\sigma h) = 0. \tag{2}$$

Минимальное $k = k_0$, при котором система уравнений (2) имеет решение, определяется равенством $k_0 = \sigma_0/\sin(\sigma_0 h)$, где σ_0 корень уравнения $-\sigma_0 = \mathrm{tg}(\sigma_0 h)$. При этом $k_0 > 1$ и $\sigma_0 = \sqrt{k_0^2 - 1}$.

Положим $k = k_0 + \varepsilon k_1$ и рассмотрим поведение корней $\lambda(\varepsilon), \overline{\lambda}(\varepsilon)$, $(\lambda(\varepsilon) = i\sigma_0 + \varepsilon\lambda_1 + \ldots, i = \sqrt{-1})$ характеристического уравнения $P(\lambda;\varepsilon) \equiv \lambda + 1 + (k_0 + \varepsilon k_1) \cdot \exp(-\lambda h) = 0$. Отметим, что $\lambda(\varepsilon)$ аналитически зависят от ε при малых ε. При этом остальные корни характеристического уравнения при малых ε будут находиться в левой открытой комплексной полуплоскости. Из тождества $P(\lambda(\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0$ находим

$$\lambda_1 = \lambda_1^r + i\lambda_1^{im} = k_1(1 + hk_0^2 + i\sqrt{k_0 - 1})/\left[k_0(1 + 2h + k_0^2h^2)\right]. \tag{3}$$

Из (3) имеем, что при $k_1 > 0$ корни характеристического уравнения $\lambda(\varepsilon), \overline{\lambda}(\varepsilon)$ переходят из левой комплексной полуплоскости в правую.

В дальнейшем считаем, что $k_1 < 0$. Пусть теперь $a_j \ne 0, (j = 1,2)$. Положим $\omega_j = 2\sigma_0 + \varepsilon\delta_j$, $(\delta_j \sim 1, j = 1,2)$, т.е. рассмотрим случай двухчастотного параметрического резонанса. В соответствии с принятой терминологией [2], рассматриваемый резонанс является вырожденным.

Положим $u(s,t) = x(t+s)$ и перейдем от уравнения (1) к эквивалентной краевой задаче :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{s=0} = -u(0,t) - (k_0 + \varepsilon k_1) f(u(-h(t;\varepsilon)), t) \tag{5}$$

в полосе $-h(t,\varepsilon) \leq s \leq 0, t \geq 0$. Фазовым пространством краевой задачи является пространство $C(-h(t,\varepsilon),0)$. Краевая задача (4)-(5) имеет в окрестности нуля фазового пространства локальное экспоненциально устойчивое интегральное многообразие $\Phi(\tau_1,\tau_2,z,\overline{z},s;\varepsilon)$, $(\tau_j = \omega_j t, j = 1,2, z \in C, \Phi(\tau_1,\tau_2,0,0;\varepsilon)$ 2π - периодическое по τ_1 и τ_2, поведение решений на котором определяет поведение решений краевой задачи (4)-(5) окрестности нуля фазового пространства. Здесь $\Phi(.)$ - гладкий по совокупности переменных оператор, действующий в $C(-h(t,\varepsilon),0)$. Двумерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую поведение решений краевой задачи (4)-(5) на интегральном многообразии, принято называть нормальной формой краевой задачи (4)-(5) (уравнения (1)). Нормальная форма краевой задачи (4)-(5) имеет следующий вид:

$$\dot{z} = (i\sigma_0 + \varepsilon\lambda_1)z + \varepsilon(A_1\exp(i\tau_1) + A_2\exp(i\tau_2))\overline{z} + d|z|^2 z + \ldots \equiv$$

$$\equiv Z(\tau_1,\tau_2,z,\overline{z};\varepsilon) \tag{6}$$

$$\dot{\tau_j} = 2\sigma_0 + \varepsilon\delta_j, \qquad (j = 1,2), \tag{7}$$

где A_1, A_2, d - комплексные постоянные, подлежащие определению. В (6) в явном виде приведены лишь „главные„ слагаемые нормальной формы, которые определяют поведение ее решений.

Рассмотрим „главную„ часть уравнения (6). Представим $A_j = |A_j|\exp(i\gamma_j)$, $(j = 1,2)$ и выполним последовательно следующие замены: $z \to z\varepsilon^{1/2}\exp(i\sigma_0 t)$, $t \to t\varepsilon^{-1}$, $z \to z\exp((i\delta_1 t + \gamma_1)/2)$. В результате получим следующее уравнение

$$\dot{z} = (\lambda_1^r + i\sigma_1 + d|z|^2)z + (|A_1| + |A_2|\exp(i\delta t + \gamma))\overline{z} \tag{8}$$

где $\sigma_1 = \lambda_1^{im} - \delta_1/2$, $\delta = \delta_2 - \delta_1$, $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$.

Положим в (8) $z = \rho(x+iy)$, где $\rho = (\lambda_1^r/d_1)^{1/2}$ и выполним замену времени $t \to |\lambda_1^r|^{-1}t$. С учетом того, что $|\lambda_1^r| \cdot d_1 < 0$, имеем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (-1 + b_1 + b_2\cos(\nu t + \gamma))x +$$

$$+(-\sigma + b_2\sin(\nu t + \gamma))y + (x^2+y^2)(-x - cy), \tag{9}$$

$$\dot{y} = (b_2\sin(\nu t + \gamma) + \sigma)x +$$

$$+(-1 - b_1 - b_2\cos(\nu t + \gamma))y + (x^2+y^2)(-y + cx). \tag{10}$$

Здесь $b_j = |A_j|/|\lambda_1^r|$, $(j = 1,2)$, $c = d_2/|d_1|$, $\sigma = \sigma_1/|\lambda_1^r|$, $\nu = \sigma/|\lambda_1^r|$. Заметим, что система уравнений (9)-(10) инвариантна относительно замены $x \to -x, y \to -y$.

Система уравнений (9)-(10) анализировалась численно. Выберем входящие параметры следующим образом: $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $h = 3\pi/4$, $f_2 = 0.1$, $f_3 = -1$, $\nu = 1$, $k_1 = -1$.

При этом имеем $\sigma_0 = 1$, $k_0 = \sqrt{2}$. В результате с учетом замен и выполненных нормировок - система уравнений (9)-(10) примет вид

$$\dot{x} = (-1 + 1.6826a_1 + 1.6826a_2\cos(t))x+$$

$$+(-0.1906 + 1.6826a_2\sin(t))y + (x^2+y^2)(-x+7.343y), \quad (11)$$

$$\dot{y} = (1.6826a_2\sin(t) + 0.1906)x+$$

$$+(-1 - 1.6826a_1 - 1.6826a_2\cos(t))y + (x^2+y^2)(-y-7.343x). \quad (12)$$

Положим сначала в (11)-(12) параметр $a_2 = 0$ и будем изменять параметр a_1 от нуля в сторону возрастания. Это соответствует периодическому воздействию на систему. При $a_1 \approx 0.6069$ нулевое состояние равновесия теряет устойчивость, из которого рождаются два ненулевых устойчивых состояния равновесия. Зафиксируем теперь $a_1 \approx 0.8488$ и будем изменять a_2. Из этих ненулевых состояний равновесия одновременно бифурцируют при $a_2 \approx 4.244 \cdot 10^{-3}$ два устойчивых цикла. Состояния равновесия при этом теряют устойчивость. Дальнейшее увеличение параметра a_2 приводит к увеличению амплитуды колебаний периодических решений.

При $a_2 \approx 1.1972$ оба цикла теряют одновременно устойчивость, и неустойчивое многообразие первого цикла пересекается с устойчивым многообразием второго, и, наоборот, неустойчивое многообразие второго цикла пересекается с устойчивым многообразием первого. Это приводит к образованию странного аттрактора (хаотического режима), проекция которого на плоскость (x, y) для случая $a_1 \approx 0.8488, a_2 \approx 1.1973$ представлена на рис. 1. Для этого случая были вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность; $\lambda_1 \approx 0.1932$, $\lambda_2 \approx -2.6211$, $d_L \approx 1.073$.

Дальнейшее увеличение параметр a_2 приводит к исчезновению хаотического аттрактора и образованию периодического решения.

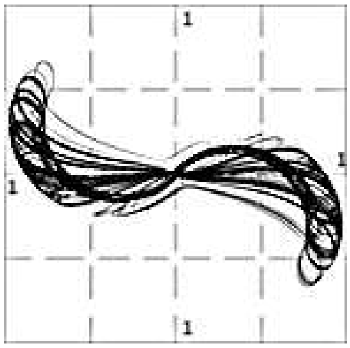


Рис. 1. Проекция странного аттрактора.

Литература

1. Дмитриев А.С., Кислов В.А. Стохастические колебания в радиофизике и электронике – М.: Наука, 1989. – 280 с.

2. Кубышкин Е.П. Параметрический резонанс в системах с последействием при почти периодическом возмушении // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1978. С. 100-109.

Решение одной задачи стационарного темлообмена методом С.Г. Крейна.

В.А. Костин, М.Н. Небольсина
(Воронеж; e-mail:marinanebolsina@yandex.ru)

Рассматривается задача стационарного тепломассообмена в бесконечном, но ограниченном с одного конца слое конечной толщины.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

$$u(0,y) = g(y), \qquad |u(x,y)| < \infty, \qquad x \to \infty, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,l) = 0. \tag{3}$$

Требуется найти величину $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}|_{x=0} = g(y)$.

В соответствии с методом С.Г. Крейна (см.[2]) запишем задачу (1)-(3) в абстрактном виде

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = Au(x), \tag{4}$$

$$u(0) = g(y), \qquad \|g(y)\| < \infty \qquad x \to \infty, \qquad (5),$$

где оператор A задается дифференциальным выражением $-\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ и областью определения $D(A) = \{\varphi : \varphi \in C^0_{[0,l]}, \varphi'' \in C_{[0,l]\}}$. Здесь $C^0_{[0,l]}$-пространство непрерывных на $[0,l]$ функций таких, что $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Так определенный оператор A в соответствии с [3] имеет квадратный корень $A^{\frac{1}{2}}$, обладающий таким свойством, что оператор $-A^{\frac{1}{2}}$ является генератором полугруппы операторов $U(x, -A^{\frac{1}{2}})$ класса C_0 имеющий вид

$$U(x, -A^{\frac{1}{2}})g(y) = \frac{x}{\pi}\int_0^l \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\frac{1}{(2nl+y-\xi)^2+x^2} - \frac{1}{(2nl+y+\xi)^2+x^2}]g(\xi)d\xi.$$

Отсюда в силу [2] решение задачи (4)-(5) имеет вид

$$u(x) = U(x, -A^{\frac{1}{2}})g(y). \tag{6}$$

Далее, учитывая равенство $u'(x) = -A^{\frac{1}{2}}U(x, -A^{\frac{1}{2}})g(y)$, получаем ответ для задачи (1)-(3)

$$u'(x)|_{x=0} = -A^{\frac{1}{2}}g(y),$$

где оператор $A^{\frac{1}{2}}$ в силу [3] имеет вид

$$A^{\frac{1}{2}}g(y) = \frac{4y}{\pi sin\frac{\pi y}{l}} \int_0^l \frac{[g(\xi)sin\frac{\pi y}{l} - sin\frac{\pi\xi}{l}g(y)]\xi d\xi}{(y-\xi)^2(y+\xi)^2} +$$

$$+\frac{4}{\pi sin\frac{\pi y}{l}} \int_0^l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(2nl+y)[g(\xi)sin\frac{\pi y}{l} - g(y)]\xi d\xi}{[(2nl+y)^2-\xi^2]^2}.$$

Заметим, что этим же методом с использованием результатов [3] решается и задача с краевыми условиями: а) $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=l} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$; б) $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$; $u(x,l) = 0$; в) $u(0,x)|_{y=0} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=l} = 0$.

Отметим также, что аналогичная задача решается в [1], с.66, но другими методами.

Литература

1. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков. Л.: Химия, 1986, 144 с.

2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967, 464 с.

3. Небольсина М.Н. Исследование корректной разрешимости некоторых математических моделей тепломассопереноса методом С.Г. Крейна. Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ-мат. наук. – Воронеж, ВГУ, 2009, 102 с.

К решению задачи о распространении сигнала во фрактальных средах в классах функций не преобразуемых по Лапласу

Д.В. Костин, А.В. Костин, В.А. Костин

(Воронеж, ВГУ; dvkostin@rambler.ru, leshakostin@mail.ru, vlkostin@mail.ru)

По терминологии [4], с.90 и [5] *сигнальной задачей* (задачей о распространении сигнала) во фрактальных средах называется решение дробно-дифференциального уравнения

$$oD_t^\alpha u(t,x) = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \ \ x \geq 0, \ \ t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(t,0) = q(t), \tag{2}$$

где

$$oD_\phi^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds, \tag{3}$$

дробная производная Римана-Лиувилля порядка $0 < \alpha \leq 1$, $q(t)$ – заданная форма начального сигнала, $\Gamma(\alpha)$ - гамма функция Эйлера см. также [3] с.90.

В указанных работах (да и вообще в многочисленных исследованиях интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка) задача (1)-(2) решается методом интегрального преобразования Лапласа, что приводит к ограничению функции $q(t)$ при $t \to \infty$ экспоненциальным ростом.

В тоже время уже К. Вейерштрассом ставилась задача об изучении решений уравнения (1), растущих быстрее экспоненты.

В настоящем сообщении (1)-(2) решается в классах произвольно растущих функций и показывается её равномерно корректная разрешимость в смысле С.Г. Крейна [2], с.305.

С этим условием задача (1)-(2) рассматривается как краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = Au(x); \tag{4}$$

$$u(0) = q, \ \ \|u(\infty)\| < \infty, \tag{5}$$

где A – позитивный оператор в некотором банаховом пространстве E, с областью определения $\overline{D(A)} = E, \ \ q \in D(A)$.

В таком случае задача (4)-(5) является равномерно корректной и для её решения справедливо представление

$$u(x) = U(x, -A^{\frac{1}{2}})q, \tag{6}$$

где $U(x,-A^{\frac{1}{2}})$ – полугруппа класса C_0 с генератором $-A^{\frac{1}{2}}$.

Здесь мы для применения метода С.Г.Крейна, следуя [1],с.221, рассмотрим множество Φ весовых функций $\rho(t)$, удовлетворяющих условиям: $\rho(t) \geq 0$, $\rho'(0) > 0$, выполняется оценка $\rho(t) \leq m\rho'(t)$. Например, $\rho(t) = e^{t^2},\ e^{t(t+1)},\ e^{e^t}$. Через $C_\rho[0,\infty)$ – будем обозначать пространства равномерно непрерывных и ограниченных на $[0,\infty)$ с весом $\rho(t)$ функций $f(t)$, таких, что $f(0) = 0$ с конечной нормой

$$\|f\|_{C_\rho} = \sup_{t\geq 0} \frac{|f(t)|}{\rho(t)},$$

которые будем называть *надэкспоненциальными весовыми* функциями. Справедлива следующая

Теорема. Задача (1)-(2) равномерно корректно разрешима в надэкспоненциальных весовых пространствах $C_\rho[0,\infty)$ и для её решения справедливо представление

$$u(t,x) = U(x,-(\frac{d}{dt})^{\frac{\alpha}{2}})q(t), \tag{7}$$

где $U(x,-(\frac{d}{dt})^{\frac{\alpha}{2}})$ – полугруппа операторов класса C_0 с генератором $-(\frac{d}{dt})^{\frac{\alpha}{2}}$, для которой справедлива оценка

$$\|U(x,-(\frac{d}{dt})^{\frac{\alpha}{2}})q\|_{C_\rho} \leq e^{-[\rho'(0)]^{\frac{\alpha}{2}}}\|q\|_{C_\rho}. \tag{8}$$

Доказательство. Зададим оператор A дифференциальным выражением $\frac{d}{dt}$ и областью определения $D(A) = \{\varphi : \varphi \in C_\rho[0,\infty),\ \varphi' \in C_\rho[0,\infty)\}$. Тогда для резольвенты оператора $-A$ при $\lambda > -\rho'(0)$ имеет место оценка

$$|R(\lambda,-A)\varphi| = |\int_0^t e^{\lambda(s-t)}\varphi(s)ds| \leq e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}|\varphi(s)|\,ds \leq e^{-\lambda t}\|\varphi\|_{C_\rho}\int_0^t e^{\lambda s}\cdot\rho(s)ds \leq$$

$$\leq \frac{\|\varphi\|_{C_\rho}e^{-\lambda t}}{\rho'(0)+\lambda}\cdot\int_0^t (e^{\lambda s}\rho(s))'ds \leq \frac{\rho(t)\|\varphi\|_{C_\rho}}{\lambda+\rho'(0)}.$$

Отсюда имеем неравенства

$$\|R(\lambda,-A)\varphi\|_{C_\rho} \leq \frac{\|\varphi\|_{C_\rho}}{\lambda+\rho'(0)}. \tag{9}$$

Из которого следует см. [2], что оператор $-A$ является генератором полугруппы $U(x)$ класса C_0, для которой справедлива оценка

$$\|U(x,-A)\| \leq e^{-\rho'(0)x}.$$

Но тогда для оператора A определены все дробные степени A^α, $0 < \alpha \leq 1$, причём операторы $-A^\alpha$ являются генераторами голоморфных полугрупп $U(x,-A^\alpha)$, класса C_0 с оценкой

$$\|U(x,-A^\alpha)\| \leq e^{-(\rho'(0))^\alpha x} = exp[-(\rho'(0))^\alpha]x.$$

Что по теореме С.Г. Крейна, применённой к задаче (4)-(5), дает доказательство теоремы.

Литература

1. Костин А.В., Костин В.А. К теории функциональных пространств Степанова / Воронеж: Изд.полигр.центр ВГУ, 2007. – 258 с.

2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / М.: Наука, 1967. – 464 с.

3. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации / М.: "Логос 2002, – 512 с.

4. Учайкин В.В. Методы дробных производных / Ульяновск: Изд. "Артишок 2008, – 512 с.

5. Mainardi F. The time fractional diffusion-wave equation / Изв.ВУЗов Радиофизика т.87, №1-2. 1995

Об оптимальном выборе диаграммы направленности в математической теории антенн

Д.В. Костин

(Воронеж, ВГУ; dvkostin@rambler.ru)

Как известно ([1], с.14) задача анализа и синтеза прямоугольных антенн сводится к исследованию интегрального уравнения первого рода.

$$F(t) = \int\limits_{-a}^{a} e^{ixt} \cdot e^{i\Phi(x)} R(x) dx \tag{1}$$

Здесь $F(t)$ – диаграмма направленности (ДН) антенны, $R(x)$ – амплитудное распределение тока в антенне, $\Phi(x)$ – фазовое распределение.

Если при известной функции $F(t)$ нужно определить функции $R(x)$ и $\Phi(x)$, то мы имеем задачу амплитудно-фазового синтеза (АФС) для уравнения (1).

Отметим, что задача АФС является корректной, в том смысле, что по известной функции $F(t)$, она преобразуема по Лапласу, функции $R(x)$ и $\Phi(x)$ ([1], с.35).

Функция $F(t)$ на сегменте $(-b; b)$, $b = \frac{2\pi a}{\lambda}$, a – длина антенны, λ – длина волны, удовлетворяет условиям: в перемешивающейся системе точек

$$-b < t_1 < \xi_1 < t_2 < \ldots < t_k < \xi_k < t_{t+1} < \ldots < t_{n-1} < \xi_{n-1} < t_n < b \tag{2}$$

и значений $F(t_k) = 0,\ F(\xi_k) = M_k e^{i\phi_k},\ F'(\xi_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n-1,\ M_k > 0$, существует точка ξ_p, такая, что имеют место неравенства

$$M_1 < M_2 < \ldots < M_p < M_{p+1} < \ldots < M_{n-1}. \tag{3}$$

Точка ξ_p определяет главное направление излучения. В радиофизике для наглядности рассматривается график функций $|F(t)$. Который распадается на отдельные части, называемые лепестками ДН. При этом M_k является максимумом k-го лепестка.

Существуют многочисленные способы построения ДН. Среди которых одним из наиболее важных является метод алгебраических многочленов, когда на интервале $(-b; b)$ строится многочлен удовлетворяющий условиям (3) [1].

Результаты настоящей работы также относятся к использованию возможностей этого метода.

Введем параметр $\Theta = \min\limits_{k} \frac{M_p}{M_k}$, который назовем коэффициентом доминирования главного направления излучения. Ясно, что чем больше Θ, тем больше степень влияния главного направления излучения по сравнению с излучением боковых лепестков.

В связи с этим возникает вопрос о существовании многочлена $q_n(t) = \sum\limits_{m=0}^{n} a_m t^m$ с максимальным коэффициентом доминирования $\Theta(q_n)$. Ответ на него дает следующая

Теорема Пусть Q – множество многочленов $q_n(t) = \sum\limits_{m=0}^{n} a_m t^m,\ t \in [-1;1]$, таких что

$$\int\limits_{-1}^{1} q_n(t)dt = 0; \tag{4}$$

$$\sum_{m=0}^{n} a_m = n. \tag{5}$$

и $T_n(x),\ n = 0, 1, \ldots$ многочлены Чебышева 1-го рода. Тогда многочлен

$$\widetilde{q}_n(t) = \frac{1 - T_{n+1}(1 - |t|)}{(n+1)|t|} \tag{6}$$

максимизирует функционал $\Theta(q_n)$ при $q_n \in Q$ и справедливо равенство

$$\max_{q_n \in Q} \Theta(q_n) = \Theta(\widetilde{q}_n) = n. \tag{7}$$

Заметим, что при этом все $M_k,\ k \neq p$ равны 1, $\widetilde{q}_n(0) = n$.

Литература

1. Суетин П.К. Начала математической теории антенн – М.: Инсвязьиздат. 2008. – 228 с.

2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены – Изд 2-е. Гл.ред. физ.-мат. лит. М: "Наука 1979, – 416 с.

Об одной задаче П.К. Суетина в математической теории антенн

Д.В. Костин, М.Д. Джасим

(Воронеж, ВГУ; Махачкала ДГУ dvkostin@rambler.ru)

Основой математической теории антенн и технической электродинамики является интегральное уравнение первого рода ([2], с.11)

$$F(t) = \int\limits_{-1}^{1} e^{ixt} e^{i\Phi(x)} R(x)dx, \tag{1}$$

которое можно рассматривать как обратное преобразование Фурье некоторой финитной функции, тождественно равной нулю при $|x| > 1$. Для построения таких функций в соответствии с [1] выбирается полином $P_N(t)$ достаточно высокой степени. Затем, умножая его на, так называемый, стабилизирующий множитель $A_N(t)$ такой, что $A_N(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$, функцию $F(t)$ строят в виде

$$F_N(t) = P_N(t)A_N(t). \tag{2}$$

В качестве стабилизирующего множителя часто выбирают, например, функцию

$$A_N(t) = \left(\frac{N+1}{t} \sin(\frac{t}{N+1}) \right)^{N+1}. \qquad (3)$$

В этом случае справедливо равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} F_N(t) A_N(t) dt = 0$, при $|x| > 1$. И тогда решение уравнения (1) представимо в виде

$$e^{i\Phi(x)} R(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} F_N(t) A_N(t) dt. \qquad (4)$$

Откуда функция $\Phi(x)$ и $R(x)$ находятся однозначно.

Вместе с тем, функция $F(t)$, которая в радиотехнике называется диаграммой направленности (ДН), должна удовлетворять и соответствующим условиям, характеризующим её технические свойства. Наиболее важные из них отражаются на графике функции $|F(t)|$, который распадается на отдельные части, называемые лепестками диаграммы направленности.

По форме диаграммы направленности антенны обычно подразделяются на узконаправленные и широконаправленные. Узконаправленные антенны имеют один ярко выраженный максимум, который называют основным лепестком и побочные максимумы (боковые лепестки), обычно имеющие отрицательное влияние, высоту которых стремятся уменьшить. Узконаправленные антенны применяют для концентрации мощности радиоизлучения в одном направлении для увеличения дальности действия радиоаппаратуры, а также для повышения точности угловых измерений в радиолокации.

В связи с этим, на интервале $t \in (-b, b)$ выбирается две системы взаимно разделяющихся точек

$$-b < t_1 < \xi_1 < t_2 < \ldots < t_k < \xi_k < t_{k+1} < \ldots < t_{n-1} < \xi_{n-1} < t_n < b,$$

в которых на $F(t)$ накладываются условия $F(t_k) = 0$, $F(\xi_k) = M_k e^{i\varphi_k}$, $F'(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots (n-1)$.

Точка ξ_p, в которой выполняются условия

$$M_1 < M_2 < \ldots < M_{p-1} < M_p > M_{p+1} > \ldots > M_{n-2} > M_{n-1},$$

определяет главное направление излучения, а точки $\xi_k \neq \xi_p$ – вспомогательные.

В настоящем сообщении в представлении функции $F_N(t)$ соотношением (1), алгебраический полином $P_N(x)$ заменяется тригонометрической суммой Фейера (см. [1])

$$\mathfrak{G}_N(t) = 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{N+1-k}{N+1} \cos(\frac{k\pi t}{b}), \qquad (5)$$

при этом в качестве стабилизирующего множителя берется $A_N(t) = A_0(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Особенность многочлена (5) заключается в том, что изучая экстремумы функций с использованием минимального страта Максвелла [3], [4], можно доказать, что среди всех тригонометрических многочленов вида $P_N(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k \cos(\frac{k\pi t}{b})$ $t \in (-b, b)$ именно многочлен (5) максимизирует функционал

$$K(P_N) = \frac{M_p}{\max\limits_{k \neq p} M_k}, \tag{6}$$

характеризующий меру доминирования главного направления излучения над вспомогательными направлениями. При этом выполняются равенства $M_k = 1$ при всех $k \neq p$, и $\max\limits_{\lambda} K(F_N) = M_p = N$.

Таким образом, для диаграммы направленности $F_N(t) = \mathfrak{G}_N(t) A_0(t)$ имеет место следующее представление решения уравнения (1)

$$e^{i\Phi(x)} R(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{N+1-k}{N+1} \cos(\frac{k\pi}{b} t) \right) \frac{\sin t}{t} dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{N+1-k}{N+1} \int\limits_{0}^{\infty} \cos(xt) \cos(\frac{k\pi t}{b}) \frac{\sin t}{t} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{N+1-k}{N+1} \left[I_k(x) + I_{-k}(x) \right] = Q_N(x), \tag{7}$$

где

$$I_{\pm k} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } 0 < x \pm \frac{k\pi}{b} < 1; \\ \frac{1}{4}, & \text{если } x \pm \frac{k\pi}{b} = 1; \\ 0, & \text{если } x \pm \frac{k\pi}{b} > 1; \end{cases}$$

Отсюда для действительнозначных $\Phi(x)$ и $R(x)$ получаем решение: $\Phi(x) = 2m\pi$ $(m = \pm 1, \pm 2)$, $R_N(x) = Q_N(x)$.

Заметим также, что приведенный набор функций $F_N(t)$ $(N = 1, 2 \ldots)$ даёт один из ответов при решении задачи 4, поставленной П.К. Суетиным в [2] на стр.222 по составлению примеров теоретически допустимых ДН.

Литература

1. Левитан Б.М. Почти-периодические функции / М.: Гос. изд-во техн.-тор. лит. 1953. – 396 с.

2. Суетин П.К. Начала математической теории антенн / М.: Инсвязьиздат, 2008, – 228 с.

3. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. — 2-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2004. — 672 с.: ил.

4. Гилмор Р. прикладная теория катастроф: В 2-х книгах. Кн. 1. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 350 с., ил

Модифицированная интегральная формула объема гиперболического 3-симплекса

В.А. Краснов
(Коломна, МГОСГИ; krasnov-vladimir99@rambler.ru)

Рассмотрим задачу вычисления объема произвольного тетраэдра в пространстве Лобачевского Λ^3. Основная цель данной работы заключается в получении удобной и эффективной интегральной формулы объема гиперболического 3-симплекса в терминах его двугранных углов. Доказательство данной формулы основывается на результатах Мураками, Яно и Ушиджимы, полученных в работах [5] и [6].

Определение пространства Лобачевского Λ^3, тетраэдра $T \subset \Lambda^3$ и другие базовые понятия можно найти, например, в [1].

Известно,что тетраэдр $T \subset \Lambda^3$ однозначно с точностью до движения пространства определяется набором своих двугранных углов. Рассмотрим гипеболический тетраэдр T, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F. Кроме того, пусть A, B, C – двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а D, E, $F-$противолежащие им двугранные углы. Далее, пусть $a = e^{iA}, b = e^{iB}, \dots,$
$f = e^{iF}$, а $U(z,T)-$эмпирическая функция Мураками-Яно:

$$U(z,T) = \frac{1}{2}(Li_2(z) + Li_2(z\,a\,b\,d\,e) + Li_2(z\,a\,c\,d\,f) + Li_2(z\,b\,c\,e\,f)$$

$$-Li_2(z\,a\,b\,c) - Li_2(z\,a\,e\,f) - Li_2(z\,b\,d\,f) - Li_2(z\,c\,d\,e)) \qquad (1),$$

где $Li_2(z)-$ветвь дилогарифма Эйлера

$$Li_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}dt \quad (z \in \mathbb{C}\backslash(1;+\infty)), \qquad (2),$$

отвечающая главной ветви логарифмической функции $\ln\theta = \ln|\theta| + i\,arg\,\theta, -\pi < arg\,\theta < \pi$.

Исследуем уравнение $dU/dz = 0$. Вычислим dU/dz:

$$\frac{dU(z,T)}{dz} = -\frac{1}{2z}(\ln(1-z) + \ln(1-a\,b\,d\,e\,z) + \ln(1-a\,c\,d\,f\,z) + \ln(1-b\,c\,e\,f\,z) -$$

$$-\ln(1+a\,b\,c\,z) - \ln(1+a\,e\,f\,z) - \ln(1+b\,d\,f\,z) - \ln(1+c\,d\,e\,z)). \qquad (3)$$

Следовательно, уравнение $dU/dz = 0$ эквивалентно следующему:

$$(1-z)(1-a\,b\,d\,e\,z)(1-a\,c\,d\,f\,z)(1-b\,c\,e\,f\,z)$$

$$-(1+a\,b\,c\,z)(1+a\,e\,f\,z)(1+b\,d\,f\,z)(1+c\,d\,e\,z) = 0. \qquad (4)$$

Как нетрудно видеть, свободный член уравнения (4) равен нулю. Рассмотрим функцию $h(z)$:

$$h(z) = \frac{1}{z}((1-z)(1-a\,b\,d\,e\,z)(1-a\,c\,d\,f\,z)(1-b\,c\,e\,f\,z) -$$

$$(1+a\,b\,c\,z)(1+a\,e\,f\,z)(1+b\,d\,f\,z)(1+c\,d\,e\,z)). \qquad (5)$$

Уравнение

$$h(z) = 0 \qquad (6)$$

является квадратным. Кроме того, уравнения $dU/dz = 0$ и $h(z) = 0$ эквивалентны. Обозначим через z_1 и z_2 их решения. Непосредственными вычислениями проверяется, что $|z_1| = |z_2| = 1$.

Введем в рассмотрение следующие величины:
$\tilde{\Delta}(a,b,c) = -\frac{1}{4}(Li_2(-abc^{-1}) + Li_2(-ab^{-1}c) + Li_2(-a^{-1}bc) + Li_2(-a^{-1}b^{-1}c^{-1}) + (\ln a)^2 + (\ln b)^2 + (\ln c)^2)$; $\Delta(T) = \tilde{\Delta}(a,b,c) + \tilde{\Delta}(a,e,f) + \tilde{\Delta}(b,d,f) + \tilde{\Delta}(c,d,e) + \frac{1}{2}(\ln a \ln d + \ln b \ln e + \ln c \ln f)$; $V_1 = U(z_1,T) + \Delta(T)$; $V_2(T) = U(z_2,T) + \Delta(T)$; $V(T) = \frac{U(z_1,T) - U(z_2,T)}{2}$.

Пусть $Vol(T)$ – объем гиперболического тетраэдра T. Имеют место следующие две теоремы Мураками-Яно ([MY]), полученные в [5].

Теорема 1. Объем гиперболического тетраэдра T находится из соотношения:

$$Vol(T) = Im\, V(T) \tag{7}$$

Теорема 2. Объем $Vol\,(T)$ гиперболического тетраэдра T находится следующим образом

$$Vol(T) = Im\, V_1(T) = -Im\, V_2(T). \tag{8}$$

Из теоремы 2 вытекает, что мнимые части $Im\, V_1(T)$ и $Im\, V_2(T)$ равны по абсолютной величине, а отличаются лишь знаком. Поэтому под z_1 понимается такое решение, при котором соответствующая величина $Im\, V_1(T) > 0$.

С помощью теорем [MY] можно в явном виде выписать формулу объема произвольного гиперболического 3-тетраэдра в терминах специальной функции Лобачевского.

Специальная функция Лобачевского $\Lambda(x)$ – функция, которая определена для всех действительных x следующим интегралом:

$$\Lambda(x) = -\int_0^x \ln|2\sin t|dt. \tag{9}$$

Заметим, что $\Lambda(x)$ является периодической функцией с основным периодом π. Кроме того, известно, что

$$Im\, Li_2(e^{ix}) = 2\Lambda(\frac{x}{2}). \tag{10}$$

Замечание. Функция $\Lambda(x)$ была введена Д.Милнором в работе [4] и является модифицированным определением специальной функции $L(x) = -\int_0^x \ln\cos t dt$ $(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$, введенной самим Н.И.Лобачевским в [3]. В теории объемов неевклидовых многогранников под функцией Лобачевского понимают именно модифицированную функцию (9).

Пусть $Z_1 = arg\, z_1, Z_2 = arg\, z_2$. В силу теоремы 1 и формулы (10) имеем:

$$Vol(T) = Im\, V(T) = \frac{Im\{U(z_1,T) - U(z_2,T)\}}{2} = \frac{1}{2}(\Lambda(\frac{Z_1}{2}) - \Lambda(\frac{Z_2}{2}) +$$

$$+\Lambda(\frac{Z_1 + A + B + D + E}{2}) - \Lambda(\frac{Z_2 + A + B + D + E}{2}) + \Lambda(\frac{Z_1 + A + C + D + F}{2})$$

$$-\Lambda(\frac{Z_2 + A + C + D + F}{2}) + \Lambda(\frac{Z_1 + B + C + E + F}{2}) - \Lambda(\frac{Z_2 + B + C + E + F}{2})$$

$$+\Lambda(\frac{Z_2 + \pi + A + B + C}{2}) - \Lambda(\frac{Z_1 + \pi + A + B + C}{2}) + \Lambda(\frac{Z_2 + \pi + A + E + F}{2})$$

$$-\Lambda(\frac{Z_1 + \pi + A + E + F}{2}) + \Lambda(\frac{Z_2 + \pi + B + D + F}{2}) - \Lambda(\frac{Z_1 + \pi + B + D + F}{2}) +$$

$$+\Lambda(\frac{Z_2+\pi+C+D+E}{2})-\Lambda(\frac{Z_1+\pi+C+D+E}{2})). \tag{11}$$

Следовательно, объем гиперболического трехмерного тетраэдра представляется в виде алгебраической суммы шестнадцати значений функции Лобачевского.

Далее, в силу определения функции Лобачевского (9), формулу (11) можно переписать в виде:

$$Vol(T)=\frac{1}{2}\{\int_{\frac{Z_2}{2}}^{\frac{Z_1}{2}}\ln|\sin t|dt+\int_{\frac{Z_2+A+B+D+E}{2}}^{\frac{Z_1+A+B+D+E}{2}}\ln|\sin t|dt+\int_{\frac{Z_2+A+C+D+F}{2}}^{\frac{Z_1+A+C+D+F}{2}}\ln|\sin t|dt+$$

$$+\int_{\frac{Z_2+B+C+E+F}{2}}^{\frac{Z_1+B+C+E+F}{2}}\ln|\sin t|dt+\int_{\frac{Z_1+\pi+A+B+C}{2}}^{\frac{Z_2+\pi+A+B+C}{2}}\ln|\sin t|dt+\int_{\frac{Z_1+\pi+A+E+F}{2}}^{\frac{Z_2+\pi+A+E+F}{2}}\ln|\sin t|dt+$$

$$+\int_{\frac{Z_1+\pi+B+D+F}{2}}^{\frac{Z_2+\pi+B+D+F}{2}}\ln|\sin t|dt+\int_{\frac{Z_1+\pi+C+D+E}{2}}^{\frac{Z_2+\pi+C+D+E}{2}}\ln|\sin t|dt\}. \tag{12}$$

Выполнив соответствующие замены переменных под знаками интегралов в формуле (12), получим:

$$Vol(T)=\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\sin\frac{\xi}{2}\right|d\xi+\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2}\right|d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2}\right|d\xi+\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}\right|d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\cos\frac{\xi+A+B+C}{2}\right|d\xi-\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\cos\frac{\xi+A+E+F}{2}\right|d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\cos\frac{\xi+B+D+F}{2}\right|d\xi-\frac{1}{2}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\cos\frac{\xi+\ +D+E}{2}\right|d\xi\}=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2}\sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2}\sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos\frac{\xi+A+B+C}{2}\cos\frac{\xi+A+E+F}{2}\cos\frac{\xi+B+D+F}{2}\cos\frac{\xi+C+D+E}{2}}\right|d\xi.$$

Таким образом, имеет место

Предложение. Пусть $T=T(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F)$ – трехмерный гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого $A,\ B,\ C$ лежат при одной вершине, а $D,\ E,\ F$ – противолежащие им двугранные углы. Далее, пусть z_1 и z_2 – решения уравнения (6) и $Z_1=arg z_1,\ Z_2=arg z_2.$ Тогда объем гиперболического тетраэдра выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией:

$$Vol(T)=\frac{1}{4}\int_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2}\sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2}\sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos\frac{\xi+A+B+C}{2}\cos\frac{\xi+A+E+F}{2}\cos\frac{\xi+B+D+F}{2}\cos\frac{\xi+C+D+E}{2}}\right|d\xi. \tag{13}$$

Следовательно, мы получили интегральную формулу объема гиперболического 3-симплекса, аналогичную формуле Деревнина-Медных, полученной в [2]. Отличие заключается в том, что пределы интегрирования здесь мы вычисляем гораздо проще, а именно находим корни квадратного уравнения. В свою очередь, в работе [2] пределы интегрирования отыскиваются по формулам, в которых присутствуют только лишь трансцендентные функции.

Таким образом, в настоящей статье как следствие теорем [MY] получена еще одна элементарная интегральная формула объема 3-симплекса в терминах его двугранных углов. И, как показывает практика, предложенная формула очень эффективна и удобна для реализации на компьютере.

Литература

1. Д.В.Алексеевский, Э.Б.Винберг, А.С.Солодовников. Геометрия простр. постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 29: ВИНИТИ. 1988. С. 125 - 127.

2. Д.А.Деревнин, А.Д.Медных. О формуле объема гиперболического тетраэдра // УМН 2005. Т.60. № 2. С. 159–160.

3. Н.И.Лобачевский. Воображаемая геометрия // Полное собр. соч. Т.3: Учен. зап. Каз. ун-та. 1835.

4. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. № 1. P. 307–332.

5. J.Murakami, M.Yano. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // Preprint, 2002.

6. A.Ushijima. A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra // Preprint, 2003.

Об ориентируемости отображений в алгебре $B(E)$

М.Н. Крейн

(Липецк, ЛГПУ; travkin@lipetsk.ru)

В [1] было показано, что аналитическое или заданное многочленом отображение $f : B(E) \to B(E)$, действующее в алгебре линейных ограниченных операторов банахова пространства E и имеющее компактный свободный член, индуцирует преобразование морфизмов GL_c-расслоений (такие расслоения называют также фредгольмовыми). Кроме того, такое отображение однозначно проектируется в алгебру $K(E) = B(E)/C(E)$, где является уже отображением с нулевым свободным членом.

Особый интерес представляет случай, когда множество $F_0(E)$ фредгольмовых операторов нулевого индекса инвариантно относительно действия f (такие отображения, очевидно, образуют полугруппу с операцией композиции). Тогда, если морфизм φ GL_c-расслоений был фредгольмов, то и $f_*(\varphi)$, индуцированный отображением f, также фредгольмов. (При проектировании $B(E)$ в $K(E)$ множество $F_0(E)$ проектируется в группу обратимых элементов которая, таким образом, гомотопически эквивалентна $F_0(E)$.)

Пусть f_0 - сужение f на $F_0(E)$. Если пространство E кюйперово (например, $E = H$), то $F_0(E)$ (а значит, и его образ в $K(E)$) является одним из вариантов классифицирующего пространства группы $GL_c(E)$, поэтому в случае действительного пространства E определено понятие ориентируемости отображения f_0. (Это означает, что первый класс Штифеля-Уитни $w_1(f_0)$ равен нулю.) Назовем в этом случае и само отображение f ориентируемым. При выборе ориентации отображение называется ориентированным.

Утверждение. Ориентированное отображение f преобразует ориентированные фредгольмовы морфизмы GL_c-расслоений в ориентированные.

Литература

1. Крейн М.Н. Отображения в некоммутативных алгебрах и преобразования GL_c-расслоений. // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Воронежской зимней математической школы. - Воронеж: ВГУ, 2011. - С. 188-189.

Адаптивный метод многомерной группировки для снижения спектральной избыточности в изображении

Л.С. Крыжевич
(Курск, КГУ; leonid@programist.ru)

Современный графический сигнал, как известно, избыточен. Он требует большой ёмкости памяти - фотография с современного фотоаппарата с матрицей в 12 Mpix в не преобразованном виде требует примерно 34,5 Мбайт памяти на жестком диске. Целью цифрового кодирования является сокращение требуемой ёмкости памяти путём сокращения пространственной и спектральной избыточности сигнала изображения. По теории вероятностей избыточность является следствием определенных корреляционных связей. Корреляция означает, что некоторый элемент изображения зависит от соседей в пространстве и во времени. Различают избыточность по восприятию, структурную, спектральную и пространственную избыточность. Устранение избыточности производится линейной фильтрацией, уменьшающей коррелированность отсчётов видеосигнала. Спектральная избыточность проявляется как результат излишне высокой частоты дискретизации и использования лишнего количества цветов. Принятая ортогональная структура дискретизации изображения в общем случае не является оптимальной в частотном пространстве. Используя интерполяцию и передискретизацию определенным образом выбранных групп отсчетов сигнала, можно видоизменить спектральный состав и снизить частоту дискретизации. Такая обработка обычно необратима и ведет к некоторому снижению качества восстановленного изображения. В большинстве стандартов этот вид избыточности не устраняется. Но чаще проявляется пространственная избыточность, под которой понимают корреляционные связи между соседними (по вертикали и горизонтали) отсчетами сигнала. Снижение избыточности в этом случае до определенных пределов обратимо, т. е. без потерь информации.

В соответствии с фундаментальным учением В. К. Зворыкина численное значение допустимой ошибки передачи изображений определяется свойствами зрения человека. Это положение можно распространить и на кодирование при записи - восстановленное изображение субъективно не должно отличаться от исходного. Для устранения пространственной избыточности в системах цифровой записи наиболее широкое распространение получает кодирование сигналов с разложением по базисным функциям, получившее название "вейвлет-функций"(wavelet). Такие базисные функции отличаются от набора гармонических колебаний, используемых в стандартном преобразовании Фурье. Во-первых, форма базисных функций содержит не одну частоту, а целый спектр, и задаётся на небольшом интервале; во-вторых, масштаб аргумента с ростом номера базисной функции определяется как целочисленная степень числа 2. Это исключает ошибки округления в цифровом процессоре и позволяет использовать для вейвлет-преобразования ограниченный набор октавных спектральных фильтров. В результате по мере увеличения коэффициента сжатия ошибка воспроизведения увеличивается не так быстро, как при базисных функциях с постоянной частотой. Большую долю информации занимает спектральная избыточность, которая, как отмечалось выше, этими методами практически не устраняется.

Спектральная избыточность обусловлена тем, что в изображении присутствует огромное количество цветов, очень близких по оттенку друг к другу и при этом достаточно отдаленных в пространстве. Это позволяет осуществить преобразование значений этих цветов в один новый цвет без значительных субъективно заметных изменений. Таким образом, приходим к выводу о необходимости снижения дискретизации частотного спектра и об объединении цветов в некоторые интервалы частот. Рассмотрим различные подходы к этому вопросу.

Определение числа интервалов связано с объемом выборки. Целый ряд рекомендаций из различных источников по выбору числа интервалов k дан в [1]. При определении количества групп необходимо стремиться к тому, чтобы были учтены особенности изучаемого явления. Поэтому необходимо, чтобы число групп было оптимальным и в каждую группу входило достаточно значительное число единиц совокупности, что отвечает требованию закона больших чисел. Однако в отдельных случаях представляют интерес и малочисленные группы: новое, передовое, пока оно не станет массовым, проявляется в незначительном числе фактов; поэтому задача статистики - выделить эти факты, изучить их. Таким образом, к распределению цвета в изображении могут быть применены два принципа: 1) выбор метода разбиения на отрезка (одинаковой или разной длины); 2) какой элемент будет приниматься за "представителя"этого интервала (математическое ожидание, мода, медиана и т.д.). Причем оба этих принципа могут применяться в совокупности.

Во многих источниках, например в [2], можно найти упоминание эвристической формулы Старджесса для определения "оптимального"числа интервалов $k = log_2 N + 1 = 3,3 lgN + 1$. В [3] для определения "оптимального"числа интервалов рекомендуют формулу Брукса и Каррузера $k = 5lgN$. Так как, что цветовое ощущение является 3-х мерной величиной, т.е. интервалы разбиения будут представлять собой параллелепипеды (в частном случае, кубы) определенной ширины, то вся задача будет сводиться к определению областей скопления точек цветности изображения. Но метод разбиения на равновеликие интервалы дает весомые результаты только для изображений с равномерным или нормальным распределением цветов, которые встречаются только в искусственно созданных изображениях (флаги, текстовые документы, отсканированные страницы журналов и т.д.). Они, в свою очередь, составляют малую часть всех встречаемых изображений, поэтому имеет смысл рассматривать методы разбиения на интервалы разной ширины и переменной плотности.

Для создания таких интервалов был разработан следующий алгоритм:

1. Построить дискретный ряд распределения цветов в изображении, где $x(r; g; b)$ - перечень возможных цветов, а k - их частота в изображении.

2. Сконструировать из первого второй ряд, ранжированный по частоте k. Из практики известно, что "хвост"этого ряда будет содержать большинство цветов x_i, вероятность встретить которые $p < 0,001$. Именно эти цвета x_i и будут заменяться в дальнейшем.

3. Установить количество цветов u, подлежащих преобразованию с указанием:

- абсолютного числа таких цветов;

- в процентном отношении (это значение будет сильно коррелировать со степенью сжатия)

- некоторого иного критерия. Таким критерием может быть, например, абсолютный или относительный уровень потерь преобразования, который, как некая пограничная величина, был задан заранее.

4. Найти элемент x_j, где $j < u$, $min|x_i - x_j|$.

5. Заменить все цвета в изображении x_i на x_j; $k_j = k_j + k_i$.

Т.е. не просто обнулить цвета x_i (т.е. заменить их на абсолютно черный или абсолютно белый), которые оказались в хвосте ранжированного по частоте ряда, из-за малого количества, а приблизить их к тем x_j, что остались за "чертой". Причем из этих "пограничных"цветов выбирался только тот цвет, который наиболее близок по оттенку к исходному, т.е. выбирается

$min_{\overline{j=1..i-1}}\sqrt{|r_i - r_j|^2 + |g_i - g_j|^2 + |b_i - b_j|^2}$. А так как в изображении насчитывается $n > 10^6$ цветов, то что бы ускорить процесс поиска наиболее подходящего цвета, и потребуется второй массив, отсортированный именно по порядку оттенков цветов. Этот процесс продолжается до тех пор, пока цвета, находящиеся за поставленной гранью не будут использованы полностью. Данный метод позволяет уменьшить количество цветов на 75-82 процентов, причем практически, не заметно для человеческого глаза. Но возможна такая ситуация, что в хвосте существуют также значения оттенка цвета x_l (где $l > u$), которые намного ближе к x_i, чем x_j, что находится за "чертой". И такой цвет может оказаться не один. Итак, по мере накопления, он может приобрести частоту k_l сравнимую (и даже большую) с k_j цвета за "барьером и сам переместиться в эту "неприкосновенную"область. Тогда процесс пойдет по другому ассоциативному пути и приведет к совершенно иному результату. Таким образом, можно сделать вывод о том, что стоит искать приближения в первую очередь между всеми ближайшими цветами, не зависимо от того находятся они в "хвосте"ряда или за "чертой". Такой подход позволяет достигнуть уровня сокращения цветов в 95 процентов. На основе этого алгоритма была написана и зарегистрирована программа Spectrum 1.4, которая позволяет снизить спектральную избыточность в изображении и увеличить коэффициент сжатия при дальнейшей обработке.

Литература

1. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. - Л.: Энергоатомиздат, 1991. - 303 с.

2. Sturgess H.A. The choice of classic intervals // J. Am. Statist. Assoc. - march 1926. - 47 p.

3. Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. - М.: Мир, 1970. - 368 с.

4. Mann H.B., Wald A. On the choice of the number of class intervals in the application of the chi square test // Ann. Math. Stat., 1942. V. 13

Оптимальное управление поворотом твердого тела с упругим стержнем, моделируемым балкой Тимошенко

Е.П. Кубышкин, О.А. Хребтюгова

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г.Демидова ; kubysh@uniyar.ac.ru,olga29@yandex.ru)

Рассматривается механическая система, состоящая из твердого тела и жестко связанного с ним упругого стержня постоянного сечения и равномерно распределенной по длине массой, который моделируется балкой Тимошенко. Центр масс O_1 твердого тела расположен на касательной, проведенной к центральной оси стержня в точке заделки. Поместим в центр масс O_1 две правые прямоугольные системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_1X_2Y_2Z_2$, расположив их таким образом, чтобы центральная ось стержня находилась в плоскостях $O_1X_1Y_1$ и $O_1X_2Y_2$. Оси O_1Z_1 и O_1Z_2 совпадают. Система $O_1X_1Y_1Z_1$ связана с инерциальным пространством, а система $O_1X_2Y_2Z_2$ – с твердым телом. При этом ось O_1X_2 проходит вдоль касательной к оси стержня в точке заделки. Механическая система может совершать вращательные движения вокруг оси O_1Z_1, относительно которой приложен момент внешних сил $M'(t')$. Рассматриваемая система служит механической моделью манипуляционного робота, рука которого обладает упругими свойствами.

Свяжем с твердым телом еще одну систему координат $OX'Y'Z'$, поместив ее начало в точку заделки стержня и направив оси параллельно осям системы $O_1X_2Y_2Z_2$. Считая упругие смещения стержня малыми в рамках гипотез изгибных деформаций Тимошенко, учитывающих угол поворота и сдвиговую деформацию сечений стержня, положение механической системы может быть охарактеризовано углом поворота $\theta(t')$ (между осями O_1X_1 и O_1X_2), величиной $y'(x',t')$ поперечной деформации стержня и углом $\phi'(x,'t')$ поворота сечения стержня относительно нормали, проведенной к оси стержня, в точке x' в момент времени t'

Математической моделью рассматриваемой механической системы будет следующая начально-краевая задача

$$J^*\ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a)y_{tt}(x,t)dx + \varepsilon\int_0^1 \phi_{tt}(x,t)dt = M(t), \tag{1}$$

$$-\varepsilon y_{tt} + \gamma(y_{xx} - \phi_x) = \varepsilon(x+a)\ddot{\theta}, \tag{2}$$

$$-\varepsilon^2\phi_{tt} + \varepsilon\phi_{xx} + \gamma(y_x - \phi) = \varepsilon^2\ddot{\theta} \quad (0 < x < 1), \tag{3}$$

$$y(0,t) = \phi(0,t) = 0,\ y_x(1,t) - \phi(1,t) = \phi_x(1,t) = 0, \tag{4}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \theta_1, \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x),$$
$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \tag{5}$$

которая приведена в безразмерных переменных: $x = x'/l,\ y = y'/l,\ t = t'/t_0,\ M(t) = M(t')/(EJ),\ t_0 = l^2(S\rho/(EJ))^{1/2},\ J_0 = J_0'/(\rho Sl^3),\ \varepsilon = J/(Sl^2),\ \gamma = \kappa/(2(1+\nu))$. Здесь l - длина стержня, ρ - плотность материала стержня и твердого тела, E - модуль Юнга материала стержня, ν- коэффициент Пуассона материала стержня, κ - коэффициент сдвиговых деформаций сечения стержня, J_0' - момент инерции твердого тела относительно оси вращения, a' - расстояние от точки заделки стержня до центра масс твердого тела, S - площадь сечения стержня, S - площадь сечения стержня. Кроме того

$$J^* = J_0 + \int_0^1 (x+a)^2 dx + \varepsilon$$

.

Ниже рассматриваются следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. *Определить момент управления $M(t) \in L_2(0,T)$, переводящий рассматриваемую механическую систему в силу краевой задачи (1)-(4) из начального состояния (5) в конечное*

$$\theta(T) = \theta_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, \quad y(x,T) = y_T(x), \quad y_t(x,T) = \dot{y}_T(x) \tag{6}$$

в заданный момент времени T и минимизирующий функционал

$$\Phi(M) = \|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}/2. \tag{7}$$

Задача 2. *(Задача быстродействия) Определить момент управления $M(t) \in L_2(0,T)$, $\Phi(M) \leqslant L < \infty$, переводящий рассматриваемую механическую систему в силу краевой задачи (1)-(4) из (5) в (6) за минимальное время T.*

По параметрам краевой задачи (1)-(4), начальным и конечным условиям (5)-(6) согласно некоторого алгоритма однозначно строится ортонормированная в $L_2(0,T)$ система непрерывных функций $\psi_n(t)$ $(n = 1, 2, ...)$, линейная оболочка которых $G_2(0,T)$ образует замкнутое в $L_2(0,T)$ подпространство, и последовательность величин $\beta_n(T)$ $(n = 1, 2, ...)$, непрерыно зависящих от T,

$$\Theta(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) < \infty, \lim_{T\to 0} \Theta(T) = \infty, \quad \lim_{T\to\infty} \Theta(T) = 0. \tag{8}$$

В терминах указаныых функций и величен решения задач 1,2 определяются следующим образом.

Утверждение 1. *Решение задачи 1 дается формулой*

$$M^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T)\psi_n(t). \tag{9}$$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $\Theta(T) = L$. Существование такого корня следует из (8) .

Утверждение 2. *Решение задачи 2 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ дается формулой (9) при $T = T^*$.*

О причинной обратимости относительно конуса разностной части разностно-интегрального оператора

И.В. Кузнецова, В.Г. Курбатов
(Воронеж, ВГТУ; Липецк, ЛГТУ; kv51@inbox.ru)

Идея причинности состоит в том, что настоящее определяется только прошлым и не может зависеть от будущего. В частности, оператор T называют *причинным*, если $\big(Tu\big)(x)$ полностью определяется значениями u в моменты, предшествующие x. В настоящей заметке причинность понимается в смысле, аналогичном специальной теории относительности, т.е. как порождаемая некоторым конусом в $\mathbb{R}^l$. Причинные операторы возникают, например, при обращении гиперболических операторов. Обратный к причинному оператору T может не быть причинным. В этом случае уравнение $Tu = f$ не вполне корректно. Причинный оператор T называют *причинно обратимым*, если обратный к нему существует и также является причинным. Ниже доказывается (теорема 5), что причинная обратимость оператора $T = D + N$, где D — разностный, а N — интегральный, влечет обратимость оператора D. Это позволяет уравнение $Tu = f$ преобразовать к более простому виду $u + D^{-1}Nu = D^{-1}f$.

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Подмножество $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^l$ называют *конусом*, если

(a) $x + y \in \mathbb{S}$ для любых $x, y \in \mathbb{S}$,

(b) $\lambda x \in \mathbb{S}$ для любых $x \in \mathbb{S}$ и $\lambda \geq 0$,

(c) $\mathbb{S} \cap (-\mathbb{S}) = \{0\}$.

Конус $\mathbb{S}$ называют *воспроизводящим*, если $\mathbb{S} - \mathbb{S} = \mathbb{R}^l$. Воспроизводящий конус $\mathbb{S}$ имеет непустую внутренность $\mathbb{S}^0$; очевидно, граница $\partial \mathbb{S}$ конуса имеет нулевую меру Лебега.

Будем писать $a \leq b$, если $b - a \in \mathbb{S}$, и $a < b$, если $b - a \in \mathbb{S}^0$. Обозначим символом $\overline{\mathbb{R}}^l$ множество $\mathbb{R}^l$, пополненное двумя символами $-\infty$ и $+\infty$. Положим $-\infty < x < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}^l$.

Примеры. (a) Конус $\mathbb{S} = [0, +\infty)$ в $\mathbb{R}$ является замкнутым и воспроизводящим. (b) Конус

$$\mathbb{S} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0 \}$$

в $\mathbb{R}^2$ является замкнутым и воспроизводящим. (c) Световой конус

$$\mathbb{S} = \{ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 : x_0 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \}$$

в $\mathbb{R}^4$ является замкнутым и воспроизводящим.

В дальнейшем будем считать, что в $\mathbb{R}^l$ фиксирован некоторый замкнутый воспроизводящий конус $\mathbb{S}$.

Положим

$$\mathbb{Q} = (0, 1]^l,$$
$$\mathbb{Q}_i = i + \mathbb{Q}, \qquad i \in \mathbb{Z}^l.$$

Пусть $\mathbb{E}$ — конечномерное банахово пространство. Каждой функции $x : \mathbb{R}^l \to \mathbb{E}$ сопоставим семейство функций $\{ x_i \; i \in \mathbb{Z}^l \}$, где x_i — сужение x на $\mathbb{Q}_i$. Определим пространство $L_{pq} = L_{pq}(\mathbb{R}^l) = L_{pq}(\mathbb{R}^l, \mathbb{E})$, $1 \leq p, q \leq \infty$, в силу естественного изоморфизма с $l_q\big(\mathbb{Z}^l, L_p(\mathbb{Q}_i, \mathbb{E})\big)$. А именно, L_{pq} состоит из классов (совпадающих почти всюду) измеримых функций $x \mathbb{R}^l \to \mathbb{E}$, для которых каждая функция $x_i \mathbb{Q}_i \to \mathbb{E}$, $i \in \mathbb{Z}^l$, принадлежит $L_p(\mathbb{Q}_i, \mathbb{E})$, а семейство $\{x_i\}$ принадлежит $l_q\big(\mathbb{Z}^l, L_p(\mathbb{Q}_i, \mathbb{E})\big)$. Под нормой $x \in L_{pq}$ будем понимать норму семейства $\{x_i\}$ в $l_q\big(\mathbb{Z}^l, L_p(\mathbb{Q}_i, \mathbb{E})\big)$. Очевидно, $L_{pp} = L_p$. Отметим явный вид норм в пространствах L_{pq}:

$$\|u\| = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^l} |u(x)|, \qquad p = \infty, \; q = \infty,$$

$$\|u\| = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{Q}_i} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \qquad p < \infty, \; q = \infty,$$

$$\|u\| = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \big(ess \sup_{x \in \mathbb{Q}_i} |u(x)| \big)^q \right)^{1/q}, \qquad p = \infty, \; q < \infty,$$

$$\|u\| = \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{Q}_i} |u(x)|^p \, dx \right)^{q/p} \right)^{1/q}, \qquad p < \infty, \; q < \infty.$$

Символом $\mathbf{B}(L_{pq})$ будем обозначать банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в L_{pq}, а символом $\mathbf{1}$ — тождественный оператор.

Пусть $x \in \mathbb{R}^l$. Символом $(L_{pq})_x$ обозначим подпространство

$$(L_{pq})_x = \{ u \in L_{pq} : u(y) = 0 \text{ при } y \leq x \} = \{ u \in L_{pq} : u(y) = 0 \text{ при } y \in x - \mathbb{S} \}.$$

Положим $(L_{pq})_{-\infty} = L_{pq}$ и $(L_{pq})_{+\infty} = \{0\}$. Очевидно, $(L_{pq})_x \supseteq (L_{pq})_y$ при всех $x \le y$. Рассмотрим фактор-пространство $L_{pq}/(L_{pq})_x$. Очевидно, фактор-пространство $L_{pq}/(L_{pq})_x$ канонически изоморфно пространству

$$(L_{pq})^x = \{\, u \in L_{pq} : u(y) = 0 \text{ при } y \notin x - \mathbb{S}\,\}.$$

Оператор $T \in \mathbf{B}(L_{pq})$ называют *причинным* (относительно конуса $\mathbb{S}$), если

$$T(L_{pq})_x \subseteq (L_{pq})_x, \qquad x \in \mathbb{R}^l.$$

Отметим, что $T(L_{pq})_{-\infty} \subseteq (L_{pq})_{-\infty}$ и $T(L_{pq})_{+\infty} \subseteq (L_{pq})_{+\infty}$ для любого $T \in \mathbf{B}(L_{pq})$. Очевидно, множество $\mathbf{B}_{\mathbb{S}}(L_{pq})$ всех причинных операторов, действующих в L_{pq}, образует банахову алгебру.

Пусть $T \in \mathbf{B}(L_{pq})$ — причинный оператор. Символом $T_x : (L_{pq})_x \to (L_{pq})_x$ будем обозначать соответствующее сужение. Рассмотрим также канонически определенный фактор-оператор $\widetilde{T} : L_{pq}/(L_{pq})_x \to L_{pq}/(L_{pq})_x$. Очевидно, фактор-оператор $\widetilde{T}$ можно отождествлять с естественным образом определенным оператором $T^x : (L_{pq})^x \to (L_{pq})^x$.

Предложение 1 [1, теорема 3]. *Пусть $T \in \mathbf{B}(L_{pq})$ — причинный оператор, а $z \in \mathbb{R}^l$ произвольно. Если два из трех операторов T, T_z и T^z обратимы, то обратим и третий.*

Причинный оператор называют *причинно обратимым*, если он имеет обратный и обратный оператор также является причинным. Пример оператора $\big(Su\big)(x) = u(x-1)$ в $L_{pq}(\mathbb{R})$, причинного относительно конуса $\mathbb{S} = [0, +\infty)$, показывает, что причинная обратимость не всегда совпадает с обычной.

Предложение 2 [1, предложение 8]. *Пусть $T \in \mathbf{B}(L_{pq})$ — причинный оператор. Тогда следующие условия равносильны.*

(a) *Оператор T причинно обратим.*

(b) *Операторы T_z обратимы (в обычном смысле) при всех $z \in \overline{\mathbb{R}}^l$.*

(c) *Операторы T^z обратимы (в обычном смысле) при всех $z \in \overline{\mathbb{R}}^l$.*

Рассмотрим *интегральный* оператор

$$\big(Nu\big)(x) = \int_{\mathbb{S}} n(x,y)\, u(x-y)\, dy = \int_{x-\mathbb{S}} n(x, x-y)\, u(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^l,$$

в предположении, что $n : \mathbb{R}^l \times \mathbb{S} \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ — измеримая функция, удовлетворяющая оценке

$$\|n(x,y)\| \le \gamma(y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{S},$$

для некоторой суммируемой функции $\gamma : \mathbb{S} \to [0, +\infty)$.

Предложение 3 [2, предложение 5.4.3]. *В перечисленных условиях $N \in \mathbf{B}(L_{pq})$, причем $\|N : L_{pq} \to L_{pq} \le 2^l \|\gamma\|_{L_1}$.*

Очевидно, оператор N является причинным.

Рассмотрим также разностный оператор

$$\big(Du\big)(x) = a_0(x)u(x) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x) u(x - h_m), \qquad x \in \mathbb{R}^l,$$

в предположении, что $h_m \in \mathbb{S}$, $a_m : \mathbb{R}^l \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ — измеримые функции, удовлетворяющие оценкам

$$\|a_m(x)\| \le \alpha_m, \qquad m = 0, 1, \dots,$$

где $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m < \infty$. Нетрудно видеть, что $D \in \mathbf{B}(L_{pq})$, причем $\|D\| \le 2^l \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m$. Очевидно, оператор D является причинным.

Отметим, что

$$\begin{aligned}
\big(N_z u\big)(x) &= \int_{x-\mathbb{S}} n(x, x-y)\, \eta_z(y)\, u(y)\, dy,\\
\big(N^z u\big)(x) &= \int_{x-\mathbb{S}} n(x, x-y)\, \big(1 - \eta_z(y)\big)\, u(y)\, dy,\\
\big(D_z u\big)(x) &= a_0(x)\, \eta_z(x)\, u(x) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x)\, \eta_z(x-h_m)\, u(x-h_m),\\
\big(D^z u\big)(x) &= a_0(x)\, \big(1 - \eta_z(x)\big)\, u(x) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x)\, \big(1 - \eta_z(x-h_m)\big)\, u(x-h_m),
\end{aligned}$$

где

$$\eta_z(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le z,\\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предложение 4. *Пусть D и N — операторы описанного вида. Предположим, что оператор $T = D + N$ обратим. Тогда оператор D обязательно обратим.*

Доказательство. В силу [2, теорема 6.2.1] это утверждение можно считать доказанным при условии, что будет проверено, что оператор N принадлежит классу [2] $\mathbf{k}(L_{pq})$ локально операторов.

Используя предложение 3 нетрудно показать, что оператор N можно с любой точностью приблизить по норме оператором N_1, соответствующая которому функция γ_1 является непрерывной, имеет компактный носитель и равна нулю на границе $\partial\,\mathbb{S}$ конуса. Для такого оператора принадлежность классу $\mathbf{k}(L_{pq})$ следует из [2, предложение 6.2.2]. Остается напомнить [2, предложение 6.1.2], что класс $\mathbf{k}(L_{pq})$ замкнут по норме. $\square$

Основным результатом данной заметки является следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть D и N — операторы описанного вида. Предположим, что оператор $T = D + N$ причинно обратим. Тогда оператор D обязательно причинно обратим.*

Доказательство. Возьмем произвольный $z \in \mathbb{R}^l$. Рассмотрим оператор $\widehat{T} = \widehat{D} + \widehat{N}$, где

$$\big(\widehat{D}u\big)(x) = \big(1 - \eta_z(x)\big)\, u(x) + a_0(x)\, \eta_z(x)\, u(x) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x)\, \eta_z(x-h_m)\, u(x-h_m),$$

а $\widehat{N} = N_z$. Очевидно, $\widehat{D}_z = D_z$, $\widehat{D}^z = \mathbf{1}$, $\widehat{N}_z = N_z$, $\widehat{N}^z = \mathbf{0}$. Отсюда $\widehat{T}_z = T_z$, $\widehat{T}^z = \mathbf{1}$.

По условию оператор T причинно обратим. Поэтому по предложению 2 обратим оператор $\widehat{T}_z = T_z = D_z + N_z$. Оператор $\widehat{T}^z = \mathbf{1}$ обратим очевидным образом. Следовательно, в силу предложения 1 оператор $\widehat{T}$ обратим. Тогда по предложению 4 обратим оператор $\widehat{D}$.

Оператор $\widehat{D}^z = \mathbf{1}$ обратим очевидным образом, а обратимость оператора $\widehat{D}$ уже доказана. Следовательно, по предложению 1 обратим оператор $\widehat{D}_z = D_z$.

Итак, оператор D_z обратим при всех $z \in \mathbb{R}^l$ (и в силу предложения 4 при $z = -\infty$). Поэтому в силу предложения 2 оператор D причинно обратим. $\square$

Предложение 6. *Пусть оператор D причинно обратим. Тогда обратный оператор имеет вид*

$$\big(D^{-1}u\big)(x) = b_0(x)u(x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(x)u(x - g_m), \qquad x \in \mathbb{R}^l,$$

где $g_m \in \mathbb{S}$, $b_m : \mathbb{R}^l \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ — измеримые функции, удовлетворяющие оценкам

$$\|b_m(x)\| \le \beta_m, \qquad m = 0, 1, \dots,$$

а $\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m < \infty$.

Доказательство. Описанное представление без условия $g_m \in \mathbb{S}$ вытекает из [2, следствие 5.2.9].

Без ограничения общности можно считать, что все g_m различны, а $b_m \ne 0$. Для каждого $\omega \in \mathbb{R}^l$ рассмотрим оператор

$$\big(\Psi_\omega u\big)(x) = e^{i\langle \omega, x\rangle} u(x), \qquad x \in \mathbb{R}^l,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^l$. Очевидно, $\Psi_\omega \in \mathbf{B}(L_{pq})$. Рассмотрим семейство операторов

$$B_\omega = \Psi_\omega D^{-1} \Psi_{-\omega}, \qquad \omega \in \mathbb{R}^l.$$

Поскольку оператор D^{-1} причинный, операторы B_ω также являются причинными. Нетрудно видеть, что

$$\big(B_\omega u\big)(x) = b_0(x)u(x) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{i\langle \omega, g_m\rangle} b_m(x)u(x - g_m), \qquad x \in \mathbb{R}^l.$$

Заметим, что зависимость $\omega \mapsto B_\omega$ является почти периодической. Коэффициентами Фурье этой почти периодической функции являются операторы

$$\big(B_m u\big)(x) = b_m(x)u(x - g_m), \qquad x \in \mathbb{R}^l.$$

Из формулы

$$B_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^l} \int_{[-T,T]^l} e^{-i\langle \omega, g_m\rangle} B_\omega \, d\omega$$

видно, что операторы B_m являются причинными. Отсюда и из явной формулы для B_m легко выводится, что $g_m \in \mathbb{S}$. $\square$

Если оператор D причинно обратим, то уравнение $(D + N)u = f$ сводится к уравнению $u + D^{-1}Nu = D^{-1}f$ с причинным оператором $D^{-1}N$. В приводимом ниже следствии описывается вид оператора $K = D^{-1}N$.

Следствие 7. *В рассматриваемых условиях оператор $K = D^{-1}N$ допускает представление*

$$\big(Ku\big)(x) = \int_{\mathbb{S}} k(x, y)\, u(x - y)\, dy = \int_{x-\mathbb{S}} k(x, x - y)\, u(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^l,$$

где $k : \mathbb{R}^l \times \mathbb{S} \to \mathbf{B}(\mathbb{E})$ — измеримая функция, удовлетворяющая оценке

$$\|k(x, y)\| \le \delta(y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{S},$$

для некоторой суммируемой функции $\delta : \mathbb{S} \to [0, +\infty)$.

Доказательство вытекает из предложения 6. $\square$

Литература

1. Kurbatov V.G., Studenikin A.A. The causal invertibility with respect to a cone // Functional Differential Equations. 1997. Vol. 4, № 3–4. P. 295–327.

2. Kurbatov V.G. Functional Differential Operators and Equations. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 432 p.

Методика жесткого возбуждения колебаний в случае близком к резонансу 1:2

А.Н. Куликов

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; anat_kulikov@mail.ru)

Колебания пластины в сверхзвуковом потоке газа при малом коэффициенте демпфирования и цилиндрическом изгибе [1,2] приводят к необходимости рассмотрения нелинейной краевой задачи

$$w_{tt} + gw_t + w_{xxxx} + cw_x + m_1(w_x)^2 + m_2(w_x)^2 - bw_{xx}\int_0^1 (w_x)^2 dx = 0, \qquad (1)$$

$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0. \qquad (2)$$

Нелинейная краевая задача (1), (2) приведена в перенормированном и обезразмеренном виде [1,2]. Здесь $w(t,x)$ – нормированный прогиб срединной поверхности тонкой пластинки, c – нормированная скорость потока газа. Остальные коэффициенты положительны и зависят от упругих свойств материала пластинки и физических параметров газа. Будем считать, что демпфирование мало. Это означает, что мал коэффициент g. Пусть $g = 2\varepsilon g_0$, где $g_0 > 0$, а ε – малый положительный параметр.

В такой постановке возможно иное, отличное от традиционного (см. [3-5], а также главу 7 монографии [2]), объяснение такого явления как флаттер пластинки (возбуждение незатухающих колебаний) под воздействием сверхзвукового потока газа. Если коэффициент демпфирования не мал (имеет порядок 1), то причиной возникновения незатухающих колебаний следует считать потерю устойчивости нулевого состояния равновесия колебательным образом при превышении скорости потока критического значения $c = c_*$ (скорости флаттера). С математической точки зрения в такой ситуации речь идет о распространении теоремы Андронова-Хопфа на подходящий класс нелинейных эволюционных краевых задач типа (1), (2).

Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$A(\varepsilon)v = v^{(IV)} + (c_2 + a\varepsilon)v' \ (a > 0),$$

определенный на достаточно гладких функциях $v(x)$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0.$$

Число $c_2 < c_*$ можно выбрать таким образом, чтобы у линейного дифференциального оператора $A(0)$ существовало счетное множество простых собственных значений

$$0 < \sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2 < \ldots \ (\sigma_j > 0), \ \sigma_2 = 2\sigma_1,$$

которым отвечают собственные функции $e_1(x), e_2(x), e_3(x), \ldots$ [6-8]. Пусть $A^*(0)$ – сопряженный линейный дифференциальный оператор. Хорошо известно, что он обладает собственными значениями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \ldots$, которым соответствуют собственные элементы $h_1(x), h_2(x), \ldots$ Системы $\{e_j(x)\}, \{h_j(x)\}$ образуют биортогональные базисы (базисы Бари-Рисса). Будем также считать, что иные младшие резонансы, кроме указанных, у собственных частот σ_j отсутствуют.

В такой ситуации вопрос о существовании малых периодических решений удается свести к исследованию ненулевых состояний равновесия системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (СДУ)

$$\begin{gathered}\dot{\rho}_1 = \varepsilon(-g\rho_1 + \rho_1\rho_2\cos(\Theta + \Delta)),\ \dot{\rho}_2 = \varepsilon(-g\rho_2 + \rho_1^2\cos(\Theta - \Delta)),\\ \dot{\Theta} = \varepsilon\Big(a_0\frac{\rho_1^2}{\rho_2}\sin(\Theta - \Delta) - 2\rho_1\sin(\Theta + \Delta)\Big),\end{gathered} \tag{3}$$

где постоянные a_0, Δ зависят от коэффициентов дифференциального уравнения (1) ($a_0 = a_0(a), \Delta = \Delta(m_1)$). СДУ (3) принято называть нормальной (квазинормальной) формой.

Лемма. *При $\delta \neq \pi/2$ СДУ (3) имеет одно неустойчивое (седловое) состояние равновесия $\rho = (\eta_1, \eta_2, \Theta_0)$ $(\eta_1, \eta_2 > 0)$.*

При $\delta \neq \pi/2$ состояния равновесия отсутствуют.

Использование аппарата нормальных форм и метода интегральных многообразий для уравнений с бесконечномерным фазовым пространством можно доказать справедливость утверждения [9-11].

Теорема. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состоянию равновесия S соответствует неустойчивое периодическое решение с периодом близким к $2\pi/\sigma_1$*

$$w(t, \varepsilon) = \varepsilon d_1\eta_1\cos(\sigma_1(\varepsilon)t + \varphi_1) + \varepsilon d_2\eta_2\cos(\sigma_2(\varepsilon)t + \varphi_2) + o(\varepsilon). \tag{4}$$

В формуле (4) $\sigma_1(\varepsilon) = \sigma_1 + \alpha_1\varepsilon, \sigma_2(\varepsilon) = 2\sigma_1(\varepsilon)$, а постоянные d_1, d_2, α_1 определяются в процессе реализации алгоритма построения нормальной формы СДУ (3) и исследования этой системы. Здесь $\varphi_1, \varphi_2 \in R$.

Отметим, что при $c = c_2 + \varepsilon a$ $(|\varepsilon| << 1)$ нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво, что вытекает из теоремы об устойчивости по первому (линейному) приближению. Пусть $\lambda_j(c)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ точки спектра устойчивости краевой задачи (1), (2). Тогда при $c = c_2 + \varepsilon a$ $(|\varepsilon| << 1)$ выполнено неравенство

$$Re\ \lambda_j = -\varepsilon g_0 < 0.$$

Но при выбранных c в окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи существует седловое периодическое решение, амплитуда которого имеет порядок ε. Последнее означает, что граница формальной утойчивости "опасная"и не исключено жесткое (докритическое) возбуждение незатухающих колебаний.

Аналогичная ситуация может иметь место в случае близком к резонансам 1:1 и 1:3 собственных частот колебаний пластинки (см., например, [6-8]). Результаты, относящиеся к резонансу 1:3 были доложены на Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна в 2010 г. [12-13].

Литература

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости – М.: Наука. 1961. – 339 с.

2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания динамических систем и бифуркации векторных полей – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2002. – 560 с.

3. Куликов А.Н., Либерман Б.Д. О новом подходе к исследованию задач нелинейного панельного флаттера // Вестник Яросл. ун-та. В.6. 1976. С.118-139.

4. Колесов В.С., Колесов Ю.С., Куликов А.Н., Федик И.И. Об одной математической задаче теории упругой устойчивости // ПММ. Т. 42. В.6. 1976. С.458-465.

5. Куликов А.Н. Исследование некоторых классов уравнений гиперболического типа, встречающихся в теории упругой устойчивости и радиофизике. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м. наук – Ростов-на-Дону. 1977. – 148 с.

6. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний пластинки при малом демфировании в сверхзвуковом потоке газа // ПММ. Т. 73. В.2. 2009. С. 271-281.

7. Kulikov A.N. Resonance of proper frequence 1:2 as a reason for hard excitation of oscillations for the plate ultrasonic gas // Труды международного конгресса ENOC-2008. Russia. Saint-Peterburg. P. 1638-1643.

8. Куликов А.Н. Резонанс 1:3 – одна из возможных причин нелинейного панельного флаттера // Журнал выч. математики и матем. физики. Т. 51. №7. 2011. С. 1266-1279.

9. Колесов А.Ю., Куликов А.Н. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений – Ярославль: Изд-во Яросл.ун-та. 2003. – 107 с.

10. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Дифференциальные уравнения. Т. 39. №5. 2003. С. 584-601.

11. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях // Дифференциальные уравнения. Т. 39. №6. 2003. С. 738-753.

12. Куликов А.Н. Нелинейный панельный флаттер. Резонанс 1:3 как одна из причин жесткого возбуждения колебаний // Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. Воронеж. 2010. С. 91-92.

13. Куликов А.Н. Нелинейный панельный флаттер. Резонанс 1:3 как одна из причин жесткого возбуждения колебаний // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. Воронеж. 2010. С. 111-118.

Формирование нанорельефа под воздействием ионной бомбардировки. Нелокальное уравнение эрозии

Д.А. Куликов

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; kulikov_d_a@mail.ru)

В наноэлектронике все больший интерес вызывают явления самоорганизации в конденсированных системах. К числу таких относится образование волнообразного нанорельефа (ВНР), риплов, террас на поверхности полупроводников под воздействием потока заряженных частиц. При этом наибольший интерес представляет собой ВНР, так как широко используется в современных нанотехнологиях [1].

В качестве математических моделей обычно используют уравнение Бредли-Харпера, которое в математической физике часто встречается и под иным названием – «обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского» [2-3]. Вторая математическая модель учитывает более тонкие эффекты и носит название "нелокального уравнения эрозии"[4]. Как правило для обоих уравнений рассматриваются периодические краевые задачи.

Ниже речь идет об одной и достаточно типичной краевой задаче для второго уравнения, то есть "нелокального уравнения эрозии". Рассмотрим краевую задачу

$$u_t = au_{xx} - cw_x + (u - w) + b(u - w)w_x + dc(w_x)^2 - bd(u - w)(w_x)^2, \tag{1}$$

$$u(t, x + 2) = u(t, x). \tag{2}$$

Здесь $t \geq 0, x \in R, u = u(t, x), w = u(t, x - 1)$, a – нормированный коэффициент пространственной диффузии, остальные коэффициенты также положительны и могут быть выражены через физические параметры потока ионов и пластинки, которая подвергнута бомбардировке. Вывод уравнения и обсуждение физических аспектов задачи можно найти в [4].

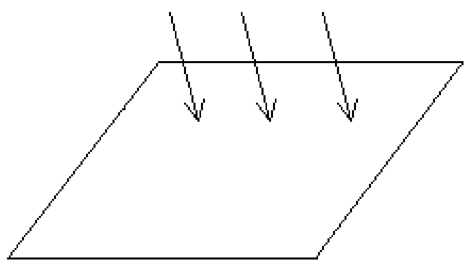


Рис. 1

Элементарно проверяется, что краевая задача (1), (2) имеет семейство состояний равновесия $u(t, x) = const$, а ее решения инвариантны относительно замен $u(t, x) \to u(t, x) + const$. Поэтому в дальнейшем в качестве состояния равновесия можно рассматривать решение $u(t, x) \equiv 0$.

Рассмотрим линеаризованную в нуле краевую задачу (1), (2)

$$u_t = Au, \tag{3}$$

$$u(t, x + 2) = u(t, x), \tag{4}$$

где $Au = au_{xx} - cw_x + (u - w)$ – линейный дифференциальный оператор, определенный на достаточно гладких функциях, имеющих период 2. При $a > a_* = 2/\pi^2$ все точки спектра линейного дифференциального оператора A лежат в полуплоскости, выделяемой неравенством $Re\lambda \leq 0$. Следовательно, состояние равновесия $u \equiv 0$ устойчиво в метрике фазового пространства решений нелинейной краевой задачи (1), (2). В качестве фазового пространства (пространства начальных условий) естественно выбрать пространство Соболева H_2^2.

При $a < a_*$ нулевое состояние равновесия краевой задачи (1), (2) теряет устойчивость. Если $a = a_*$, то линейный оператор A имеет простые собственные значения $\lambda_0 = 0, \lambda_{\pm 1} = \pm i\pi c$, а для остальных собственных значений выполнено неравенство $Re\lambda_n \leq -\gamma_0 < 0$.

Если теперь положить

$$a = a_*(1 + \varepsilon a_0),$$

где $a_0 = \pm 1, \varepsilon$ –малый неотрицательный параметр, то возникает бифуркационная задача в случае близком к критическому нулевого и пары чисто мнимых собственных значений спектра устойчивости, но при дополнительном вырождении.

Используя аппарат теории нормальных форм Пуанкаре-Дюлака и метод интегральных многообразий, задачу можно свести к рассмотрению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (нормальной форме). В данном случае ее главная часть имеет следующий вид

$$\psi' = d_0\rho^2,\ \varphi' = d_2\rho^2,\ \rho' = -2a_0\rho + d_1\rho^3, \tag{5}$$

где $\psi = \psi(s), \varphi = \varphi(s),\ \rho = \rho(s),\ s = \varepsilon t$, а

$$d_0 = \pi^2 dc,\ d_1 = \frac{\pi^2}{4+\pi^2c^2}(4b(b-2d) + \pi^2c^2d(d-2b)),\ d_2 = \frac{\pi^3(2b^2c - d^2c^2\pi^2 + 6bcd)}{2(4+\pi^2c^2)}.$$

Лемма. *Пусть $a_0d_1 > 0$. Тогда система уравнений (5) имеет автомодельное решение*

$$\rho(s) = \rho_0 = \sqrt{\frac{2a_0}{d_1}},\ \varphi(s) = d_2\rho_0^2 s + \varphi_0,\ \psi(s) = d_1\rho_0^2 s + \psi_0,\ \varphi_0, \psi_0 \in R. \tag{6}$$

Автомодельное решение (6) устойчиво, если выполнено неравенство $a_0 < 0$ $(d_1 < 0)$ и это решение неустойчиво при $a_0 > 0$ $(d_1 > 0)$.

Теорема. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждому автомодельному решению (6) соответствует семейство $P(\varepsilon)$ пространственно неоднородных решений краевой задачи (1), (2). Решения, входящие в данное семейство, задаются равенствами*

$$u(t,x,\varepsilon) = d_0(\frac{2a_0}{d_1})\varepsilon t + \varepsilon^{1/2}(\frac{2a_0}{d_1})^{1/2}\times$$
$$\times\Big(\exp(i\pi x)\exp(i\sigma(\varepsilon)t) + \exp(-i\pi x)\exp(-i\sigma(\varepsilon)t)\Big)+$$
$$+\varepsilon(\frac{2a_0}{d_1})\Big(\eta\exp(2i\pi x)\exp(2i\sigma(\varepsilon)t) + \overline{\eta}\exp(-2i\pi x)\exp(-2i\sigma(\varepsilon)t)\Big) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где

$$\sigma(\varepsilon) = \pi c - \frac{2\varepsilon d_2}{d_1},\ \eta = \eta_1 + i\eta_2,$$
$$\eta_1 = \frac{-\pi^2c(d+b)}{2(4+\pi^2c^2)},\ \eta_2 = \frac{dc^2\pi^3 - 4\pi b}{4(4+\pi^2c^2)}.$$

Каждое решение семейства $P(\varepsilon)$, устойчиво (неустойчиво), если устойчиво (неустойчиво) решение (6).

При обосновании теоремы использованы результаты работы [5], а также то обстоятельство, что решения задачи Коши для линейной краевой задачи (3), (4) порождают аналитическую полугруппу [6]. Для построения нормальной формы (5) использован алгоритм, изложенный в монографии [7].

Литература

1. Smirnov V.K., Kubabov D.S., Orlov O.M., Graboshnikov V.V. Technology for nanoperiodic doping of a metal oxide-semiconductor field-effect transistor channel using a self-forming wave-ordered structure // Nanothechnology. V. 14. 2003. P. 709-715.

2. Bradley R.M., Harper J.M.F. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J.Vac. Sci. Technol. V. A6. 1988. P. 2390-2395.

3. Кудряшов Н.А., Рябов П.Н., Стриханов М.Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. Т.1. №2. 2010. С.151-158.

4. Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В. Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении поверхности ионной бомбардировкой // Микроэлектроника. Т. 40. №2. 2011. С. 109-118.

5. Куликов А.Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль. 1976. С. 114-129.

6. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве – М.: Наука. 1967. – 464 с.

7. Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией – М.: Физматлит. 2005. – 431 с.

Использование генетического алгоритма и статистического анализа для построения портфеля ценных бумаг

О.С. Кульнева

(Воронеж, ВГАУ; kulnevaos@rambler.ru)

Максимизация арифметической средней прибыльности в долгосрочном периоде, что состоит из N краткосрочных периодов, не означает, что сформированный портфель при любой схеме управления капиталом портфеля даст самый большой рост капитала за тот же период. Самый большой прирост капитала за N периодов без ребалансирования обеспечит портфель с максимальным средним геометрическим темпом прироста.

$$Tp = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}(1+d_i)} \to max \tag{1}$$

где d_i доходность портфеля в i-ом периоде, измеренная в долях капитала в конце (i-1) -ого периода; $(1 + d_i)$- окупаемость портфеля за i-ый период.

Очевидно, что устойчивость роста капитала портфеля с учетом реинвестирования, связана не с разбросом доходностей вокруг среднего значения, а с отклонением TP - среднего темпа прироста капитала за долгосрочный период от показателя, совпадающего с темпом прироста в случае постоянного роста капитала в каждом периоде. Таким образом, колеблемость портфеля V можно определить как отношение

$$V = 1 - \frac{Tp}{\sum_{i=1}^{N}(1+d_i)/N}. \tag{2}$$

Сформулируем теперь оптимизационную задачу построения портфеля с оптимальным темпом роста капитала. Пусть существует набор из k финансовых инструментов. Предположим, что имеется информация по N наблюдениям (обучающей выборке). Обозначим цену i-ого инструмента в j-ый период за d_{ij}. Тогда окупаемость (темп роста цены) i-ого инструмента в j-ый период равна

$$x_{ij} = \frac{d_{i,j}}{d_{i,j-1}}, i = 1, ...k, j = 1...N \tag{3}$$

Также мы решили ограничить риск портфеля с помощью еще одного критерия, относящегося к классу «нижних рисков» (down-side risks). К таким мерам риска относятся показатель ожидаемых потерь (EVaR).

Показатель ожидаемых потерь (EVaR) - статистика, позволяющая оценить средние потери по портфелю при заданном уровне доверия. Пусть фиксирован некоторый портфель открытых позиций. VaR портфеля для данного доверительного уровня $(1-\alpha)$ и данного периода поддержания позиций t определяется как такое значение, которое обеспечивает покрытие возможных потерь x держателя портфеля за время t с вероятностью $(1-\alpha)$: $P\left(VaR \geq x\right) = 1-\alpha$. EVaR определяется формулой: $[EVaR_{1-\alpha}\left(X\right) = E\left(X \middle| X > VaR_{1-\alpha}\right),]$ где X - потери портфеля через N дней; $(1-\alpha)$ - уровень доверия.

Обозначим $w_i,\ i = 1, 2..., k$ доли i-ого инструмента в портфеле инвестора. Тогда задача нахождения оптимального портфеля с параметрами $w_i,\ i = 1, 2..., k$ состоит в максимизации темпа роста портфеля за исторический период, состоящий из N наблюдений при фиксированном уровне риска портфеля – отклонения среднего темпа роста капитала за один период от арифметической средней доходности и ограничении на ожидаемые потери записывается в виде:

$$F\left(\{w_i\}\right) = \sqrt[N]{\prod_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{k} w_i x_{ij}\right)} \to \max \tag{4}$$

$$V\left(\{w_i\}\right) = 1 - \frac{\sqrt[N]{\prod_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{k} w_i x_{ij}\right)}}{\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} w_i x_{ij}\right) \Big/ N} < \tilde{V};\ R\left(\{w_i\}\right) < \tilde{R};\ w_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1,$$

где $\tilde{V}$ – максимально допустимое значение колеблемости портфеля;

$\tilde{R}$ – максимально допустимое значение EVaR портфеля (мы брали EVaR с уровнем доверия 5%).

Построение портфеля с оптимальным темпом роста сводится к решению задачи нелинейного программирования, которую мы решали, применяя генетический алгоритм. Генетические алгоритмы представляют собой новое направление в алгоритмике. Они способны не только решать и сокращать перебор в сложных задачах, но и легко адаптироваться к изменению проблемы.

Вначале ГА-функция генерирует определенное количество возможных решений, а затем вычисляет для каждого 'уровень выживаемости' (fitness) - близость к истине. Эти решения дают потомство. Те что 'сильнее', то есть больше подходят, имеет больший шанс к воспроизводству, а 'слабые' постепенно отмирают. Идет эволюция.

Процесс повторяется до тех пор, пока не найдено решение, или не получено достаточное к нему приближение.

Мы формировали портфель ценных бумаг, состоящий из акций, фьючерсов и депозита. При этом накладывалось ограничение на долю каждого инструмента минимум 10% и максимум 50% портфеля. Также применялся дополнительный способ управления капиталом: перерасчет весов. В случае получения прибыли или убытков больше порогового значения (15%) мы пересматривали веса входящих в портфель активов.

Для расчета степени колеблемости портфеля и EVaR использовались дневные приращения счета.

Ребалансировка портфеля осуществлялась с помощью двух стратегий: ребалансировка каждый фиксированный промежуток времени: каждый день, неделю; ребалансировка осуществлялась только в случае, если текущий вес какого-либо актива в портфеле отклонялся от первоначального на определенный процент: 3% или 5%.

Для получения более достоверных результатов пороговые значения колеблемости V и EVaR задавались в следующих диапазонах:

V = 0.00015,..., 0.0005 с шагом 0,0001

EVaR = 0.03,..., 0.05 с шагом 0,005

В качестве брокера мы рассматривали ЗАО «Финнам» тариф «Минимальный Standardный»: оборот за торговую сессию 0,025%, заключение фьючерсного или контракта 0,45 руб.

Далее решалась задача максимизации темпа роста (4), на основе полученных весовых коэффициентов формировался портфель на следующий год, и проводилась тестовая торговля.

Результаты торговли приведены в табл. 1. Здесь прибыль рассчитана как средняя прибыль для всевозможных ограничений на пороговое значение V, EVaR.

Табл. 1 Результаты торговли в тестовом периоде

Способ 1			Способ 2		
Условие	Без управления	Пересчет весов	Условие	Без управления	Пересчет весов
2007					
1 день	28,76%	28,89%	3,00%	28,68%	30,66%
1 неделя	28,88%	27,22%	5,00%	30,98%	28,72%
2008					
1 день	-55,32%	-24,62%	3,00%	-54,98%	-24,32%
1 неделя	-55,69%	-24,43%	5,00%	-55,21%	-27,41%
2009					
1 день	0,21%	5,06%	3,00%	2,73%	7,92%
1 неделя	1,49%	5,37%	5,00%	0,38%	5,30%
2010					
1 день	30,84%	31,05%	3,00%	31,74%	30,21%
1 неделя	30,52%	30,39%	5,00%	32,11%	31,32%
2007-2010					
1 день	1,02%	10,09%	3,00%	2,04%	11,12%
1 неделя	1,30%	9,44%	5,00%	1,88%	9,68%

Как легко видеть из таблицы, низкая средняя доходность связана с большими убытками в 2008 году и, как следствие, неуверенностью в выборе весов в 2009 году. 2007 и 2010 годы дали хороший результат.

Однако дополнительное управление капиталом позволило сократить убытки в 2008 году более чем в 2 раза и улучшить результат в 2009 году. Поэтому средняя прибыль за 4 года значительно выросла. Предложенная методка построения портфеля является достаточно устойчивой для различных способов определения сроков приведения весов.

Литература

1. Michalewicz Z. Genetic Algorithms, Numerical Optimization and Constraints, Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms, Pittsburgh, July 15-19, 1995. - P. 151-158.

2. Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг. М.: НТО Вавилова С.И., 2008. - 440 с.

3. Финам (официальный сайт) [Электронный ресурс].: http://www.finam.ru

О представлении рациональной функции от операторного пучка

И.В. Курбатова
(Воронеж, ВГТУ; la_soleil@bk.ru)

Для дифференциального уравнения $Fx' + Gx = f$, не разрешенного относительно производной, решение (как и в классическом случае тождественного оператора F), выражается через экспоненциальную функцию от операторного пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G$. Построение неявных разностных схем сводится [1],[2] к замене экспоненциальной функции в формуле для решения ее рациональными приближениями. Обычно при подстановке операторов в рациональную функцию последнюю удобно представлять в виде суммы элементарных дробей. Результат применения элементарной дроби $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda-\lambda_0}$ к пучку совпадает с резольвентой $-R_{\lambda_0}$. Если проводить вычисления в действительных числах, то удобно использовать элементарных дроби, знаменатель которых является квадратным трехчленом с отрицательным дискиминантом. В настоящей заметке приводятся формулы, описывающие результат применения такой элементарной дроби к пучку.

Операторным пучком называют функцию

$$\lambda \mapsto \lambda F - G, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Резольвентным множеством пучка называют множество $\rho(F,G)$, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda F - G$ обратим, а *резольвентой* пучка — функцию (семейство) $R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}$, где $\lambda \in \rho(F,G)$. Дополнение $\sigma(F,G) = \mathbb{C} \setminus \rho(F,G)$ к резольвентному множеству называют *спектром* пучка.

Обозначим через $\mathbf{B}(Y,X)$ банахово пространство всех линейных ограниченных операторов $A : Y \to X$, а через $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y,X)$ — замыкание в $\mathbf{B}(Y,X)$ линейной оболочки операторов R_λ, $\lambda \in \rho(F,G)$. Введем на $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y,X)$ операцию F-*умножения* или $\odot$-*умножения* по формуле

$$A \odot B = AFB.$$

Степени и обратные относительно F-умножения будем обозначать символами типа $A^{n\odot}$ и $A^{-1\odot}$. В [3] доказано, что относительно F-умножения линейное пространство $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y,X)$ является коммутативной банаховой алгеброй.

Обозначим через φ функциональное исчисление [3], порожденное пучком. Напомним, что отображение φ сопоставляет каждой аналитической на $\sigma(F,G)$ функции f элемент $\varphi(f)$ алгебры $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y,X)$.

Теорема. *Пусть*

$$f(\lambda) = \frac{a + b\lambda}{(\lambda-\alpha)^2 + \beta^2},$$

причем $\alpha \pm i\beta \notin \rho(F,G)$. Тогда справедливо представление

$$\varphi(f) = \big((\alpha F - G) + i\beta F\big)^{-1}(aF + bG)\big((\alpha F - G) - i\beta F\big)^{-1}.$$

А при условии существования F^{-1} и $(\alpha F - G)^{-1}$ —

$$\varphi(f) = -b\big((\alpha F - G) + \beta^2 F(\alpha F - G)^{-1}F\big)^{-1} + \\ + (\alpha b + a)\big((\alpha F - G)F^{-1}(\alpha F - G) + \beta^2 F\big)^{-1}.$$

Доказательство. В соответствии с формулой [3] $\varphi\big(\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\big)=-R_{\lambda_0}$ имеем

$$\varphi\Big(\frac{1}{(\cdot)-\alpha-i\beta}-\frac{1}{(\cdot)-\alpha+i\beta}\Big)=\varphi\Big(2i\beta\cdot\frac{1}{(\cdot)-\alpha-i\beta}\cdot\frac{1}{(\cdot)-\alpha+i\beta}\Big)=$$
$$=2i\beta\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)^{-1}\odot\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)^{-1}=$$
$$=2i\beta\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)^{-1}F\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)^{-1}.$$

При условии существования оператора F^{-1} это можно продолжить так (символ $\mathbf{1}$ означает тождественный оператор):

$$=2i\beta F^{-1}F\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)^{-1}F\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)^{-1}=$$
$$=2i\beta F^{-1}\big((\alpha F-G)F^{-1}+i\beta FF^{-1}\big)^{-1}\big((\alpha F-G)F^{-1}-i\beta FF^{-1}\big)^{-1}=$$
$$=2i\beta F^{-1}\big((\alpha F-G)F^{-1}+i\beta\mathbf{1}\big)^{-1}\big((\alpha F-G)F^{-1}-i\beta\mathbf{1}\big)^{-1}=$$
$$=2i\beta F^{-1}\Big(\big((\alpha F-G)F^{-1}-i\beta\mathbf{1}\big)\big((\alpha F-G)F^{-1}+i\beta\mathbf{1}\big)\Big)^{-1}=$$
$$=2i\beta F^{-1}\big((\alpha F-G)F^{-1}(\alpha F-G)F^{-1}+\beta^2\mathbf{1}\big)^{-1}=$$
$$=2i\beta\big((\alpha F-G)F^{-1}(\alpha F-G)+\beta^2F\big)^{-1}.$$

Аналогичным образом

$$\varphi\Big(\frac{1}{(\cdot)-\alpha-i\beta}+\frac{1}{(\cdot)-\alpha+i\beta}\Big)=-\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)^{-1}-$$
$$-\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)^{-1}=$$
$$=-\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)^{-1}\times$$
$$\times\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)^{-1}-$$
$$-\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)^{-1}\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)\times$$
$$\times\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)^{-1}=$$
$$=-\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)^{-1}\times$$
$$\times(\alpha F-G)\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)^{-1}-$$
$$-\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)^{-1}(\alpha F-G)\times$$
$$\times\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)^{-1}=$$
$$=-\big((\alpha F-G)+i\beta F\big)^{-1}2(\alpha F-G)\big((\alpha F-G)-i\beta F\big)^{-1},$$

при условии существования $(\alpha F - G)^{-1}$ это можно продолжить так:

$$
\begin{aligned}
&= -2(\alpha F - G)^{-1}(\alpha F - G)\big((\alpha F - G) + i\beta F\big)^{-1}\times\\
&\times (\alpha F - G)\big((\alpha F - G) - i\beta F\big)^{-1} =\\
&= -2(\alpha F - G)^{-1}\big((\alpha F - G)(\alpha F - G)^{-1} + i\beta F(\alpha F - G)^{-1}\big)^{-1}\times\\
&\times \big((\alpha F - G)(\alpha F - G)^{-1} - i\beta F(\alpha F - G)^{-1}\big)^{-1} =\\
&= -2(\alpha F - G)^{-1}\big(\mathbf{1} + i\beta F(\alpha F - G)^{-1}\big)^{-1}\times\\
&\times \big(\mathbf{1} - i\beta F(\alpha F - G)^{-1}\big)^{-1} =\\
&= -2(\alpha F - G)^{-1}\times\\
&\times \Big(\big(\mathbf{1} + i\beta F(\alpha F - G)^{-1}\big)\big(\mathbf{1} - i\beta F(\alpha F - G)^{-1}\big)\Big)^{-1} =\\
&= -2(\alpha F - G)^{-1}\big(\mathbf{1} + \beta^2 F(\alpha F - G)^{-1}F(\alpha F - G)^{-1}\big)^{-1} =\\
&= -2\big((\alpha F - G) + \beta^2 F(\alpha F - G)^{-1}F\big)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, справедливо представление

$$
\begin{aligned}
\frac{a+b\lambda}{(\lambda-\alpha)^2+\beta^2} &= \frac{b}{2}\Big(\frac{1}{\lambda-\alpha-i\beta}+\frac{1}{\lambda-\alpha+i\beta}\Big)+\\
&+\frac{\alpha b+a}{2i\beta}\Big(\frac{1}{\lambda-\alpha-i\beta}-\frac{1}{\lambda-\alpha+i\beta}\Big).
\end{aligned}
$$

Поэтому для того чтобы посчитать $\varphi(f)$, достаточно сложить операторы $\frac{b}{2}\varphi\big(\frac{1}{(\cdot)-\alpha-i\beta}+\frac{1}{(\cdot)-\alpha+i\beta}\big)$ и $\frac{\alpha b+a}{2i\beta}\varphi\big(\frac{1}{(\cdot)-\alpha-i\beta}-\frac{1}{(\cdot)-\alpha+i\beta}\big)$. В результате сложения получаем

$$
\varphi(f) = \big((\alpha F - G) + i\beta F\big)^{-1}(aF + bG)\big((\alpha F - G) - i\beta F\big)^{-1}.
$$

А при условии существования обратных —

$$
\begin{aligned}
\varphi(f) = -b\big((\alpha F - G) + \beta^2 F(\alpha F - G)^{-1}F\big)^{-1}+\\
+(\alpha b + a)\big((\alpha F - G)F^{-1}(\alpha F - G) + \beta^2 F\big)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Литература

1. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990. — 512 с.

2. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.

3. Курбатова И.В. Банахова алгебра, связанная с линейным операторным пучком. Математические заметки. Т. 86. № 3. 2009. С. 394–401.

О полной наблюдаемости одной нелинейной возмущенной динамической системы

Фам Туан Кыонг
(Воронеж, ВГУ; tuancuonghd@yahoo.com)

Рассматривается дифференциально-алгебраическая нелинейная система:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + G(t, x(t)) + f(t), \tag{1}$$

$$F(t) = Ax(t), \tag{2}$$

где $x(t) \in R^n$; $B(t) : R^n \to R^n$; $A : R^n \to R^s; f(t) \in R^n, F(t) \in R^s$, и нелинейная функция $G(t, x(t))$, $t \in [0, T]$ (T - конечно или бесконечно).

Вектор-функция $x(t)$ называется вектором состояний системы, $f(t)$- входной функцией , а $F(t)$-выходной функцией.

Систему (1), (2) будем называть полностью наблюдаемой (идентифицируемой по Калману), если по реализуемым, наблюдаемым входной и выходной функциям состояние системы определяется однозначно. Выявление полной наблюдаемости или ненаблюдаемости нелинейной системы (1), (2) ведется с использованием метода каскадного расщепления исходных пространств на подпространства, то есть поэтапного перехода к системам, аналогичным исходной, но относительно элементов из все более "узких"подпространств (см. [1] - [3]). Прямоугольной в общем случае матрице A соответствуют разложения:

$$R^n = KerA \dot{+} CoimA, R^s = CokerA \dot{+} ImA, \tag{3}$$

с проекторами P_0 и Q_0 на подпространства $KerA$ и $CoimA$, соответственно. В случае ненулевых подпространств $KerA$ и $CoimA$ на первом шаге применения метода каскадного расщепления от системы (1), (2) переходим к цепочке соотношений:

$$Q_0 F(t) = 0, \tag{4}$$

$$x(t) = A^- F(t) + x_1(t) \tag{5}$$

с произвольной вектор-функцией $x_1(t) = P_0 x(t) \in KerA$.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = B_1 x_1(t) + G_1(t, x_1(t)) + f_1(t), \tag{6}$$

$$F_1(t) = A_1 x_1(t), \tag{7}$$

При выполнении условий:
1) $Q_0 F(t) = 0, Q_1 F_1(t) = 0$;
2) $(I - P_0) G(t, x(t)) = 0$;
3) $KerA_1 = \{0\}$
нелинейная система является полностью наблюдаемой (см. [4]). Функция состояния единственным образом определяется по формуле:

$$x(t) = A_0^- F(t) + A_1^- F_1(t), \tag{9}$$

а подстановка выражения (9) в уравнение (1) задает соотношение, которому необходимо должны удовлетворять входная и выходная функции системы (1), (2).
Исследуется полная наблюдаемость возмущенной нелинейной системы:

$$\frac{dx(t,\epsilon)}{dt} = B(\epsilon)x(t,\epsilon) + G(\epsilon, x(t,\epsilon), \frac{dx(t,\epsilon)}{dt}) + f(t,\epsilon), \tag{10}$$

$$F(t,\epsilon) = A(\epsilon)x(t,\epsilon), \tag{11}$$

где $B(\epsilon) = B + \epsilon B_{01}(\epsilon)$, $B_{01}(\epsilon) : R^n \to R^n$;
$A(\epsilon) = A + \epsilon A_{01}(\epsilon), A_{01}(t,\epsilon) : R^n \to R^s, \epsilon \in (0, \epsilon_0]$

Устанавливаются условия, при выполнении которых из полной наблюдаемости предельной системы (1),(2) с инъективной матрицей следует полная наблюдаемость возмущенной системы (10), (11). Выводится формула для функции состояния возмущенной системы (10), (11). Устанавливается вид соотношений, которым необходимо должны удовлетворять входная и выходная функции, для реализации процесса, описываемого возмущенной системой (10), (11). Исследуется поведение функции состояния возмущённой системы при $\epsilon \to 0$.

Литература

1. Zubova S.P. On polynomial solutions of the linear stationary control system/ S.P. Zubova, L.H. Trung, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. 2008. T.69. 11. C. 1852-1858.

2. Зубова С.П. Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов. 2010. Том 15. Вып. 6. С. 1678-1679.

3. Зубова С.П. Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально-алгебраической системы/ С.П. Зубова, Е.В. Раецкая, Фам Туан Кыонг// Вестник Воронежского государственного технического университета. Воронеж. 2010. Том 6. № 8. С. 82-86.

4. Кыонг Фам Туан. Исследование полной наблюдаемости одной нелинейной системы/ Фам Туан Кыонг// Вестник Ижевского государственного технического университет. Ижевск. 2011. № 3(51). С. 152-154.

Минимум отношения веса минимального заполнения к весу минимального остовного дерева для выпуклых четырехугольников на евклидовой плоскости.

И.Л. Лаут
(Москва; ilaut@mail.ru)

Минимальным заполнением конечного метрического пространства назовем взвешенный граф наименьшего веса, затягивающий данное метрическое пространство так, что для любых двух точек метрического пространства вес любого пути, соединяющего их в графе, не меньше расстояния между ними в метрическом пространстве.

Минимальным остовным деревом конечного метрического пространства назовем взвешенный граф наименьшего веса, затягивающий данное метрическое пространство так, что ребра графа инцидентны только точкам метрического пространства и вес ребра равен расстоянию между точками метрического пространства, инцидентными ему.

В данной работе доказана точная оценка отношения веса минимального заполнения к весу минимального остовного дерева выпуклых четырехточечных подмножеств евклидовой плоскости.

Пусть $M = \{A, B, C, D\} \subset E^2$, где A, B, C, D - вершины выпуклого четырехугольника. Пусть $\omega(M)$ - вес минимального заполнения M, $\mu(M)$ - вес минимального остовного дерева M. Тогда верна оценка:

$$\frac{\omega(M)}{\mu(M)} \geq \frac{3}{4}.$$

Литература

1. А.О.Иванов, А.А.Тужилин, "О минимальном заполнении", Математический сборник, в печати.

Оптимально локализованные периодические всплески[8]

Е.А. Лебедева
(Санкт-Петербург, СПбГПУ; ealebedeva2004@gmail.com)

В сообщении построено семейство жестких фреймов всплесков с единичной границей для пространства $L_2(0,\,1)$. Семейство оптимально локализовано в смысле константы неопределенности Брейтенбергера по параметру семейства и почти оптимально локализовано по параметру всплеска.

Определение.[1] Для функции $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikx} \in L_2(0,\,1)$ определим угловую $\mathrm{var_A}(f) := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2\right)^2 / \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \bar{c}_{k+1}\right|^2 - 1$ и частотную вариации $\mathrm{var_F}(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 / \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k|c_k|^2\right)^2 / \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2\right)^2$. Величина $UC(f) := \sqrt{\mathrm{var_A(f)var_F(f)}}$ называется периодической константой неопределенности.

Известно, что константа неопределенности ограничена снизу числом $1/2$, и эта граница не достигается.

Теорема. Пусть последовательность $\nu_k^{j,a}$ 2^j-периодична по k

$$\nu_k^{j,a} := \begin{cases} e^{-\frac{k^2+a^2}{(j-1)(j-2)a}}, & k = -2^{j-2}+1, \dots, 2^{j-2}, \\ \sqrt{1 - e^{-\frac{2((k-2^{j-1})^2+a^2)}{(j-1)(j-2)a}}}, & k = 2^{j-2}+1, \dots, 3 \times 2^{j-2}, \end{cases}$$

обозначим $\widehat{\xi}_j^a(k) := \prod_{r=j+1}^{\infty} \nu_k^{r,a}$. Тогда масштабирующие последовательности, маски, всплеск-маски и всплеск-функции определяются так:

$$\widehat{\varphi_j^a}(k) := 2^{-j/2}\widehat{\xi}_j^a(k),\ \mu_k^{j,a} := \sqrt{2}\nu_k^{j,a},$$
$$\lambda_k^{j,a} := e^{2\pi i 2^{-j}k}\mu_{k+2^{j-1}}^{j,a},\ \widehat{\psi}_j^a(k) := \lambda_k^{j+1,a}\widehat{\varphi}_j^a(k);$$

семейство $\Psi_a := \left\{\mathbf{1}, \psi_{j,k}^a :\ j = 0, 1, \dots,\ k = 0, \dots, 2^j - 1\right\}$, образует нормализованный жесткий фрейм для $L_2(0,\,1)$ при любом фиксированном $a > 1$. Далее, для масштабирующей последовательности $(\varphi_j^a)_j$ и последовательности всплеск-функций $(\psi_j^a)_j$ выполняются неравенства

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{a>1} UC(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{a\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} UC(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}.$$
$$\lim_{j\to\infty} UC(\psi_j^a) = \frac{3}{2}, \quad \lim_{a\to\infty} UC(\psi_j^a) = \frac{1}{2}.$$

[8]Работа поддержана грантом РФФИ(№ 09-01-00162) и грантом президента РФ МК-7413.2010.1.

При работе с периодическими всплесками мы пользуемся определениями, данными в [2], [3].

Литература

1. E. Breitenberger. Uncertainty measures and uncertainty relations for angle observables. Found. Phys., 15:353–364, 1985.

2. Skopina M. A., Multiresolution analysis of periodic functions, EJA, 1997, Vol. 3, No. 2, pp. 203-224.

3. Y. W. Koh, S. L. Lee, H. H. Tan. Periodic Orthogonal Splines and Wavelets, Appl. Comput. Harmon. Anal. 2, 201-218 (1995).

Асимптотики производных решения задачи о распространении тепла в неоднородном материале с трещиной с учётом времени

Е.А. Логинова

(Воронеж, ВГУ; vangog2007@list.ru)

В работе изучается нестационарное уравнение теплопроводности, которое имеет вид

$$\gamma(x)\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = div(k(x)\cdot grad\, u(x,t)) + F(x,t).$$

Здесь где $\rho(x)$ — плотность, $\gamma(x)$ — теплоемкость вещества, $k(x)$ — коэффициент внутренней теплопроводности вещества. Будем считать, что для изучаемого материала справедливы следующие представления этих коэффициентов $\rho(x)\gamma(x) = G_0 e^{kx_2}$, $k(x) = a^2 G_0 e^{kx_2}$, что соответствует ситуации, когда вектор направления изменения неоднородности направлен вдоль оси Ox_2. Предположим также, что в материале нет внутренних источников тепла, т. е. $F(x,t) \equiv 0$. Областью, в которой рассматривается данное уравнение, будем считать плоскость Ox_1x_2 с разрезом $l = \{x|\, x_2 = \pm 0;\, x_1 \in [-1;1]\}$, что моделирует наличие трещины, проходящей по отрезку $[-1;1]$ оси абсцисс, параметр $t \in [0,+\infty)$представляет собой время.

После несложных преобразований рассматриваемую задачу можно переписать в виде

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2} + k\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}\right) = 0. \qquad (1)$$

$$u(x_1,+0,t) - u(x_1,-0,t) = q_0(x_1,t); \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0,t)}{\partial x_2} + ku(x_1,+0,t) - \frac{\partial u(x_1,-0,t)}{\partial x_2} - ku(x_1,-0,t) = q_1(x_1,t);$$

$$x_1 \in [-1;1], \quad t \geqslant 0.$$

$$u(x_1,x_2,0) = 0. \qquad (3)$$

Условие 1. Существует $N > 0$, такое что при $t > N$ справедливо представление $q_i(x,t) = q_{i\,\text{ст}}(x)$, $i = 0,1$.

Решение задачи можно выписать в виде суммы потенциалов, свойства которых рассмотрены автором в работах [3],[4].

Утверждение 1. Пусть $q_1(x_1,t) \in C^{2,0}_{x,t}([-1;1]\times[0;\infty))$, $q_0(x_1,t) \in C^{2,0}_{x,t}([-1,1]\times[0,\infty))$. Тогда решение задачи (1)–(3) единственно в $L_2(\mathbb{R}^2\times(0;\infty))$ и при $t>0$ имеет вид

$$u = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^t \frac{a^2\tau k + x_2}{a^2\tau^2}\int\limits_{-1}^{1}\exp\left[\frac{-(x_1-\sigma)^2-(a^2\tau k+x_2)^2}{4a^2\tau}\right]\cdot q_0(\sigma,t-\tau)\,d\sigma\,d\tau -$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t \frac{1}{\tau}\int\limits_{-1}^{1}\exp\left[\frac{-(x_1-\sigma)^2-(a^2\tau k+x_2)^2}{4a^2\tau}\right]\cdot q_1(\sigma,t-\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Утверждение 2. Пусть выполнено условие 1, в котором функции $q_{0\,\text{ст}}(x_1)$, $q_{1\,\text{ст}}(x_1)$ непрерывны по $x_1\in[-1;1]$. Тогда при достаточно больших значениях t ($t>N$) решение задачи (1)–(3) можно записать в виде

$$u(x_1,x_2,t) = -\frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}\right)q_{1\,\text{ст}}(\sigma)\,d\sigma+$$
$$+\frac{ke^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}\right)q_{0\,\text{ст}}(\sigma)\,d\sigma+$$
$$+\frac{ke^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1}K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}\right)q_{0\,\text{ст}}(\sigma)\cdot\frac{x_2}{\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}}\,d\sigma+$$
$$+O(\exp[-c_1\cdot t]).$$

Здесь оценка $|O(\exp[-c_1\cdot t])| \leqslant c_0e^{-c_1t}$ справедлива с постоянными c_1, c_0 не зависящими от x_1, x_2, где x_2 принадлежит любому компакту K. $K_n(x)$ $(n=0,1)$ — функции Макдональда.

Функция $u(x_1,x_2,t)$ принадлежит пространству $C^\infty(x_1,x_2\in\mathbb{R}^2\backslash l\times t\in[0,\infty))$.

Утверждение 3. Пусть $t>0$. Тогда решение задачи (1)–(3) есть непрерывная ограниченная функция аргументов $x_1,x_2\in\mathbb{R}^2\backslash l$,$t\geq 0$, нормальный тепловой поток $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ имеет асимптотическое представление при $x_2\to+0, x_1\in[-1;1]$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi}\left[-\frac{(1-x_1)}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_0(1,t)-\frac{(1+x_1)}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_0(-1,t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_0'(1,t)-\frac{1}{2}\ln((-1-x_1)^2+x_2^2)q_0'(-1,t)\right]+R_1(x_1,x_2,t).$$

Тепловой поток $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ имеет асимптотическое представление при $x_2\to+0$, $x_1\in[-1;1]$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi}\left[-\frac{2x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_0(1,t)+\frac{2x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_0(-1,t)-\right.$$
$$-\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_1(1,t)+\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_1(-1,t)+$$
$$\left.+\frac{k}{2}\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_0(1,t)-\frac{k}{2}\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_0(-1,t)\right]+R_2(x_1,x_2),$$

Здесь функции $R_1(x_1,x_2,t)$, $R_2(x_1,x_2,t)$ равномерно ограничены при $x_2\to+0, x_1\in[-1;1]$.

Утверждение 4. Пусть $t \to \infty$. Тогда решение задачи (1)-(3) есть непрерывная ограниченная функция аргументов $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash l$, нормальный тепловой поток $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ имеет асимптотическое представление

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi}\left[-\frac{(1-x_1)}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_{0\,\text{ст}}(1) - \frac{(1+x_1)}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_{0\,\text{ст}}(-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q'_{0\,\text{ст}}(1) - \frac{1}{2}\ln((-1-x_1)^2+x_2^2)q'_{0\,\text{ст}}(-1)\right] + R_3(x_1,x_2).$$

Тепловой поток $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ имеет асимптотическое представление

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi}\left[\frac{k}{2}\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_{0\,\text{ст}}(1) - \frac{k}{2}\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_{0\,\text{ст}}(-1)-\right.$$
$$-\frac{2x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_{0\,\text{ст}}(1) + \frac{2x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_{0\,\text{ст}}(-1) - \ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_{1\,\text{ст}}(1)+$$
$$\left.+\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_{1\,\text{ст}}(-1)\right] + R_4(x_1,x_2).$$

Здесь функции $R_3(x_1,x_2)$, $R_4(x_1,x_2)$ равномерно ограничены при $x_2 \to +0$, $x_1 \in [-1;1]$.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука. 1981. – 512с.

2. Глушко А.В., Логинова Е.А. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной //Вестник ВГУ серия математика физика. – 2010. – №2 – с. 47–50.

3. Логинова Е. А. Решение задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной в случае конечного времени// Материалы четвертой международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ–2011).– 2011.– с.179–181.

4. Логинова Е. А. Решение задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной при неограниченно большом времени //Материалы четвертой международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ–2011). – 2011. – с.181–182.

Задача о стационарном распределении тепла в плоскости с трещиной

Е.А. Логинова

(Воронеж, ВГУ; vangog2007@list.ru)

Рассматривается задача, описывающая стационарное распределение температуры в неоднородном материале (FGM) с трещиной. Изучается двумерный случай. Неоднородность материала описывается функцией $G(x_2) = G_0 e^{kx_2}$, что соответствует ситуации, когда вектор направления изменения неоднородности направлен перпендикулярно трещине. Уравнение стационарного распределения тепла в экспоненциально неоднородной плоскости имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+k\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0. \tag{1}$$

Искомая функция $u(x_1,x_2)$ — это температура в точке материала с координатами (x_1,x_2). Областью, в которой рассматривается данное уравнение, будем считать плоскость Ox_1x_2 с разрезом $l=\{x|\,x_2=\pm 0;\ x_1\in[-1;1]\}$, что моделирует наличие трещины, проходящей по отрезку $[-1;1]$ оси абсцисс.

Граничные условия заданы следующим образом

$$u(x_1,+0)-u(x_1,-0)=q_0(x_1); \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0)}{\partial x_2}+ku(x_1,+0)-\frac{\partial u(x_1,-0)}{\partial x_2}-ku(x_1,-0)=q_1(x_1);$$

$$x_1\in[-1;1].$$

Первое из условий (2) описывает разность между температурами верхнего и нижнего берега трещины, а второе — разность между тепловыми потоками через эти берега.

Утверждение 1. Фундаментальным решением оператора $\Delta-k\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ в $\mathbb{R}^2$ является функция $E(x)=-\dfrac{1}{2\pi}\exp[-\dfrac{k}{2}x_2]K_0(\dfrac{k}{2}|x|)$, где $K_0(\dfrac{k}{2}|x|)$ — функция Макдональда.

Утверждение 2. Задача (1) – (2) сводится к обобщённой задаче Коши

$$\Delta u+k\frac{\partial u}{\partial x_2}=q_1(x_1)\cdot\delta_{[-1;1]}(x)+q_0(x_1)\cdot\frac{\partial\delta_{[-1;1]}(x)}{\partial x_2}, \tag{3}$$

где $q_1(x_1,t),q_0(x_1,t)\in D'(\mathbb{R}^1)$, $\delta_{[-1;1]}(x)$ — специализированная дельта функция, введённая в [3].

Утверждение 3. Решение обобщенной задачи Коши (3) можно записать в виде

$$u(x_1,x_2)=u_1(x_1,x_2)+u_0(x_1,x_2),$$

где $u_1(x_1,x_2)=E(x_1,x_2)*q_1(x_1)\delta_{[-1;1]}$ — поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя; $u_0(x_1,x_2)=E(x_1,x_2)*\dfrac{\partial q_0(x_1)\delta_{[-1;1]}}{\partial x_2}$ — поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя.

Теорема 1. Пусть $q_1(x_1)\in C^2([-1;1])$. Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал простого слоя представим в виде

$$u_1(x_1,x_2)=-\frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}\right)q_1(\sigma)\,d\,\sigma.$$

При $x_1\in(-1;1)$ выполнены условия

$$\frac{\partial u_1(x_1,+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1(x_1,-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1);u_1(x_1,+0)-u_1(x_1,-0)=0.$$

Если дополнительно потребовать, что $q_1(\pm1,t)=0$, то граничные условия выполняются в точках $x_1=\pm1$ по непрерывности.

Кроме того, $u_1(x_1,x_2) \in C^\infty$ $(x_1,x_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash l)$.

Теорема 2. Пусть $q(x_1) \in C^2([-1;1])$. Тогда поверхностный стационарный тепловой потенциал двойного слоя представим в виде

$$u_0(x_1,x_2) = \frac{ke^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi} \int\limits_{-1}^{1} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}\right) q_{0\,\text{ст}}(\sigma)\, d\sigma +$$
$$+\frac{ke^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi} \int\limits_{-1}^{1} K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}\right) q_{0\,\text{ст}}(\sigma) \times \frac{x_2}{\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}}\, d\sigma,$$

и при $x_1 \in (-1;1)$ выполнены условия

$$\frac{\partial u_0(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_0(x_1,-0)}{\partial x_2} = -kq_0(x_1);$$

$$u_0(x_1,+0) - u_0(x_1,-0) = q_0(x_1).$$

Если дополнительно потребовать, что $q_0(\pm 1) = 0$, то граничное условие $\dfrac{\partial u_0(x_1,+0)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_0(x_1,-0)}{\partial x_2} = -kq_0(x_1)$ выполняется в точках $x_1 = \pm 1$ в смысле главного значения, а условие $u_0(x_1,+0) - u_0(x_1,-0) = q_0(x_1)$ выполняется по непрерывности. При более строгом требовании $q_0'(\pm 1) = 0$ условия выполняются в точках $x_1 = \pm 1$ по непрерывности.

Кроме того, $u_0(x_1,x_2) \in C^\infty(x_1,x_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash l)$.

Теорема 3. В условиях теорем (1)–(2) решение исходной задачи единственно в $L_2(\mathbb{R}^2)$ и имеет вид

$$u = e^{-\frac{k}{2}x_2}\left[-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}\right) q_1(\sigma)\ d\sigma + \right.$$
$$+\frac{k}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1} K_1\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}\right) \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+(x_1-\sigma)^2}} \cdot q_0(\sigma)\ d\sigma +$$
$$\left. +\frac{ke^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1} K_0\left(\frac{k}{2}\sqrt{(x_1-\sigma)^2+x_2^2}\right) q_0(\sigma)\, d\sigma\right].$$

Функция $u(x_1,x_2)$ принадлежит пространству $C^\infty(x_1,x_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash l)$.

Теорема 4. В условиях теорем (1)–(3) решение задачи (1)–(2) есть непрерывная ограниченная функция аргументов $x_1,x_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash l$, нормальный тепловой поток $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ имеет асимптотическое представление

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi}\left[-\frac{(1-x_1)}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_0(1) - \frac{(1+x_1)}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_0(-1) + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_0'(1) - \frac{1}{2}\ln((-1-x_1)^2+x_2^2)q_0'(-1)\right] + R_1(x_1,x_2).$$

Тепловой поток $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ имеет асимптотическое представление

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi}\left[\frac{k}{2}\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_0(1) - \frac{k}{2}\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_0(-1) - \right.$$

$$-\frac{2x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_0(1)+\frac{2x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_0(-1)-\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_1(1)+$$
$$+\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_1(-1)\big]+R_2(x_1,x_2).$$

Здесь функции $R_1(x_1,x_2)$, $R_2(x_1,x_2)$ равномерно ограничены при $x_2\to+0$, $x_1\in[-1;1]$.

Литература

1. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. – М.: Издательство иностранной литературы. 1949 – 875 с.

2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. –4-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука. 1981 – 512 с.

3. Глушко А.В., Логинова Е.А. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной //Вестник ВГУ серия математика физика. – 2010. – №2 – с. 47–50.

Об одной задаче оптимального управления для уравнения Хоффа на графе

Н.А. Манакова

(Челябинск, ЮУрГУ; manakova@hotbox.ru)

Нас интересует поведение конструкции из двутавровых балок, находящихся под постоянной нагрузкой. Иными словами, пусть $\mathbf{G}=\mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V}=\{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E}=\{E_j\}$ – множество дуг, причем каждая дуга имеет длину $l_j>0$ и площадь поперечного сечения ребра $d_j>0$. Нас интересует задача на графе $\mathbf{G}$ с краевыми

$$x_j(0,t)=x_k(l_k,t),\ E_j,\ E_k\in E^\alpha(V_i)\cup E^\omega(V_i); \tag{1}$$

$$\sum_{E_j\in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0,t)-\sum_{E_k\in E^\omega(V_i)} d_k x_{ks}(l_k,t)=0; \tag{2}$$

и начальными

$$(\lambda+\Delta)(x_j(s,0)-x_{j0}(s))=0,\quad s\in(0,l_j) \tag{3}$$

условиями для уравнений

$$\lambda x_{jt}+x_{jsst}+\alpha x_j+\beta x_j^3=u_j. \tag{4}$$

Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (1) требует, чтобы все решения были непрерывными на вершинах графа; а (2) – аналог условия Кирхгоффа – в случае, когда граф состоит из единственной дуги с двумя вершинами, превращается в условие Неймана.

В подходящих функциональных пространствах задача (1) – (3) для уравнения (4) редуцируется к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0)-x_0)=0 \tag{5}$$

для полулинейного операторного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}+M(x)=u, \tag{6}$$

где оператор L может не быть непрерывно обратимым. Нас интересует оптимальное управление
$$J(x,u) \to \min \tag{7}$$
решениями задачи (5), (6). Здесь $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$. Таким образом, оптимальное управление решениями задачи (1) – (4) дает возможность минимизировать штрафные санкции, выбрав внешнюю нагрузку таким образом, чтобы под действием нагрузки привести конструкцию из двутавровых балок к необходимой форме с наименьшими затратами.

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения
$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \tag{8}$$
плотны и непрерывны. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, самосопряженный, неотрицательно определенный фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле $\mathcal{H}$) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть далее $M \in C^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ – s-монотонный (т. е. $\left\langle M'_y x, x\right\rangle > 0$, $\forall x, y \in \mathfrak{B} \setminus \{0\}$) и p-коэрцитивный (т. е. $\langle M(x), x\rangle \geq C_M \|x\|^p$ и $\|M(x)\|_* \leq C^M \|x\|^{p-1}$ при некоторых константах $C_M, C^M \in \mathbb{R}_+$ и $p \in [2, +\infty)$ и любом $x \in \mathfrak{B}$, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы в пространстве $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$ соответственно) оператор [1].

Введем в рассмотрение множество $\operatorname{coim} L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi\rangle = 0, \ \forall \varphi \in \ker L\}$.

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L тотальна в $\mathfrak{B}$, поэтому построим галеркинские приближения решения задачи (5), (6) в виде
$$x^m(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t)\varphi_k, \ m > \dim\ker L,$$
где коэффициенты $a_k = a_k(t), \ k = 1, ..., m$ определяются следующей задачей:
$$\langle L\dot{x}^m, \varphi_k\rangle + \langle M(x^m), \varphi_k\rangle = \langle u, \varphi_k\rangle, \tag{9}$$
$$\langle L(x^m(0) - x_0), \varphi_k\rangle = 0, \ k = 1, ..., m. \tag{10}$$

Теорема 1. [1] *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_q(0,T; \mathfrak{B}^*)$ существует единственное решение $x \in L_\infty(0,T; \operatorname{coim} L) \cap L_p(0,T; \mathfrak{B})$ задачи (5), (6).*

Фиксируем $T \in \mathbb{R}_+$. Построим пространство $\mathfrak{U} = L_q(0,T; \mathfrak{B}^*)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, и определим в пространстве $\mathfrak{U}$ замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$. Рассмотрим задачу оптимального управления (5) – (7), где функционал качества задается формулой
$$J(x,u) = \frac{1}{p}\int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|^p_{\mathfrak{B}}\, dt + \frac{N}{q}\int_0^T \|u(t)\|^q_{\mathfrak{B}^*}\, dt, \tag{11}$$
$z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Определение 1. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in L_\infty(0,T; \operatorname{coim} L) \cap L_p(0,T; \mathfrak{B}) \times \mathfrak{U}_{ad}$ называют решением задачи (5) – (7), если $J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf\limits_{(x,u)} J(x,u)$, и $(\tilde{x}, \tilde{u})$ удовлетворяет уравнению (5).

Теорема 2. [2]*При любых* $x_0 \in \mathfrak{B}, T \in \mathbb{R}_+$ *существует решение задачи (5) – (7).*

Для редукции задачи (1) – (4) к задаче (5), (6) через $L_p(\mathbf{G})$ обозначим множество $L_p(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots, g_j, \ldots) : g_j \in L_p(0, l_j)\}$. Положим пространство $\mathcal{H} = L_2(\mathbf{G})$ – гильбертово со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j(s) h_j(s)\, ds,$$

пространства $\mathfrak{B} = L_4(\mathbf{G})$, $\mathfrak{B}^* = L_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G})$ – банаховы, в которых можно ввести нормы

$$\|x\|_{L_p(\mathbf{G})} = \left(\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} |x_j|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Построим пространство $W_2^1(\mathbf{G}) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots) : x_j \in W_2^1(0, l_j)$, причем выполнено $(1)\}$. Положим $\mathfrak{H} = W_2^1(\mathbf{G})$, которое является банаховым пространством с нормой

$$\|x\|_{\mathfrak{H}} = \left(\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (x_{js}^2 + x_j^2)\, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Банахово пространство $\mathfrak{H}$ такое, что условия (2) выполняются автоматически, причем условия (1) корректны в силу абсолютной непрерывности векторов пространства $W_2^1(0, l_j)$. Обозначим через $\mathfrak{H}^*$ сопряженное к $\mathfrak{H}$ в смысле двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ банахово пространство. Формулами

$$\langle Lx, y \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (\lambda x_j y_j - x_{js} y_{js})\, ds, \quad \forall x, y \in \mathfrak{H}$$

$$\langle M(x), y \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (\alpha x_j y_j + \beta x_j^3 y_j)\, ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{B}.$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений задачи (1), (2) для оператора L, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности. Тогда $\{\varphi_k\}$ соответствующие им собственные функции, ортонормированные в смысле пространства $L_2(\mathbf{G})$.

Лемма 1. (i) *При всех* $\lambda_1 \geq 0$ *оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ *самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство* $\{\varphi_k\}$ *его функций образует базис пространства* $\mathfrak{H}$.

(ii) *При всех* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *оператор* $M \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ *s-монотонен и 4-коэрцитивен.*

Теорема 3. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_1 \geq 0$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$ существует единственное решение $x \in L_\infty(0, T; \mathrm{coim} L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{B})$ задачи (1) – (4).

Теорема 4. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_1 \geq 0$, тогда существует оптимальное управление в задаче (1) – (4), (7).

Литература

1. Свиридюк Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. 1989. № 2. С.55-61.

2. Манакова Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. 2007. Т.43, № 9. С.1185-1192.

Некоторые условия обратимости дифференциального оператора

С.В. Марюшенков
(Воронеж, ВГУ; stasint1@mail.ru)

Пусть X– банахово пространство; $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}, t > 0\}$; $L_p = L_p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$– банахово пространство, состоящее из измеримых по Бохнеру функций $x : X \to \mathbb{R}$, для которых конечна величина $\|x\|_p = (\int\limits_0^\infty \|x(t)\|^p dt)^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\|x\|_\infty =$vrai $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|x(t)\|$; $W_p^1(\mathbb{R}_+, X) = \{x \in L_p$ абсолютно непрерывная $: \dot{x} \in L_p\}$– пространство Соболева; E– замкнутое подпространство из X; $EndX$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X; $A : \mathbb{R}_+ \to EndX$ считается существенно ограниченной, т.е. принадлежащей пространству $L_\infty(\mathbb{R}_+, EndX)$.

Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}_E = \frac{d}{dt} - A(t) : D(\mathcal{L}) = \{x \in W_p^1(\mathbb{R}_+, H) : x(0) \in E\} \subset L_p \to L_p. \tag{1}$$

Как известно([1]), для постоянной функции $A(t) \equiv A_0 \in EndX$ необходимым и достаточным условием обратимости являются:

1. $\sigma(A_0) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$
2. $ImQ = E$, где $Q = I - P$, P- проектор, построенный по спектру оператора A_0, находящемуся в правой полуплоскости.

При этом обратный оператор имеет вид: $(\mathcal{L}_E^{-1} y)(s) = \int\limits_0^\infty G_{A_0}(t-s)y(s)ds$, $\mathcal{L}_E^{-1} : L_p \to L_p$, где $G_{A_0} : \mathbb{R} \to EndX$- функция Грина, которая допускает представление вида $G_{A_0}(\tau) = e^{A_0\tau}P$ при $\tau \geq 0$ и $G_{A_0}(\tau) = -e^{A_0\tau}Q$ при $\tau < 0$.

Предположение 1. Пусть существует $a > 0$ такое, что выполнено следующее условие:

$$\nu(A) = \inf_{t \geq a} dist(\sigma(A(t)), i\mathbb{R}) > 0. \tag{2}$$

Предположение 2. Существуют постоянные $M_+, M_-, \gamma_+, \gamma_- > 0$ такие, что при $t \geq a$ $\|G_{A(t)}(\tau)\| \leq M_+ exp(-\gamma_+\tau)$, если $\tau \geq 0$, $\|G_{A(t)}(\tau)\| \leq M_- exp(\gamma_-\tau)$, если $\tau < 0$.

Предположение 3. Существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|A(t) - A(s)\| < C|t-s|$ для любых $t, s \geq a$.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1-3 и одно из условий

$$(M_+/\gamma_+^2 + M_-/\gamma_-^2) < 1,$$
$$C(M_+(1 - \exp(-2\gamma_+\|A\|/C))) + (M_-(1 - \exp(-2\gamma_-\|A\|/C)))) < 1.$$

Тогда оператор $\mathcal{L}_E$, где $(\mathcal{L}_E(E))(a) = ImQ(a)$, непрерывно обратим.

Теорема 2. Пусть $X = \mathbb{C}^n$- конечномерное пространство, $E = \{0\}$ и выполнены условия

$$\gamma = \sup_{\lambda\in\sigma(A(t))} Re(\lambda) < 0,$$
$$\|A(t) - A(s)\| \le \varphi(t-s) > 0$$
$$\int\limits_0^\infty e^{\gamma u}(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(2u\|A\|_\infty)^k\varphi(u)du < 1.$$

Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ обратим.

Литература

1. Баскаков А.Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Известия РАН. Серия математическая. Т. 73, №2. 2009. С.3-68.

2. Баскаков А.Г. Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов // Доклады Академии наук. Т. 333, №3. 1993. С.282-284.

3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. –М.Наука, 1970. – 536 с.

Интегральные операторы с анизотропно однородными ядрами компактного типа и псевдодифференциальные операторы

Е.И. Мирошникова

(Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет; elenmiroshnikova@gmail.com)

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $n \geqslant 2$, рассмотрим интегральный оператор вида

$$(Kf)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \kappa(x,y)f(y)dy, \tag{1}$$

где κ — определенная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ измеримая функция, удовлетворяющая условию однородности степени $(-n)$:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in (0;\infty) \quad \kappa(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n}\kappa(x,y). \tag{2}$$

Изучение многомерных интегральных операторов вида (1) с однородными ядрами в L_p–пространствах начато Л. Г. Михайловым [1]. Вопросам ограниченности и разрешимости таких операторов с переменными коэффициентами посвящены работы Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко, О. Г. Авсянкина и других авторов (см. [2]–[3] и цитированные там источники), в которых кроме условий однородности на ядра накладывались и существенно использовались условия инвариантности относительно диагонального действия $SO(n)$ — группы вращений пространства $\mathbb{R}^n$. В работе [4] рассмотрен новый широкий класс ядер компактного типа, включающий в себя $SO(n)$-инвариантные ядра, и исследована разрешимость интегральных операторов с такими ядрами и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами. Результаты об ограниченности и разрешимости распространяются на случай операторов с анизотропно однородными ядрами.

Пусть $\boldsymbol{n} = (n_1, ..., n_k)$ — мультииндекс, состоящий из целых положительных чисел, которые соответствуют разбиению пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times ... \times \mathbb{R}^{n_k}$. Функцию κ назовем анизотропно однородной мультистепени $(-\boldsymbol{n})$, если

$$\forall i \in \{1, ..., k\}, \quad \forall x_{(i)}, y_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad \forall \alpha_i \in (0; \infty):$$

$$\kappa(\alpha_1 x_{(1)}, ..., \alpha_k x_{(k)}, \alpha_1 y_{(1)}, ..., \alpha_k y_{(k)}) = \alpha_1^{-n_1} ... \alpha_k^{-n_k} \kappa(x_{(1)}, ..., x_{(k)}, y_{(1)}, ..., y_{(k)}). \tag{3}$$

Если $k = 1$ и мультииндекс $\boldsymbol{n}$ совпадает с числом n, то условие (3) совпадает с условием обычной однородности (2).

Для операторов вида (1) с ядрами, удовлетворяющими условию (3), получены достаточные условия ограниченности (см. [5]). В качестве коэффициентов рассматриваются определенные на $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times ... \times \mathbb{R}^{n_k}$ мультипликативно слабо осциллирующие функции, строится C^*–алгебра $\Omega^{\boldsymbol{n}}_{\text{mult}}$ таких функций. Аналогично [4] вводится класс анизотропно однородных ядер компактного типа $\mathfrak{C}_{\boldsymbol{n};p}$. Для элементов банаховой алгебры $\mathfrak{W}_{\boldsymbol{n},p}$, порожденной операторами вида (1) с ядрами из $\mathfrak{C}_{\boldsymbol{n};p}$ и коэффициентами из $\Omega^{\boldsymbol{n}}_{\text{mult}}$, найдены условия фредгольмовости и формула для вычисления индекса [6].

В докладе эти результаты переносятся на аналогичные классы псевдодифференциальных операторов. Интерес к ним продиктован, в частности, их естественной связью с меллиновскими свертками (см. [7], [5]) и применимостью при решении задач со сложными особенностями [8].

Литература

1. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений// Math. Nachr., № 76. 1977. С. 91–107.

2. Karapetiants N., Samko S. Equations with Involutive Operators — Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 2001. — 360 p.

3. Авсянкин О. Г. О C^*-алгебре, порожденной многомерными интегральными операторами с однородными ядрами и операторами мультипликативного сдвига// Докл. РАН, Т. 419, № 6. 2008. С. 727–728.

4. Деундяк В. М. Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами компактного типа и мультипликативно слабо осциллирующими коэффициентами// Математические заметки, Т. 87, № 5. 2010. С. 713–729.

5. Деундяк В. М., Мирошникова Е. И. Многомерные мультипликативные свертки и их приложения к теории операторов с однородными ядрами// сб. "Труды научной школы И.Б. Симоненко". Ростов-на-Дону: изд-во ЮФУ. 2010. С. 67-78.

6. Deundyak V. M., Miroshnikova E. I. On fredholmness of integral operators with anisotropically homogeneous kernels of compact type// Abstracts of reports of International conference AMADE, 12-17th of September 2011, Minsk, Belarus — Minsk: IM NASB, 2011. P. 54.

7. Пламеневский Б. А. Алгебры псевдодифференциальных операторов — М.: Наука. 1986. — 255 с.

8. Rabinovich V., Schulze B.-W., Tarkhanov N. C^*-algebras of singular integral operators in domains with oscillating conical singularities// Manuscripta math., № 108. 2002. P. 69–90.

Прямые и двойственные задачи L-псевдообрашения

В.А. Морозов, Э.М. Мухамадиев, А.Б. Назимов
(Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова;morozov@srcc.msu.ru, Вологда, ВоГТУ;
emuhamadiev@rambler.ru, n.akbar54@mail.ru)

Пусть $A : H \to F, L : H \to G$ - линейные ограниченные операторы, $f \in F$, $g \in G$ -заданные элементы, а H, F, G - гильбертовы пространства. Задачу нахождения квазирешения уравнения $Lx = g$ на множестве псевдорешений уравнения $Ax = f$ назовем стационарной задачей L -псевдообращения. Если в этой задаче поменяем местами уравнения, то полученную задачу назовем двойственной стационарной задачей. Задачи нахождения минимума $x_\alpha \in H$ функционала $\Phi_\alpha(x) = \|Ax - f\|^2 + \alpha \|Lx - g\|^2$ при $\alpha > 0$ и исследования предельных свойств решения x_α при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$ назовем вариационной и двойственной вариационной задачами L-псевдообращения. Если существует $\gamma > 0$ такое, что $\|Ax\|^2 + \|Lx\|^2 \geq \gamma \|x\|^2$ для всех $x \in H$, то операторов A и L назовем взаимно дополнительными. Справедливы:

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны: а1) для любых $f \in F$, $g \in G$ стационарная задача имеет единственное решение x_0; б1) для любых $f \in F$, $g \in G$ и $\alpha > 0$ вариационная задача имеет единственное решение x_α, удовлетворяющее условию $\|x_\alpha - x_0\| = O(\alpha)$ при $\alpha \to 0$; в1) оператор A является нормально разрешимым и операторы A и L -взаимно дополнительные.*

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны: а2) для любых $f \in F$, $g \in G$ двойственная стационарная задача имеет единственное решение x_∞; б2) для любых $f \in F$, $g \in G$ и $\alpha > 0$ вариационная задача имеет единственное решение x_α, удовлетворяющее условию $\|x_\alpha - x_0\| = O(\alpha^{-1})$ при $\alpha \to \infty$; в2) оператор L является нормально разрешимым и операторы A и L -взаимно дополнительные.*

Изучим вопрос при отсутствии нормальной разрешимости и взаимной дополнительности операторов A и L. Обозначения: Q_A, Q_L и Q_A, Q_L - ортогональные проектора на $\ker A$ и $\ker L$, соответственно, A^+ - псевдообратный оператор для оператора A.

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны: а3) для данных $f_0 \in F$, $g_0 \in G$ система $Ax = f_0, Lx = g_0$ - совместна; б3) $f_0 \in R(A), g_0 - LA^+ f_0 \in R(LQ_A)$; в3) $g_0 \in R(L), f_0 - AL^+ g_0 \in R(AQ_L)$.*

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны: а4) для данных $f_0 \in F$, $g_0 \in G$ система $Ax = f_0$, $Lx = g_0$ - однозначно разрешима; б4) имеют место включения б3) и стационарная задача имеет единственное решение $x_{01} = A^+ f_0 + (LQ_A)^+ (g_0 - LA^+ f_0)$; в4) имеют место включения в3) и двойственная стационарная задача имеет единственное решение $x_{02} = L^+ g_0 + (AQ_L)^+ (f_0 - AL^+ g_0)$; г4) $\ker A \cap \ker L = \{0\}$.*

Работа выполнена при поддержки РФФИ, проект № 10-01-00297-а.

Литература

[1]. Морозов В. А., Мухамадиев Э. М., Назимов А. Б., К проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений Докл. РАН. 2008. Т. 419, № 4. С. 1–4.

[2]. Морозов В. А., Мухамадиев Э. М., Назимов А. Б., О проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений ЖВМ и МФ. 2007. Т. 47, № 12. С. 1971–1978.

Критерий существования классического решения уравнения Пуассона

Э.М. Мухамадиев, Г.Э. Гришанина
(Дубна, Международный университет «Дубна»; anora66@mail.ru,
Вологда, ВоГТУ; emuhamadiev@rambler.ru)

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G, \tag{4}$$

где f -непрерывная в ограниченной области G функция. Если функция f интегрируема по Лебегу в области G, то объемный потенциал

$$v(x, y, z) = \int_G f(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \tag{5}$$

определяет непрерывно дифференцируемое обобщенное решение уравнения (1) в области G . Решение (5) является классичесским, т.е. имеет непрерывные частные производные второго порядка в области G, если f непрерывно дифференцируема или является непрерывной по Гельдеру в области G.

Известно, что лишь условие непрерывности функции f не достаточно для существования классического решения. Например, для непрерывной функции $f = \Delta w$ при $(x, y, z) \neq 0$ и $f = 0$ при $(x, y, z) = 0$, где $w = (2x^2 - y^2 - z^2)\ln^\beta(x^2 + y^2 + z^2), 0 < \beta < 1$, уравнение (1) не имееет классического решения в любой области G, содержащей нулевую точку. В связи с этим представляет интерес задача о выделении класса непрерывных в области G функций, для которых уравнение имеет классическое решение. По функции f определим

$$g(x, y, z, r, \varphi, \theta) = f(x + r\sin\theta\cos\varphi, y + r\sin\theta\sin\varphi, z + r\cos\theta),$$

$$F_2^{(k)}(x, y, z, r) = \int_S g(x, y, z, r, \varphi, \theta) Y_2^k(\theta, \varphi)\, ds, k = 0, \pm 1, \pm 2,$$

где Y_2^k- сферические функции второго порядка [1], $ds = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ -элемент площади единичной сферы S пространства R^3. Функции $F_2^{(k)}$ опредлены в области $\tilde{G} = \{(x, y, z, r) : M = (x, y, z) \in G, |r| < \rho(M, \partial G)\}$ и $F_2^{(k)}(x, y, z, 0) \equiv 0$.

Функцию назовем усиленно непрерывной в точке, если существуют сингулярные интегралы

$$\int_0^{r_1} F_2^{(k)}(x, y, z, r) \frac{dr}{r} = \lim_{\delta \to} \int_\delta^{r_1} F_2^{(k)}(x, y, z, r) \frac{dr}{r}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{6}$$

и равномерно усиленно непрерывной, если соотношение (6) выполняется равномерно относительно (x, y, z) из каждого компакта $K \subset G$ при некотором $r_1 = r_1(K) > 0$.

Теорема 1. *Пусть уравнение (1) имеет классическое решение в области G. Тогда функция f равномерно усиленно непрерывна в области G.*

Теорема 2. *Пусть функция f усиленно непрерывна в G и принадлежит пространству $L_1(G)$. Тогда объемный потенциал (5) является классическим решением уравнения (1).*

Из теоремы 1 и 2 следует

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна в G и принадлежит пространству $L_1(G)$. Тогда уравнение (1) имеет классическое решение в области G тогда и только тогда, когда f усиленно непрерывна в G.*

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Наука, М.,1977, 736 с.

О ненулевых и ограниченных решениях одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов

(Вологда, ВоГТУ; emuhamadiev@rambler.ru , nan67@rambler.ru)

Работа посвящена исследованию ненулевых и ограниченных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\psi''(x) = \left(1 + \frac{c}{x^2}\right)\psi(x) - \frac{1}{x^\alpha}|\psi(x)|^{k-1}\psi(x), \quad x > 0, \tag{1}$$

где c, α, k - постоянные, $\alpha > 0$, $k > 1$. Уравнения вида (1) возникают в физических моделях теории элементарных частиц.

В работе [1] доказано существование положительного решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(+\infty) = 0, \tag{2}$$

в случае, когда $\alpha = k - 1$, $1 < k < 5$, $c = l(l+1)$, l - целое неотрицательное. А в работе [2] доказано, что если $c > -1/4$, $k > 1$, $0 < 2\alpha < k + 3$, то справедливы следующие утверждения:

1) существует счетное число ненулевых решений задачи (1), (2) из пространства

$$H_0^1 = \{f : \quad f, f' \in L_2(0, +\infty), f(0) = 0\};$$

2) для любого ненулевого решения $\psi(x) \in H_0^1$ задачи (1), (2) справедливы асимптотические формулы

$$\psi(x) = x^\beta\left(\psi_0 + o(1)\right), \quad \psi'(x) = x^{\beta-1}\left(\beta\psi_0 + o(1)\right) \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$\psi(x) = e^{-x}\left(\psi_\infty + o(1)\right), \quad \psi'(x) = e^{-x}\left(-\psi_\infty + o(1)\right) \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где $\beta = \left(1 + \sqrt{1+4c}\right)/2, \quad 0 < |\psi_0|, |\psi_\infty| < \infty$;

3) функционал

$$F_{k,\alpha}(f) = \int_0^{+\infty} s^{-\alpha}|f(s)|^{k+1}ds$$

на множестве

$$\left\{f \in H_0^1 : \quad (f, f)_{L_2} + (f', f')_{L_2} + c(f/s, f/s)_{L_2} = 1\right\}$$

достигает своего максимума на некоторой функции $f^*(x)$, и при этом функция $\psi^*(x) = (F_{k,\alpha}(f^*))^{-1/(k-1)} f^*(x)$ является положительным решением задачи (1), (2).

В настоящей работе исследуются следующие свойства ненулевых решений уравнения (1): продолжимость, поведения при $x \to 0$ и при $x \to +\infty$, ограниченность и колеблимость на промежутке $(0, +\infty)$. Доказана следующая теорема.

Теорема. 1. *Любое ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1) продолжимо до промежутка $(0,+\infty)$, и верна оценка*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|\psi(x)|^{k-1}}{x^{\alpha}} \le \frac{k+1}{2}.$$

2. *Ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1) ограничено при $x\to+\infty$ тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{|\psi(x)|^{k-1}}{x^{\alpha}} < 1.$$

3. *В случае, когда $c<0$ и $\alpha>2$, любое ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1) ограничено при $x\to 0$. А если $c<-1/4$, то $\psi(x)$ имеет бесконечное число нулей в окрестности точки $x=0$.*

4. *Существует однопараметрическое семейство ненулевых решений $\psi(x,\lambda)$, $\lambda\in(0,+\infty)$, уравнения (1) такое, что*

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x}\psi(x,\lambda)=\lambda.$$

Литература

1. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Макаренко Г.И. Достаточное условие существования положительного частицеподобного решения нелинейного уравнения скалярного поля // Препринт Р5-11705 Объединенного института ядерных исследований, Дубна, 1978.

2. Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н. Об ограниченных решениях одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник, том 202, 2011 г., № 9, с.121-134.

Аффинные инварианты 3-го порядка однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$

Т.Т.З. Нгуен

(Россия, Воронеж, ВГАСУ, thuyduongpy@yahoo.com)

В задаче об аффинной однородности вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ важную роль играют многочлены 3-го порядка из их канонических уравнений [1].

Пусть в каноническом уравнении

$$v=|z_1|^2+|z_2|^2+[\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)+\frac{1}{2}(\overline{z_1^2}+\overline{z_2^2})]+F_3(z,\overline{z},u)+F_4(z,\overline{z},u).... \tag{1}$$

аффинно-однородной поверхности трубчатого типа ($\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2$, см. [2]) многочлен $F_3(z,\overline{z},u)$ не зависит от переменной u.

Замечание. Для всех однородных поверхностей трубчатого типа в пространстве $\mathbb{C}^2$ это требование выполняется (см. [3]).

Любой вещественнозначный многочлен третьей степени от переменных $z=(z_1,z_2)$ и $\bar{z}=(\bar{z}_1,\bar{z}_2)$ можно записать как

$$\begin{aligned}F_3(z,\bar{z}) = 2Re\{&(f_{30}z_1^3+f_{21}z_1^2z_2+f_{12}z_1z_2^2+f_{03}z_2^3)+\\ &+(g_{20}z_1^2+g_{11}z_1z_2+g_{02}z_2^2)\overline{z}_1+\\ &+(h_{20}z_1^2+h_{11}z_1z_2+h_{02}z_2^2)\overline{z}_2\},\end{aligned} \tag{2}$$

где f_{kl}, g_{kl}, h_{kl} - некоторые комплексные коэффициенты.

Набор из 10 коэффициентов F_3 представим в виде таблицы ("матрицы")

$$\begin{pmatrix} f_{30} & & f_{21} & & f_{12} & & f_{03} \\ & g_{20} & & g_{11} & & g_{02} & \\ & h_{20} & & h_{11} & & h_{02} & \end{pmatrix}.$$

За счет аффинного преобразования координат можно подчинить коэффициенты уравнения (1) следующим дополнительным ограничениям:

$$Ref_{21} = 0, \quad Ref_{12} = 0. \tag{3}$$

А рассмотрение компонент веса 2 основного тождества

$$Re\{Z(\Phi)\}_{|M} \equiv 0$$

для однородных поверхностей (см. [Л-Х]) дает дополнительные ограничения на коэффициенты F_3.

Предложение 1. Коэффициенты многочлена F_3 из уравнения (1) аффинно-однородной поверхности удовлетворяют ограничениям:

$$\begin{cases} 3f_{30} = -2g_{20} + \overline{g_{20}}, \\ g_{11} = \overline{h_{20}} + f_{21}, \\ 3f_{03} = -2h_{02} + \overline{h_{02}}, \\ h_{11} = \overline{g_{02}} + f_{12}, \\ -g_{11} + \overline{g_{11}} + 2f_{21} - 2h_{20} = 0, \\ -h_{11} + \overline{h_{11}} + 2f_{12} - 2g_{02} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Следствие. Набор коэффициентов не зависящего от переменной u многочлена F_3 из уравнения (1) аффинно - однородной СПВ - поверхности трубчатого типа может быть записан в форме

$$\begin{pmatrix} (t_1 + it_2) & & it_3 & & it_4 & & (t_5 + it_6) \\ & 3t_1 + it_2 & & it_7 & & i(t_4 - t_8) & \\ & i(t_3 - t_7) & & it_8 & & 3t_5 + it_6 & \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $t_1, ..., t_8$ - некоторые вещественные параметры.

Сокращение числа параметров, влияющих на свойство однородности, упрощает задачу. В итоге удается построить списки алгебр Ли, отвечающих однородным поверхностям из обсуждаемого случая при дополнительных условиях

$$(t_1, t_5) = (0, 0). \tag{4}$$

Теорема 1. Если матрица многочлена F_3 имеет вид (3) - (4), то существует лишь 5 типов матричных алгебр Ли, отвечающих однородным поверхностям.

Пример. Базис 5-мерной алгебры Ли одного из полученных типов имеет вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} -4it_2 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & -2it_2 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} -it_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -it_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2t_2 & 0 & t_2^2 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2it_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -it_2^2 & 1 \\ 0 & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2t_2 & 0 & t_2^2 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта алгебра соответствует, например, следующей (новой) однородной поверхности 4-го порядка:

$$Re(z_1\overline{z_2})Re(z_1\overline{z_3}) = |z_1|^2. \tag{5}$$

Литература

1. Лобода А. В. Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. С. Ходарев // Известия ВУЗов. Сер. Математика. - 2003. - N 10. - С. 38 - 50

2. emphНгуен Т. Т. З. Аффинно-однородные поверхности трубчатого типа в $\mathbb{C}^3$ / Т. Т. З. Нгуен // Воронежская зимняя матем. школа (ВЗМШ-2011), Воронеж, 2011. Тезисы докл. С.236 - 237.

3. Лобода А. В. Классификация аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$ // Междунар. конф. "Метрическая геометрия поверхностей и многогранников посв. 100-летию Ефимова. Москва, 2010. Сборник тезисов. С. 41-42.

Разрешимость в пространствах Гельдера некоторого класса краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

Д.А. Неверова

(Москва, РУДН; dneverova@gmail.com)

Впервые обобщенные решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений рассматривались Г.А. Каменским, А.Д. Мышкисом. Основы теории краевых задач для симметрических дифференциально-разностных уравнений были заложены А.Г. Каменским с помощью построений самосопряженных расширений дифференциально-разностных операторов. В несамосопряженном случае краевые задачи для дифференциально-разностных операторов рассматривались А.Л. Скубачевским в [2]. Было доказано, что при выполнении конечного числа условий типа ортогональности на правую часть дифференциально-разностного уравнения обобщенное решение будет классическим. Вопрос о том, будет ли для любой достаточно гладкой правой части существовать классическое решение краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения, ранее не исследовался. Там же, а также в других работах А.Л. Скубачевского и его учеников были построены основы общей теории краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений: были получены как необходимые, так и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга в алгебраической форме, установлена дискретность и секториальная структура спектра, полнота системы собственных и присоединенных функций и асимптотика собственных значений сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов, а также исследована гладкость обобщенных решений в подобластях и на границах соседних подобластей.

В настоящей работе рассматривается вопрос о разрешимости уравнения

$$-\Delta u(x) + Ru(x) = f(x) \qquad (x \in Q) \tag{1}$$

с однородным условием Дирихле

$$u\big|_{\partial Q} = 0, \tag{2}$$

где f принадлежит пространству Гельдера $C^\sigma(\overline{Q})$, $(0<\sigma<1)$, $Q\subset\mathbb{R}^n$— ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q\in C^\infty$ R — разностный оператор, определенный по формуле

$$Ru(x)=\sum_{h\in\mathcal{M}}a_h u(x+h).$$

Здесь $\mathcal{M}$ — множество, состоящее из конечного числа векторов $h\in\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, a_h — вещественные числа.

Пространства Гельдера.

В этом пункте мы введем определение пространства Гельдера и рассмотрим некоторые свойства функций, принадлежащих этому пространству.

Определение. Пусть x_0 — точка $\mathbb{R}^n$, функция f определена на ограниченном множестве Q, которое содержит эту точку. Будем говорить, что функция f *непрерывна по Гельдеру с показателем σ в точке x_0* при $0<\sigma<1$, если конечна величина

$$[f]_{\sigma,x_0}=\sup_{Q\setminus\{x_0\}}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\sigma}. \tag{3}$$

Очевидно, что если функция f в точке x_0 непрерывна по Гельдеру, то эта функция непрерывна в точке x_0.

Функция f называется *равномерно ограниченной по Гельдеру на Q* с показателем σ, если конечна величина

$$[f]_{\sigma,Q}=\sup_{\substack{x,y\in Q,\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\sigma},\quad 0<\sigma<1. \tag{4}$$

Обозначим через $C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ пространство Гельдера, которое определяется как подпространство $C^k(\overline{Q})$, состооящее из функций все k-ые производные которых равномерно непрерывны по Гельдеру с показателем σ на Q. Норма в пространстве Гельдера имеет следующий вид:

$$\|f\|_{C^{k+\sigma}(\overline{Q})}=\sum_{j=0}^{k}\left(\sup_{|\beta|=j}\sup_{Q}|D^\beta f|\right)+\sup_{|\alpha|=k}\sup_{\substack{x,y\in Q,\\ x\neq y}}\frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\sigma}. \tag{5}$$

Пространства $C^{k+\sigma}(\overline{Q})$ с этими нормами являются банаховыми.

Для областей, удовлетворяющих в частности условию, которое мы наложили на область Q, справедливо теоретико-множественное вложение

$$C^{k+\sigma}(\overline{Q})\subset C^{k^*+\sigma^*}(\overline{Q}),\qquad \text{если}\quad k+\sigma<k^*+\sigma^*,\quad \sigma\leq sigma^*. \tag{6}$$

Разностные операторы.

В этом разделе мы рассмотрим свойства разностных операторов.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что $Q\subset\mathbb{R}^n$— ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q\in C^\infty$, $n\geq 3$.

Рассмотрим свойства разностных операторов в пространствах Гельдера.

Введем следующие операторы:

- $I_Q\colon C^\sigma(\overline{Q}) \to C^\sigma(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $C^\sigma(\overline{Q})$ нулем вне Q, т. е.
$$(I_Q u)(t) = u(x), \qquad (x \in Q), \qquad (I_Q u)(x) = 0, \qquad (x \notin Q);$$
- $P_Q\colon C^\sigma(\mathbb{R}^n) \to C^\sigma(\overline{Q})$ — оператор сужения функции из $C^\sigma(\mathbb{R}^n)$ на Q
$$(P_Q u)(x) = u(x), \qquad (x \in Q);$$
- $R_Q\colon C^\sigma(\overline{Q}) \to C^\sigma(\overline{Q})$ — оператор, определенный по формуле
$$R_Q = P_Q R I_Q. \tag{7}$$

Операторы P_Q, I_Q будут использованы для изучения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений следующим образом. Поскольку сдвиги $h \in \mathcal{M}$ могут отображать точки множетсва Q в точки множества $x + h \notin Q$, краевые условия для дифференциально-разностного уравнения следует задать не только в точках границы ∂Q, но и всюду на множестве $\mathbb{R}^n \setminus Q$. В случае однородных краевых условий это учитывается оператором I_Q, и тогда оператор действует по следующему правилу $R_Q\colon C^\sigma(\overline{Q}) \cap \mathring{C}(\overline{Q}) \to C^\sigma(\overline{Q})$. Умножение на оператор P_Q означает, что уравнение выполняется не на всей оси, а лишь для $x \in Q$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства разностных операторов, доказательства которых можно найти в [2, гл. 2].

Лемма. Операторы $R\colon C^\sigma(\mathbb{R}^n) \to C^\sigma(\mathbb{R}^n)$, $R_Q\colon C^\sigma(\overline{Q}) \to C^\sigma(\overline{Q})$ ограниченные:
$$R^* u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} \overline{a}_h u(x - h), \qquad R_Q^* = P_Q R^* I_Q. \tag{8}$$

Введем дифференциально-разностный оператор $A_{R,\sigma}\colon C^{2+\sigma}(\overline{Q}) \cap \mathring{C}(\overline{Q}) \to C^\sigma(\overline{Q})$, действующий по формуле
$$A_{R,\sigma} u = -\Delta u + R_Q u, \tag{9}$$
где
$$R_Q = P_Q R I_Q, \qquad Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h).$$
Будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие. Оператор $R_Q + R_Q^*$ неотрицателен.

Оператор $A_{R,\sigma}$ можно записать в следующем виде
$$A_{R,\sigma} = (-\Delta)(I - (-\Delta)^{-1} R_Q).$$

Хорошо известно, что для каждого $f \in C^\sigma(\overline{Q})$ уравнение $-\Delta u = f$ имеет единственное решение, для которого справедлива оценка
$$\|u\|_{C^{2+\sigma}(\overline{Q})} \le c \|f\|_{C^\sigma(\overline{Q})}.$$
Этот результат изложен в [1]. Следовательно, оператор $(-\Delta)^{-1}$ является ограниченным из $C^\sigma(\overline{Q})$ в $C^{2+\sigma}(\overline{Q})$.

Рассмотрим оператор R_Q, действующий из компактно вложенного (см. (6)) подпространства $C^{2+\sigma}(\overline{Q}) \cap \mathring{C}(\overline{Q})$ пространства $C^\sigma(\overline{Q}) \cap \mathring{C}(\overline{Q})$ в $C^\sigma(\overline{Q})$. Оператор R_Q —

компактный, следовательно, композиция $(-\Delta)^{-1}R_Q$ также является компактным оператором. Обозначим через T оператор $-(-\Delta)^{-1}R_Q$.

Таким образом, мы получили фредгольмово уравнение вида

$$(I+T)u = (-\Delta)^{-1}f. \tag{10}$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$(I+T)u = 0. \tag{11}$$

Теперь, согласно 1-ой теореме Фредгольма, достаточно показать, что уравнение (11) имеет единственное тривиальное решение.

Чтобы это доказать мы введем неограниченный дифференциально-разностный оператор $\mathcal{A}_R\colon D(\mathcal{A}_R)\subset L_2(Q)\to L_2(Q)$, где $D(\mathcal{A}_R)=\{u\in \mathring{W}_2^1(Q)\colon \mathcal{A}_r u\in L_2(Q)\}$. Оператор $\mathcal{A}_R$ действует по следующей формуле

$$\mathcal{A}_R u = -\Delta u + R_Q^* u, \tag{12}$$

оператор R_Q^* опеределен формуле (8).

Опеределение. Функция $u\in D(\mathcal{A}_R)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2), если

$$\mathcal{A}_R u = f \tag{13}$$

Из [2, гл. 2, §8, лемма 8.8] следует, что

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_R v, v)_{L_2(Q)} \geq c_1\|v\|^2_{W_2^1(Q)} \quad (\forall v\in \dot{C}^\infty(Q)).$$

Следовательно, в силу [2, гл. 2, §10, Теорема 10.1] уравнение (13) имеет единственное решение $\forall f\in L_2(Q)$. Поэтому по определению обобщенного решения задача (1), (2) для $f=0$ имеет единственное тривиальное обобщенное решение. Тем более однородная задача (1), (2) имеет единственное тривиальное решение в пространстве $C^{2+\sigma}(\overline{Q})\cap \mathring{C}(\overline{Q})$. Следовательно уравнение (11) имеет единственное тривиальное решение. Поскольку оператор $I+T$ — фредгольмов и имеет нулевой индекс, (10) имеет единственное решение в $C^{2+\sigma}(\overline{Q})\cap \mathring{C}(\overline{Q})$. Таким образом, задача (1), (2) имеет единственное решение $u\in C^{2+\sigma}(\overline{Q})\cap \mathring{C}(\overline{Q})$, и мы доказали следующее:

Теорема. Для произвольной функции $f\in C^\sigma(\overline{Q})$ задача (1)-(2) имеет единственное решение $u\in C^{2+\sigma}(\overline{Q})\cap \mathring{C}(\overline{Q})$.

Литература

1. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка –М.: Наука. 1989.

2. Skubachevskii A. Elliptic functional differential equations and applications – Basel–Boston–Berlin: Birkhauser. 1997.

Асимптотическое интегрирование одной системы двух связанных осцилляторов

П.Н. Нестеров

(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; nesterov.pn@gmail.com)

В работе строится асимптотика решений следующей системы двух связанных линейных осцилляторов:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{a\sin\omega t}{t^\alpha} x_2 = 0,\\
&\ddot{x}_2 + d\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \frac{b\sin\omega t}{t^\beta} x_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\omega > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, a и b — произвольные (ненулевые) действительные параметры, $d > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Система (1) исследовалась в работе [1] в предположении, что $d = 0$ и

$$\alpha + \beta > 1. \tag{2}$$

Установлено, что в том случае, когда

$$\omega \neq \omega_1 + \omega_2, \quad \omega \neq \omega_2 - \omega_1, \quad \omega \neq \omega_1 - \omega_2, \tag{3}$$

все решения системы (1) при условии (2) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\alpha}\big) + O\big(t^{1-\alpha-\beta}\big),\\
x_2(t) &= C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + O\big(t^{-\beta}\big) + O\big(t^{1-\alpha-\beta}\big),
\end{aligned}
$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные. Если же хотя бы одно из неравенств в (3) обращается в равенство, то у системы (1) могут существовать неограниченные решения. В этом случае говорят, что в системе (1) имеет место параметрический резонанс. Нами получены асимптотические формулы для решений системы (1) в том случае, когда коэффициент $d > 0$.

В основе используемого метода асимптотического интегрирования лежат результаты, полученные в работе [2], и асимптотическая теорема Н. Левинсона (см., например, [3]). Остановимся чуть более подробно на описании используемой техники. Сначала исходная система (1) приводится к виду

$$
\begin{aligned}
\dot{x} = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots +\\
+ \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big)x, \qquad x\in\mathbb{C}^m,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где A_0, $A_{i_1\ldots i_l}(t)$, $R(t)$ — квадратные $(m\times m)$-матрицы, а $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные функции. Здесь

1^0. A_0 — постоянная матрица с вещественными собственными значениями.
2^0. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\ldots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$.
3^0. $\dot{v}_1(t),\dot{v}_2(t),\ldots,\dot{v}_n(t)\in L_1[t_0,\infty)$.
4^0. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t)\in L_1[t_0,\infty)$ для любого набора $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_{k+1}\le n$.
5^0. Элементами матриц $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены.

6^0. $R(t) \in L_1[t_0,\infty)$. (Запись $R(t) \in L_1[t_0,\infty)$, где $R(t)$ — матрица, означает, что $f(t) = ||R(t)|| \in L_1[t_0,\infty)$ и $||\cdot||$ — некоторая матричная норма.)

Затем с помощью специальных замен переменных система (4) преобразуется в систему, которая не содержит осциллирующих слагаемых в главной части. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 4 *Пусть выполнены условия* 1^0 — 6^0. *Тогда система* (4) *при достаточно больших* t *заменой*

$$x = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} Y_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y, \quad (5)$$

где I *— единичная матрица, а элементами матриц* $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ *являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду*

$$\dot{y} = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1 i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t)\Big)y \quad (6)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ *и матрицей* $R_1(t) \in L_1[t_0,\infty)$.

Этот этап называется усреднением. Матрицы A_i $(i = 1,\ldots,n)$, в частности, определяются следующим образом:

$$A_i = \mathfrak{M}\big[A_i(t)\big]. \qquad \Big(\mathfrak{M}\big[F(t)\big] = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(s)ds\Big)$$

На следующем этапе усредненная система (6), если это возможно, приводится к L-диагональному виду

$$\dot{z} = \big(\Lambda(t) + R_2(t)\big)z, \quad (7)$$

где $\Lambda(t) = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, а $R_2(t) \in L_1[t_0,\infty)$. Для построения асимптотики фундаментальной матрицы системы (7) при $t\to\infty$ может быть использована известная теорема Н. Левинсона. Именно, пусть для каждой пары индексов (j,k) имеет место либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big)ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \quad (8)$$

либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big)ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \quad (9)$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5 (Levinson) *Если выполнены условия* (8)–(9), *то фундаментальная матрица L-диагональной системы* (7) *допускает следующее асимптотическое представление при* $t \to \infty$:

$$Z(t) = \big(I + o(1)\big) \exp\Big\{ \int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s) ds \Big\}. \tag{10}$$

В работе [4] показано, что для получения асимптотических представлений для решений системы (1) достаточно построить асимптотики лишь двух линейно независимых решений. С помощью главных частей асимптотических формул для этих базисных решений можно описать асимптотическое поведение всех решений системы (1). В частности, установлено, что исследование системы (1) может быть сведено к исследованию системы вида (4) размерности $m = 2$.

Как оказывается, при условии выполнения неравенства (2) решения системы (1) имеют следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} &x_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + o(1), \\ &x_2(t) = C_1 t^{-\beta} \Big[|\varphi| \sin\big((\omega + \omega_1)t + \gamma_1 + \delta_1\big) + |\psi| \cos\big((\omega - \omega_1)t - \gamma_1 + \delta_2\big) + o(1) \Big], \end{aligned}$$

где C_1, γ_1 — произвольные действительные постоянные, а φ, ψ, δ_1 и δ_2 — некоторые постоянные величины, зависящие от параметров системы.

В случае, когда $\alpha + \beta \leq 1$, как показано в [4], у системы (1) могут существовать неограниченные по абсолютной величине решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», государственный контракт № П1229.

Литература

1. Nesterov P. On the asymptotics for solutions of system of two linear oscillators with slowly decreasing coupling // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. Vol. 89, №6. 2009. P. 466-480.

2. Нестеров П.Н. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. Т. 43, №6. 2007. С. 731-742.

3. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958. – 475 с.

4. Нестеров П.Н. Об асимптотике критических решений систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Моделирование и анализ информационных систем. Т. 18, №3. 2011. С. 21-41.

Нелинейные уравнения в частных производных и их решения с полюсными особенностями

О.В. Новикова, Т.В. Редькина

(Ставрополь, СГУ; oly-novikova@yandex.ru)

Получим нелинейное уравнение используя операторное уравнение нулевой кривизны

$$L_t - A_x + [L, A] = 0. \tag{1}$$

ТЕОРЕМА 1. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$\overline{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \overline{p}^2) = 0. \tag{2}$$

имеет операторную структуру нулевой кривизны (1) с операторами L и A вида

$$L = \begin{pmatrix} p & \overline{p} \\ \overline{p} & -p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = i \begin{pmatrix} -\overline{p}_x & p_x + p^2 + \overline{p}^2 \\ p_x - p^2 - \overline{p}^2 & \overline{p}_x \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} -p & -\overline{p} \\ -\overline{p} & p \end{pmatrix} + 2i\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как уравнение (2) описывает поведение комплексной функции, то выделим действительную и мнимую части, т.е. представим ее в виде $p(x,t) = u(x,t) + +iv(x,t)$, тогда уравнение после отделения действительной и мнимой части примет вид системы уравнений в частных производных на две действительные функции

$$\begin{cases} u_t + v_{xx} - 4v(u^2 - v^2) = 0, \\ v_t + u_{xx} - 4u(u^2 - v^2) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

И так, имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Нелинейное уравнение на комплекснозначную функцию (2) эквивалентно системе двух действительных уравнений в частных производных (3).*

Представим неизвестные функции $u(x,t)$, $v(x,t)$, в виде рядов Лорана

$$u(x,t) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(t)(x - \varsigma(t))^n, \quad v(x,t) = \sum_{n=-M}^{\infty} b_n(t)(x - \varsigma(t))^n. \tag{4}$$

где $a_n(t)$, $b_n(t)$, $\varsigma(t)$ - пока неизвестные функции одной переменной, M, N - неизвестные натуральные числа, определяющие порядок полюса.

ЛЕММА 2. *Решения системы двух нелинейных уравнений в частных производных (3) могут иметь следующие особенности:*

1. функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ имеют полюсные особенности первого порядка;

2. функция $u(x,t)$ имеет полюс первого порядка, а функция $v(x,t)$ не имеет особенностей;

3. функция $v(x,t)$ имеет полюс первого порядка, а функция $u(x,t)$ не имеет особенностей.

ТЕОРЕМА 2. *Система уравнений (3) обладает свойством Пенлеве и имеет решение в виде рядов Лорана с полюсом первого порядка*

$$u(x,t) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(t)\xi^n, \quad v(x,t) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n(t)\xi^n,$$

где $\xi = x - \varsigma(t)$, $\varsigma(t)$, $b_{-1}(t)$, $a_2(t)$ *– произвольные функции;*

$$a_{-1} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + b_{-1}^2}, \quad b_0(t) = \pm\frac{1}{2}\varsigma'\sqrt{\frac{1}{2} + b_{-1}^2}, \quad a_0(t) = \frac{1}{2}\varsigma' b_{-1},$$

$$a_1(t) = \frac{b'_{-1}}{6} \pm \frac{(\varsigma')^2}{12}\sqrt{\frac{1}{2} + b_{-1}^2}, \quad b_1(t) = \frac{(\varsigma')^2}{12} b_{-1} \pm \frac{b_{-1}b'_{-1}}{6\sqrt{\frac{1}{2} + b_{-1}^2}},$$

$$b_2(t) = \pm \frac{a_2}{b_{-1}} \sqrt{\frac{1}{2} + b_{-1}^2} - \frac{\varsigma''}{16 b_{-1}},$$

остальные коэффициенты определяются рекуррентными формулами

$$a_{n+2} = \frac{-4}{n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 12n} \left(2b_{-1}(n^2 + 3n + 4 + 16b_{-1}^2) \sum_{j=0}^{n+1} a_{n+1-j} b_j - \right.$$

$$-16b_{-1}^2 a_{-1} \sum_{k=0}^{n+1} (a_k a_{n+1-k} + b_k b_{n+1-k}) - (n^2 + 3n) a_{-1} \sum_{k=0}^{n+1} (3a_k a_{n+1-k} - b_k b_{n+1-k}) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} (8b_j a_{-1} b_{-1} - a_j [n^2 + 3n + 8b_{-1}^2]) \sum_{k=0}^{n-j} (a_k a_{n-j-k} - b_k b_{n-j-k}) +$$

$$\left. +2a_{-1} b_{-1} [(n+1) a_{n+1} \varsigma' - a_n'] - \frac{1}{4} (n^2 + 3n + 8b_{-1}^2) [(n+1) b_{n+1} \varsigma' - b_n'] \right),$$

$$b_{n+2} = \frac{4}{n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 12n} \left(2a_{-1}(n^2 + 3n - 4 - 16b_{-1}^2) \sum_{j=0}^{n+1} a_{n+1-j} b_j + \right.$$

$$+16a_{-1}^2 b_{-1} \sum_{k=0}^{n+1} (a_k a_{n+1-k} + b_k b_{n+1-k}) + (n^2 + 3n) b_{-1} \sum_{k=0}^{n+1} (a_k a_{n+1-k} - 3b_k b_{n+1-k}) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} (b_j [n^2 + 3n - 8a_{-1}^2] + 8a_j a_{-1} b_{-1}) \sum_{k=0}^{n-j} (a_k a_{n-j-k} - b_k b_{n-j-k}) +$$

$$\left. +2a_{-1} b_{-1} [(n+1) b_{n+1} \varsigma' - b_n'] + \frac{1}{4} (n^2 + 3n - 8a_{-1}^2) [(n+1) a_{n+1} \varsigma' - a_n'] \right).$$

ЛЕММА 3. *Уравнение*

$$a(\ln u)_{xz} + 2\mu \frac{1}{u} - 2\gamma u = 0 \tag{5}$$

обладает парой Лакса $L_t = [L, A]$ с операторами L и A вида

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu}{u} \\ u & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\ln u)_z & \gamma \\ 1 & -\frac{1}{2}(\ln u)_z \end{pmatrix},$$

где a, b, γ, μ - произвольные постоянные.

Уравнение (5) преобразуется к виду

$$a(u_{xz} u - u_x u_z) + 2\mu u - 2\gamma u^3 = 0. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 3. *Нелинейное уравнение в частных производных (6) имеет решение в виде локального разложения, которое может быть записано в виде ряда Лорана*

$$u(x, z) = \frac{b_{-2}(z)}{(x + \zeta(z))^2} + \frac{b_{-1}(z)}{x + \zeta(z)} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(z)(x + \zeta(z))^i.$$

с полюсом второго порядка, где коэффициенты определяются по рекуррентной формуле

$$a_{n+4}(z) = \frac{2\gamma}{(n+7)(n+4)(a\zeta')^2}\left(\gamma\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n-j} a_k a_{n-j-k} - \mu a_n + \right.$$

$$+3\gamma b_{-2}\sum_{j=0}^{n+2} a_j a_{n+2-j} + \frac{a}{2}\left[\sum_{j=1}^{n+1} j a_j [a'_{n+1-j} + (n+2-j)a_{n+2-j}\zeta'] - \right.$$

$$-(n+5)(a'_{n+3}b_{-2} - a_{n+3}b'_{-2}) -$$

$$\left.\left. - \sum_{j=0}^{n} a_j\{(n+1-j)a'_{n+1-j} + (n+1-j)(n+2-j)a_{n+2-j}\zeta'\}\right]\right),$$

$b_{-2}(z),\ b_{-1},\ a_1(z),\ a_2(z),\ a_3(z)$ - *определяются соответственно в виде*

$$n = -5: \qquad 4b_{-2}b_{-1}\zeta'(z) - 6\gamma b_{-2}^2 b_{-1} = 0, \qquad \text{тогда} \qquad b_{-1} = 0;$$

$$a_1(z) = \frac{1}{2\zeta'(z)}[a_0(\ln b_{-2})' - a'_0], \quad a_2(z) = \frac{3\gamma a_0^2 - \mu}{5a\zeta'} - \frac{3}{10\zeta'}[a'_1 - a_1(\ln b_{-2})'],$$

$$a_3(z) = \frac{2\gamma a_0 a_1}{3a\zeta'} - \frac{2}{9\zeta'}[a_2(\ln b_{-2})' - a'_2], \quad b_{-2} = \frac{a}{\gamma}\zeta'(z),$$

а функции $\zeta(z),\ a_0(z)$ - *являются произвольными.*

Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.: "МИР 1987. – 480 с.

2. Редькина Т.В., Карюк А.И., Лушникова Г.А. Нелинейные уравнения в частных производных, имеющие операторную структуру изоспектральной деформации // Системы обработки информации. – Вып.2 (69). – Харьков, 2008. – С.18-28.

А.И. Петренко в истории Воронежа.

В.Ф. Овсянникова, Н.Н. Удоденко, В.И. Федотов
(Воронеж, ВГУ)

Работа посвящена жизни и научной деятельности профессора, доктора технических наук А.И. Петренко, значительная часть жизни которого связана с Воронежем. Он внёс весомый вклад в развитие науки и высшего образования в Воронежской губернии (ЦЧО). Тем не менее, его имя и научные достижения в настоящее время забыты о чём, в частности, свидетельствует отсутствие очерка о нём в [1]. Его имя вскользь упоминается в [2,3].

Аким Иванович Петренко родился 20 сентября 1882 года в с. Троицкое Приморского края. В 1905 году после окончания Уфимского землемерного училища поступил на астрономо-геодезический факультет Московского землеустроительного института. В течение четырёх лет, до переезда в 1913 году в Воронеж работал под руководством профессора К.Д. Глинки в Туркестане и на Дальнем Востоке, занимаясь опеределением опорных астрономических пунктов. В 1913 году А.И. Петренко начал работать в Воронежском СХИ, где он прошёл путь от преподавателя до профессора и заведующего кафедрой геодезии и математики. Осенью 1919 года он покинул Воронеж с отступающими частями деникинской армии. В 1921 году А.И. Петренко возвратился в Воронеж и возглавил созданный в СХИ землеустроительный факультет.

С 1934 работал в Воронежском университете, возглавляя кафедру геодезии и картографии геолого-географического факультета, при этом продолжая работать в СХИ.

В 1938 году он стал деканом географического факультета и возглавлял его вплоть до эвакуации университета в Елабугу. Эвакуироваться с университетом не смог и по приказу немецкого командования вместе с преподавателями университета и других ВУЗов Воронежа был эвакуирован в Харьков. Дальнейшая жизнь А.И. Петренко связана с Харьковским сельскохозяйственным институтом им. В.В. Докучаева.

За годы своей научно-педагогической деятельности он опубликовал 150 работ по астрономии, геодезии, математичской картографии и геометрии, воспитал 15 кандидатов и 5 докторов наук. За выдающийся вклад в науку был награждён медалью «За доблестный труд».

Скончался А.И. Петренко в 1963 году.

Литература

1. Воронежская энциклопедия. Т. 1,2. Воронеж. 2008.

2. Карпачёв М.Д. Воронежский университет. Вехи истории / Воронеж Изд-во ВГУ. 2003, 472 с.

3. Ковалёв Я.К. Географический факультет / Воронежский государственный университет с сорокалетию Великой Октярьской Революции. Воронеж. 1957, с. 117-125.

Обобщенная теорема о сокращении параметров для метода средних Лионса–Петре и теоремы вложения для пространств Соболева

В.И.Овчинников

(Воронеж, ВГУ; vio@thebat.net)

Интерполяционные конструкции. Всюду в дальнейшем мы будем использовать определения и обозначения из [1].

Одна из версий обобщения классического метода средних Лионса–Петре может быть описана следующим образом. Пусть α, β и γ – произвольные положительные двусторонние последовательности, через $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$, где $1 \le p_0, p_1 \le \infty$, обозначим пространство, состоящее из

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k x_k \qquad (\text{сходимость в } X_0 + X_1),$$

где

$$\{\|x_k \gamma_k\|_{X_0+X_1}\} \in l_1, \tag{7}$$

и

$$\{\|x_k \alpha_k\|_{X_0}\} \in l_{p_0}, \qquad \{\|x_k \beta_k\|_{X_1}\} \in l_{p_1}. \tag{8}$$

Если из условий (8) вытекает (7), то последовательность γ будем называть промежуточной между α и β.

Например, если $p_0 = p_1 = 1$, и последовательность α возрастает, а β убывает, то постоянная последовательность γ будет промежуточной между α и β. Если α возрастает быстрее геометрической прогрессии, а β убывает быстрее геометрической прогрессии, то постоянная последовательность будет промежуточной между α и β независимо от p_0 и p_1.

Очевидно, $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$ является банаховым интерполяционным пространством для пары $\{X_0,\, X_1\}$.

Напомним, что положительная функция $\varphi(s,t)$ двух положительных переменных s и t называется интерполяционной функцией, если она однородна первой степени, то есть $\lambda\varphi(s,t) = \varphi(\lambda s, \lambda t)$ для всех $\lambda > 0$, $s > 0$, $t > 0$, и возрастает по s и t.

Множество всех интерполяционных функций обычно обозначается через Φ. Через Φ_0 обозначается подмножество интерполяционных функций таких, что $\varphi(t,1) \to 0$ и $\varphi(1,t) \to 0$ при $t \to 0$.

Если $\varphi \in \Phi_0$, и $1 \le p_0, p_1 \le \infty$, то через $\varphi(X_0,\, X_1)_{p_0,p_1}$ обозначается интерполяционная конструкция, введенная в [3], и названная там обобщенным методом Лионса-Петре. Следующая теорема служит, в частности, оправданием этого названия.

Теорема 1. *Пусть α, β и γ произвольные двусторонние последовательности такие, что $\gamma \in l_{q_0}(1/\alpha) + l_{q_1}(1/\beta)$, где $1/q_0 + 1/p_0 = 1$ и $1/q_1 + 1/p_1 = 1$, тогда γ – промежуточная последовательность между α и β, и, если*

$$\varphi(s,t) = K(s, t, \gamma, \{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\}) \in \Phi_0,$$

то

$$S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1) = \varphi(X_0, X_1)_{p_0,p_1}$$

для любой полной по Гальярдо пары $\{X_0,\, X_1\}$.

Для доказательства оптимальной теоремы вложения для пространств Орлича–Соболева нам понадобится следующая теорема об описании интерполяционных орбит. Напомним (см. [1]), что K-орбитой пространства Y промежуточного для пары $\{Y_0,\, Y_1\}$ в паре $\{X_0,\, X_1\}$ называется множество всех $x \in X_0 + X_1$ таких, что

$$K(s, t, x, \{X_0,\, X_1\}) \le K(s, t, y, \{Y_0,\, Y_1\})$$

для какого-нибудь $y \in Y$. Это множество обозначается через $KO(Y, \{Y_0,\, Y_1\} \to \{X_0,\, X_1\})$.

Если интерполяция из пары $\{Y_0,\, Y_1\}$ в пару $\{X_0,\, X_1\}$ описывается K-методом, очевидно, K-орбита совпадает с орбитой пространства Y при действии операторов из пары $\{Y_0,\, Y_1\}$ в пару $\{X_0,\, X_1\}$. Это позволяет использовать K-орбиты при вычислении орбит.

Напомним, что через $(X_0, X_1)_{\theta,1}$ обозначается классическое пространство Лионса–Петре. Для краткости будем обозначать его через X_θ.

Теорема 2. *Для любой K_0-насыщенной банаховой пары $X_0 \supset X_1$, $0 < \theta < 1$, интерполяционной функции $\varphi(s,t)$ такой, что $\varphi(s,t) \le s^{1-\theta}t^{\theta}$, и любых $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ справедливо*

$$KO(\varphi(X_0,\, X_1)_{p_0,p_1}, \{X_0, X_\theta\}) = \widetilde{\varphi}(X_0, X_\theta)_{p_0,p_\theta},$$

где $\widetilde{\varphi}$ – некоторая интерполяционная функция, и $1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Теорема 2 легко обобщается следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $Y_0 \supset Y_1$ – произвольная вложенная пара, а $X_0 \supset X_1$ – K_0-насыщенная пара, тогда в условиях теоремы 2*

$$KO(\varphi(X_0,\, X_1)_{p_0,p_1}, \{X_0, X_\theta\} \to \{Y_0,\, Y_1\}) = \widetilde{\varphi}(Y_0, Y_1)_{p_0,p_\theta}.$$

Если $X_0 = L_1$, а $X_1 = L_\infty$ на ограниченной области в $\mathbb{R}^n$, то

$$\tilde{\varphi}(\alpha, \beta) \asymp \|Q_{\alpha,\beta}\|_{\varphi^\star(L_\infty, L_1)_{q_0,q_1}}, \tag{9}$$

где $Q_{\alpha,\beta}(u) = \min(\alpha, \beta u^{\theta-1})$ при $0 < u \le 1$, а пространство $\varphi^\star(L_\infty, L_1)_{q_0,q_1}$ рассматривается на $(0, 1)$.

Теоремы вложения для пространств Соболева. Обозначим через Ω ограниченную область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Пусть $m < n$ – натуральное число, а $E(\Omega)$ – интерполяционное между $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$ пространство. Через $W^m_E(\Omega)$ обозначается пространство обобщенных функций f на Ω, для которых все производные до порядка m включительно принадлежат $E(\Omega)$. В дальнейшем область Ω в обозначениях пространств при возможности будем опускать.

В [2] показано, что наименьшее пространство F, интерполяционное между $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$, в которое вложено W^m_E, совпадает с интерполяционной орбитой пространства E при действии линейных операторов из пары $\{L_1, \Lambda_{m/n}\}$ в пару $\{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}$. То есть $F = Orb(E, \{L_1, \Lambda_{m/n}\} \to \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\})$.

Мы рассмотрим $E = \varphi(L_1(\Omega), L_\infty(\Omega))_{p_0,p_1}$, где $\varphi(s,t) \le s^{m/n} t^{1-m/n}$. Как известно (см., например, [1]), интерполяция из пары $\{L_1, \Lambda_{m/n}\}$ в пару $\{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}$ описывается K-методом, поэтому орбита $Orb(E, \{L_1, \Lambda_{m/n}\} \to \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\})$ совпадает с K-орбитой $KO(E, \{L_1, \Lambda_{m/n}\} \to \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\})$.

Так как $(L_1, L_\infty)_{1-m/n,1} = \Lambda_{m/n}$, то согласно теоремы 3 при $\theta = 1 - m/n$ получаем оптимальную теорему вложения

$$W^m_{\varphi(L_1, L_\infty)_{p_0,p_1}} \subset \tilde{\varphi}(\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{p_0,p_{1-m/n}}, \tag{10}$$

где, как и в теореме 3, $1/p_{1-m/n} = m/np_0 + (1 - m/n)/p_1$.

Если $p_0 = p_1 = p$, тогда $\varphi(X_0,\, X_1)_{p_0,p_1}$ равно пространству С.Янсона $(X_0, X_1)_{\rho,p}$ (см.[3]), где $\rho(t) = \varphi(1,t)$, и тогда

$$W^m_{\varphi(L_1, L_\infty)_{p,p}} = W^m_{\Lambda_{\rho,p}} \subset (\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{\sigma,p},$$

где $\sigma(t) = \tilde{\varphi}(1,t) \asymp \|Q_{1,t}\|_{\varphi^\star(L_\infty, L_1)_{q,q}}$, где $Q_{1,t}(u) = \min(1, t/u^{m/n})$ при $0 < u < 1$, а $1/q + 1/p = 1$ и пространство $\varphi^\star(M_{m/n}, L_1)_{q,q} = \Lambda_{\rho^*,q}$ при $\rho^*(t) = t/\rho(t)$ рассматривается на $[0, 1]$.

Таким образом мы получаем оптимальные теоремы вложения для пространств Соболева–Лоренца, анонсированные в [2].

Для пространств Орлича $E = L^*_N$ найдем $\varphi(s,t)$ такую, что $L^*_N = \varphi(L_1, L_\infty)$. Тогда $N^{-1}(t) = \varphi(t, 1)$. Поскольку $\varphi(L_1, L_\infty) = \varphi(L_1, L_\infty)_{1,\infty}$, из (10) вытекает,

$$W^m_{L^*_N} \subset \tilde{\varphi}(\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{1,n/m},$$

где, в силу (9), $\tilde{\varphi}(\alpha, \beta) \asymp \|Q_{\alpha,\beta}\|_{\varphi^\star(L_\infty, L_1)_{\infty,1}} = \|Q_{\alpha,\beta}\|_{\varphi^\star(L_\infty, L_1)} = \|Q_{\alpha,\beta}\|_{L^*_M}$, и M – дополнительная к N выпуклая функция, а $Q_{\alpha,\beta}(u) = \min(\alpha, \beta/u^{m/n})$ при $0 < u < 1$.

Работа поддержана грантом РФФИ no.10-01-00276.

Литература

1. Brudnyi Yu.A., Krugliak N.Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. I. Amsterdam: North Holland, 1991.

2. Gogatishvili A., Ovchinnikov V.I. Interpolation orbits and optimal Sobolev's embeddings // Journal of Functional Analisys. 2007. V.253. P.1–17.

3. Ovchinnikov V.I. Interpolation orbits in couples of L_p spaces // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2002. V.334. P.881–884.

Полярно-симметричное деформирование неоднородного упруго-пластического цилиндра

В.Б. Огарков, А.А. Аксенов, К.Е. Бухтоярова

(Воронеж)

Рассмотрена задача полярно-симметричного деформирования равномерно вращающегося упругого цилиндра [1, 2]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 = 0; \tag{1}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr};\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r};\ \frac{d}{dr}(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0; \tag{2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1+\mu}{E}((1-\mu)\sigma_r - \mu\sigma_\theta) - \mu\varepsilon_z; \tag{3}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1+\mu}{E}((1-\mu)\sigma_\theta - \mu\sigma_r) - \mu\varepsilon_z. \tag{4}$$

В случае неоднородного несжимаемого материала:

$$\varepsilon_r = \frac{3}{4E(r)}(\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{\varepsilon_z}{2}; \tag{5}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{3}{4E(r)}(\sigma_\theta - \sigma_r) - \frac{\varepsilon_z}{2}. \tag{6}$$

Условие несжимаемости имеет вид:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0. \tag{7}$$

Деформации (5) и (6) удовлетворяют условию несжимаемости (7):

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \frac{3}{2E(r)}(\sigma_r - \sigma_\theta); \tag{8}$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2E(r)}{3}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta). \tag{9}$$

Подставим соотношения Коши в соотношения (9) и (7):

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2E(r)}{3}(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}); \tag{10}$$

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_z = 0 \tag{11}$$

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 r; \tag{12}$$

$$2C_2 = -\varepsilon_z;\ C_2 = -\frac{\varepsilon_z}{2}; \tag{13}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{C_1}{r^2} + C_2;\ \varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -\frac{C_1}{r^2} + C_2; \tag{14}$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{4E(r)C_1}{3}. \tag{15}$$

Использует уравнение равновесия (1):

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{4E(r)C_1}{3} - \frac{\gamma(r)}{g}\omega^2 r^2 = 0. \tag{16}$$

Здесь $E = E(r)$ и $\gamma = \gamma(r)$ – заданные функции радиуса.

$$C_2 = \frac{\omega^2 r^2}{g}\int_{r_1}^{r_2} r\gamma(r)dr - 3C_1\int_{r_1}^{r_2}\frac{E(r)}{r^2}dr. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь деформирование цилиндра с неоднородными свойствами в пластической зоне [2]:

$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_r - \sigma_0);\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_\theta - \sigma_0);\ \varepsilon_z - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_z - \sigma_0); \tag{18}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z);\ \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z); \tag{19}$$

$$\psi = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i};\ \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2}; \tag{20}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2} = \sigma_T; \tag{21}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0;\ \sigma_T = \sigma_T(r); \tag{22}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_z + \psi(\sigma_r - \sigma_z);\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_z + \psi(\sigma_\theta - \sigma_z); \tag{23}$$

$$\psi = \frac{-3\varepsilon_z}{\sigma_\theta + \sigma_r - 2\sigma_z}. \tag{24}$$

Условие несжимаемости (22) удовлетворяется автоматически:

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \psi(\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{-3\varepsilon_z(\sigma_\theta - \sigma_r)}{\sigma_\theta + \sigma_r - 2\sigma_z}; \tag{25}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r) + \frac{3\varepsilon_z(-\sigma_\theta + \sigma_r)}{2(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)} \tag{26}$$

$$\sigma_r - \sigma_z = \frac{1}{2}(-\sigma_\theta + \sigma_r)(1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1}); \tag{27}$$

$$\sigma_\theta - \sigma_z = \frac{1}{2}(-\sigma_\theta + \sigma_r)(-1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1}). \tag{28}$$

Подставим формулы (27) и (28) в условие несжимаемости (21):

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + \frac{1}{4}(-\sigma_\theta + \sigma_r)^2(1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2 + \frac{1}{4}(-\sigma_\theta + \sigma_r)^2(-1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2 = 2\sigma_T^2, \tag{29}$$

где $\sigma_T = \sigma_T(r)$ – заданный неоднородный предел текучести [3].

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{\sqrt{2}\sigma_T(r)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2 + \frac{1}{4}(-1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2}}; \tag{30}$$

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{-\sqrt{2}\sigma_T(r)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2 + \frac{1}{4}(-1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2}} - \frac{\gamma(r)}{g}\omega^2 r^2; \tag{31}$$

$$\sigma_r = -\sqrt{2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma_T(r)dr}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2 + \frac{1}{4}(-1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2}} - \frac{\omega^2}{g}\int_{r_1}^{r_2} \gamma(r) r^2 dr + A_2; \tag{32}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{\sqrt{2}\sigma_T(r)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2 + \frac{1}{4}(-1 + \frac{3\varepsilon_z r^2}{A_1})^2}}. \tag{33}$$

При полярно-симметричном деформировании равномерно вращающегося цилиндра необходимо выполнить следующие равенства [1]:

$$u_l(r = r_T) = u_p(r = r_T); \tag{34}$$

$$\sigma_{rl}(r = r_T) = \sigma_{rp}(r = r_T); \tag{35}$$

$$\sigma_{\theta l}(r = r_T) = \sigma_{\theta p}(r = r_T); \tag{36}$$

$$\sigma_{rl}(r = r_1) = 0;\ \sigma_{rp}(r = r_2) = 0. \tag{37}$$

Здесь r_T – неизвестный радиус сопряжения упругой и пластической зон.

Литература

1 Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: «Машиностроение», 1975. – 400 с.

2 Огарков, В.Б. Точное аналитическое решение задачи полярно-симметричного деформирования равномерно вращающегося упруго-пластического цилиндра / В.Б. Огарков, В.М. Бугаков, М.Л. Шабанов // сборник научных статей «Казанская наука». – №9, выпуск 1. – 2010. – С. 37-41.

3 Ольшак, В. Теория пластичности неоднородных тел / В. Ольшак, А. Рахиевский, В. Урбановский. – М.: «Мир», 1964. – 156 с.

Плоское напряженное состояние упруго-пластического цилиндра

В.Б. Огарков, В.М. Бугаков, А.А. Аксенов
(Воронеж)

Рассмотрим плоское напряженное состояние изотропного упруго-пластического цилиндра по деформационной теории пластичности [1]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0; \tag{1}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr};\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \tag{2}$$

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}) - r\frac{d\varepsilon_r}{dr} = 0. \tag{3}$$

Реологические соотношения по деформационной теории пластичности:

$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_r - \sigma_0);\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_\theta - \sigma_0);\ \varepsilon_z - \varepsilon_0 = \psi(\sigma_z - \sigma_0); \tag{4}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z);\ \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z);\ \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{3K}; \tag{5}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_0 = \frac{2}{3}\varepsilon_r - \frac{\varepsilon_\theta}{3} - \frac{\varepsilon_z}{3};\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_0 = \frac{2}{3}\varepsilon_\theta - \frac{\varepsilon_r}{3} - \frac{\varepsilon_z}{3}; \tag{6}$$

$$\varepsilon_z - \varepsilon_0 = \varepsilon_z - \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) = \frac{2}{3}\varepsilon_z - \frac{\varepsilon_\theta}{3} - \frac{\varepsilon_r}{3}; \tag{7}$$

$$\sigma_r - \sigma_0 = \frac{2}{3}\sigma_r - \frac{\sigma_\theta}{3} - \frac{\sigma_z}{3};\ \sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{2}{3}\sigma_\theta - \frac{\sigma_r}{3} - \frac{\sigma_z}{3}; \tag{8}$$

$$\sigma_z - \sigma_0 = \frac{2}{3}\sigma_z - \frac{\sigma_\theta}{3} - \frac{\sigma_r}{3}. \tag{9}$$

Соотношения (4)-(6) примут такой вид:

$$2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - \varepsilon_z = \psi(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z);\ 2\varepsilon_\theta - \varepsilon_r - \varepsilon_z = \psi(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z); \tag{10}$$

$$2\varepsilon_z - \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = \psi(2\sigma_z - \sigma_\theta - \sigma_r);\ \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z); \tag{11}$$

$$\varepsilon_\theta = 2\varepsilon_r - \varepsilon_z - \psi(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z); \tag{12}$$

$$2(2\varepsilon_r - \varepsilon_z - \psi(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z)) - \varepsilon_r - \varepsilon_z = \psi(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z); \tag{13}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_z = \psi(\sigma_r - \sigma_z);\ \varepsilon_r = \varepsilon_z + \psi(\sigma_r - \sigma_z); \tag{14}$$

$$\varepsilon_\theta = 2(\varepsilon_z + \psi(\sigma_r - \sigma_z)) - \varepsilon_z - \psi(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z); \tag{15}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_z + \psi(\sigma_\theta - \sigma_z); \tag{16}$$

Подставим формулы (17) и (19) в соотношение (13):

$$2\varepsilon_z - \varepsilon_z - \psi(\sigma_r - \sigma_z) - \varepsilon_z - \psi(\sigma_\theta - \sigma_z) = \psi(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta); \tag{17}$$

$$-\psi(-2\sigma_z + \sigma_r + \sigma_\theta) = \psi(2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta). \tag{18}$$

Если $\psi \neq 0$, то соотношение (11) выполняется автоматически.
Подставим формулы (14) и (16) в объемный закон Гука (11):

$$\varepsilon_z + \psi(\sigma_r - \sigma_z) + \varepsilon_z + \psi(\sigma_\theta - \sigma_z) + \varepsilon_z = \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z); \tag{19}$$

$$\psi = \frac{-3\varepsilon_z + \frac{1}{K}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)}{-2\sigma_z + \sigma_r + \sigma_\theta}. \tag{20}$$

В случае плоского напряженного состояния:

$$\sigma_z = 0; \; \varepsilon_z = const; \; \varepsilon_r = \varepsilon_z + \psi\sigma_r; \; \varepsilon_\theta = \varepsilon_z + \psi\sigma_\theta; \tag{21}$$

$$\psi = \frac{-3\varepsilon_z + \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta)}{\sigma_r + \sigma_\theta}. \tag{22}$$

Сложим и вычтем соотношения (21):

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \frac{(-3\varepsilon_z + \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta))(\sigma_r + \sigma_\theta)}{\sigma_r + \sigma_\theta} = -3\varepsilon_z + \frac{1}{K}(\sigma_r + \sigma_\theta); \tag{23}$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \psi(\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{(-3\varepsilon_z + \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta))(\sigma_r - \sigma_\theta)}{\sigma_r + \sigma_\theta}; \tag{24}$$

$$(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)(\sigma_r + \sigma_\theta) = (-3\varepsilon_z + \frac{1}{3K}(\sigma_r + \sigma_\theta))(\sigma_r - \sigma_\theta); \tag{25}$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 3K(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r + \varepsilon_z); \tag{26}$$

$$3K(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r + \varepsilon_z) = (-3\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r + \varepsilon_z)(\sigma_r - \sigma_\theta); \tag{27}$$

$$3K(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)(\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r) = (\varepsilon_\theta + \varepsilon_r - 2\varepsilon_z)(\sigma_r - \sigma_\theta); \tag{28}$$

$$(\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{3K(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)(\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r)}{(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r - 2\varepsilon_z)}. \tag{29}$$

Из соотношений (26) и (29) получим:

$$\sigma_r = \frac{3K(\varepsilon_r - \varepsilon_z)(\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r)}{(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r - 2\varepsilon_z)}; \; \sigma_\theta = \frac{3K(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)(\varepsilon_z + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r)}{(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r - 2\varepsilon_z)}. \tag{30}$$

Условие пластичности Мизеса имеет вид [1]:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+\sigma_r^2+\sigma_\theta^2}=\sigma_T;\ \sigma_r^2+\sigma_\theta^2-\sigma_r\sigma_\theta=\sigma_T^2. \tag{31}$$

Подставим в это соотношение формулы (30):

$$\frac{9K^2(\varepsilon_z+\varepsilon_\theta+\varepsilon_r)^2}{(\varepsilon_\theta+\varepsilon_r-2\varepsilon_z)^2}((\varepsilon_z-\varepsilon_r)^2+(\varepsilon_\theta-\varepsilon_z)^2-(\varepsilon_\theta-\varepsilon_z)(\varepsilon_r-\varepsilon_z))=\sigma_T^2. \tag{32}$$

Подставим формулы (30) в уравнение (1):

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{(\varepsilon_r-\varepsilon_z)(\varepsilon_z+\varepsilon_\theta+\varepsilon_r)}{(\varepsilon_\theta+\varepsilon_r-2\varepsilon_z)}\right)+\frac{(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)(\varepsilon_z+\varepsilon_\theta+\varepsilon_r)}{(\varepsilon_\theta+\varepsilon_r-2\varepsilon_z)r}=0. \tag{33}$$

Система уравнений (32)-(33) представляет собой два уравнения, содержащих первую производную относительно функции ε_r и ε_θ. При ее интегрировании получим две константы C_1 и ε_z, которые нужно найти из граничных условий в соответствии с формулами (30):

$$\sigma_r(r=r_1)=-p;\ \sigma_r(r=r_2)=-q. \tag{34}$$

Соотношения (32) и (33) позволяют реализовать полное пластическое состояние по всей толщине цилиндра при статически допустимом поле напряжений. Это позволяет впервые изучить вопрос о полярно-симметричном деформировании слоистого упруго-пластического цилиндра с натягами.

Решение данной задачи для обобщенной плоской деформации упруго-пластического цилиндра приведено в работе [2].

Литература

1. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: «Машиностроение», 1975. – 400 с.

2. Огарков, В.Б. Точное аналитическое решение задач полярно-симметричного деформирования равномерно вращающегося упруго-пластического цилиндра / В.Б. Огарков, В.М. Бугаков, М.Л. Шабанов // Сборник научных статей «Казанская наука». – №9, выпуск 1. – 2010. – С. 37-41.

Способ расчета напряженно-деформированного состояния упругого цилиндра

В.Б. Огарков, А.И. Шашкин
(Воронеж)

Изучим классификацию аналитический решений обобщенного уравнения Эйлера [1]. Это уравнение с вещественными коэффициентами a_1 и a_2 имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{a_1du}{rdr}+\frac{a_2}{r^2}u. \tag{1}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2+(a_1-1)\lambda+a_2=0; \tag{2}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1-a_1}{2}\pm\sqrt{\frac{(1-a_1)^2}{4}-a_2}; \tag{3}$$

$$u(r) = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2}. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение комплексную функцию [2]:

$$\Omega_1(r) = r\frac{du}{dr} + (c + i\sqrt{d})u; \tag{5}$$

$$c = \frac{a_1 - 1}{2};\ d = -\frac{(1-a_1)^2}{4} + a_2; \tag{6}$$

Для нахождения функции $\Omega_1(r)$ следует рассмотреть уравнение:

$$r\frac{d\Omega_1}{dr} + (c - i\sqrt{d})\Omega_1. \tag{7}$$

Подставим функцию (5) в уравнение (7):

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + r(2c+1)\frac{du}{dr} + (c^2 + d)u = 0. \tag{8}$$

Из сравнения уравнений (10) и (8) получим:

$$2c + 1 = a_1;\ c^2 + d = a_2. \tag{9}$$

В зависимости от значения коэффициента d для уравнения (1) необходимо рассмотреть три случая:

$$\text{а) пусть } d < 0;\ a_2 - \frac{(1-a_1)^2}{4} < 0;\ a_2 < \frac{(1-a_1)^2}{4}; \tag{10}$$

$$r\frac{d\Omega_1}{dr} + \left(\frac{a_1 - 1}{2} + \sqrt{\frac{(1-a_1)^2}{4} - a_2}\right)\Omega_1 = 0; \tag{11}$$

$$r\frac{du}{dr} + \left(\frac{a_1 - 1}{2} - \sqrt{\frac{(1-a_1)^2}{4} - a_2}\right)u = \Omega_1(r); \tag{12}$$

$$\Omega_1(r) = C_1 r^{\lambda_2};\ u(r) = A_1 r^{\lambda_2} + A_2 r^{\lambda_1}; \tag{13}$$

$$\text{б) пусть } d = 0;\ \lambda_1 = \lambda_2;\ a_2 = \frac{(1-a_1)^2}{4}; \tag{14}$$

$$r\frac{d\Omega_1}{dr} + \frac{a_1 - 1}{2}\Omega_1 = 0;\ r\frac{du}{dr} + \frac{a_1 - 1}{2}u = \Omega_1(r); \tag{15}$$

$$u(r) = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_1}\ln r;\ \lambda_1 = \frac{1 - a_1}{2}; \tag{16}$$

$$\text{в) пусть } d > 0;\ a_2 > \frac{(1-a_1)^2}{4}; \tag{17}$$

$$r\frac{d\Omega_1}{dr} + \left(\frac{a_1 - 1}{2} - i\sqrt{\frac{a_2 - (1-a_1)^2}{4}}\right)\Omega_1 = 0; \tag{18}$$

$$r\frac{du}{dr}+\left(\frac{a_1-1}{2}+i\sqrt{\frac{a_2-(1-a_1)^2}{4}}\right)u=\Omega_1(r); \tag{19}$$

$$u(r)=r^{-c}(C_1\cos(\sqrt{d}\ln r)+C_2\sin(\sqrt{d}\ln r)). \tag{20}$$

Формулы (13), (16) и (20) имеют большое практическое значение, поскольку в зависимости от величин λ_1 и λ_2 получатся либо гиперболический закон, либо степенной закон, позволяющий изучить сплошной цилиндр.

В качестве примера рассмотрим плоскую деформацию упругого цилиндра [3]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta=0;\ \sigma_r(r=r_1)=-p;\ \sigma_r(r=r_2)=-q; \tag{21}$$

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr};\ \varepsilon_\theta=\frac{u}{r};\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varepsilon_\theta}{dr}\right)-r\frac{d\varepsilon_r}{dr}=0; \tag{22}$$

В случае плоской деформации:

$$\varepsilon_r=\frac{1+\mu}{E}((1-\mu)\sigma_r-\mu\sigma_\theta);\ \varepsilon_\theta=\frac{1+\mu}{E}((1-\mu)\sigma_\theta-\mu\sigma_r); \tag{23}$$

$$\sigma_r=\frac{E((1-\mu)\varepsilon_r+\mu\varepsilon_\theta)}{(1+\mu)(1-2\mu)};\ \sigma_\theta=\frac{E((1-\mu)\varepsilon_\theta+\mu\varepsilon_r)}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \tag{24}$$

Подставим напряжения (24) в уравнение равновесия (1):

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{rdr}-\frac{u}{r^2}=0;\ a_1=1;\ a_2=-1;\ c=0;\ d=-1<0. \tag{25}$$

Уравнения (5) и (7) примут такой вид:

$$r\frac{d\Omega_1}{dr}+\Omega_1=0;\ r\frac{du}{dr}-u=\Omega_1; \tag{26}$$

$$\Omega_1(r)=\frac{C_1}{r};\ u(r)=-\frac{C_1}{2r}+C_2r; \tag{27}$$

$$r\frac{du}{dr}-u=\frac{C_1}{r};\ C_1+r_1^2\frac{du}{dr}(r=r_1)-r_1u(r=r_1). \tag{28}$$

Используем соотношение (24):

$$-p=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}((1-\mu)\frac{du}{dr}(r=r_1)+\frac{\mu}{r_1}u(r=r_1)); \tag{29}$$

$$-q=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}((1-\mu)\frac{du}{dr}(r=r_2)+\frac{1-\mu}{r_2}u(r=r_2)). \tag{30}$$

Подставим формулу (29) в соотношение (28):

$$C_1=-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}r_1^2p+\frac{\mu r_1}{1-\mu}u(r=r_1); \tag{31}$$

$$u(r_1)=-\frac{C_1}{2r_1}+C_2r_1. \tag{32}$$

Приравняем формулы (31) и (32):

$$C_1 = \frac{2\mu r_1^2}{2-\mu}C_2 - \frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E(2-\mu)}r_1^2 p \tag{33}$$

Теперь необходимо подставить в соотношение (30) формулу для $u(r=r_2)$ и получить одно алгебраическое уравнение для нахождения константы C_2.

Таким образом, применение комплексной функции позволяет избежать процедуры решения системы алгебраических уравнений для определения констант C_1 и C_2, и находить их следует по готовым формулам.

Литература

1 Матвеев, Н.М. Дифференциальные уравнения / Н.М. Матвеев. – Л.: ЛГУ, 1963. – 411 с.

2 Огарков, В.Б. Способ решения обыкновенного дифференциального уравнения и его приложения к задачам механики и теории управления / В.Б. Огарков // Материалы IV международной конференции. – Воронеж: ВГУ, 2011. – С. 216-217.

3 Варданян, Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. – М., 1995. – 568 с.

Априорные оценки решений одной модели вязкоупругой жидкости [9]

В.П. Орлов

(Воронеж, ВГУ, orlov_vp@mail.ru)

В $Q=[0,T]\times\Omega$, где $\Omega \in R^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ рассматривается начально-краевая задача Z:

$$v_t + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial v/\partial x_i - \mu_0 \mathrm{Div}\, \mathcal{E}(v)(t,x) -$$

$$\mu_1 \mathrm{Div} \int_{t(x)}^{t} \exp(\lambda(s-t))\, \mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\, ds + \mathrm{grad}\, p(t,x) =$$

$$f(t,x),\ (t,x)\in Q;\ \mathrm{div}\, v(t,x)=0,\ (t,x)\in Q;\ \int_\Omega p(t,x)\,dx = 0;\ t\in[0,T];$$

$$v(0,x) = v^0(x),\ x\in\Omega_0,\ v(t,x) = v^1(t,x),\ (t,x)\in[0,T]\times\Gamma.$$

Здесь $\mathcal{E}(v)=\{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^2$, $\mathcal{E}_{ij}(v)=\frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$. $\partial v_i/\partial x_i)^2$, $\mu_0,\mu_1>0, \lambda\geq 0$, вектор-функция $z(\tau;t,x)$ определяется как решение задачи Коши

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau S_\delta v(s,z(s;t,x))\,ds, \quad \tau\in[0,T], \quad (t,x)\in Q,$$

где S_δ - регуляризатор поля скоростей (см.[1]), $t(x) = \inf\{\tau : z(s;t,x)\in\Omega, \tau\leq s\leq t\}$. Предполагается, что заданная соленоидальная функция $v^1(t,x)$ такова, $v^1(t,x)\neq 0$ на Γ и $(v^1(t,x), n(x)) = 0$ ($n(x)$-нормаль) на Γ лишь в конечном числе точек границы.

Теорема 1 *Справедлива априорная оценка решения задачи Z:*

$$\|v\|_{W_2^{1,2}(Q_T)} \leq M = M(\|v^1\|_{C^2(\Gamma)}, \|v^0\|_{W_2^1(\Omega)}, \|f\|_{L_2(Q_T)}).$$

[9]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-0008

Литература
1. В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко, О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости, Известия ВУЗов. Математика, 9, **508**(2004), 24-40.

О функции Грина операторного пучка, имеющей конечномерные образы

А.В. Печкуров
(Воронеж, ВГУ; apechkurov@gmail.com)

В статьях [1,2] получены условия, при которых дифференциальное уравнение $(Fx)'(t) - Gx(t) = f(t)$ имеет единственное ограниченное на оси решение при любой ограниченной правой части f. При этом решение задается сверткой функции Грина $\mathcal{G}$ с f. Если коэффициент F необратим, функция Грина $\mathcal{G}$ является [1] обобщенной и состоит из двух слагаемых $\mathcal{G}^s$ и $\mathcal{G}^r$. Сингулярная часть $\mathcal{G}^s$ является линейной комбинацией δ-функции и ее производных, и тем самым сосредоточена в нуле, а регулярная часть $\mathcal{G}^r$ является обычной операторнозначной функцией. В данном сообщении рассматривается случай, когда оператор $\mathcal{G}^r(t)$ имеет конечномерный образ при всех $t \neq 0$. С помощью результата [3] устанавливается (теорема 2), что при $t \neq 0$ оператор $\mathcal{G}^r(t)$ является прямой суммой нулевого оператора и оператора, осуществляющего изоморфизм между некоторыми конечномерными пространствами.

Пусть X и Y — комплексные банаховы пространства, а $F, G : X \to Y$ — два линейных ограниченных оператора. (*Линейным*) *пучком* называют [4] функцию

$$\lambda \mapsto \lambda F - G, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Резольвентным множеством пучка называют множество $\rho(F, G)$, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda F - G$ обратим, а *резольвентой* — функцию (семейство)

$$R_\lambda = (\lambda F - G)^{-1}.$$

Дополнение $\sigma(F, G)$ к резольвентному множеству называют *спектром* пучка. Ниже будем предполагать, что выполнено следующее предположение.

Предположение. *Резольвентное множество пучка содержит мнимую ось, а также проколотую окрестность бесконечности и для некоторого* $w \in \mathbb{N}$ *при достаточно больших* $|\lambda|$ *выполняется оценка*

$$\|(\lambda F - G)^{-1}\| \leq C|\lambda|^w.$$

Символом $\mathbf{B}(Y, X)$ обозначим линейное пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из Y в X. Обозначим через $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X)$ замыкание по норме пространства $\mathbf{B}(Y, X)$ линейной оболочки всех операторов R_λ, $\lambda \in \rho(F, G)$. Введем на $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X)$ операцию *F-умножения* [5] по формуле

$$A \odot B = AFB.$$

Степени относительно F-умножения будем обозначать символами типа $A^{n\odot}$ и $A^{-1\odot}$.

Теорема 1 ([5, теорема 8]) *Относительно F-умножения банахово пространство* $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X)$ *является коммутативной банаховой алгеброй.*

Обозначим через Π коэффициент перед λ^{-1} в разложении резольвенты $\lambda \mapsto R_\lambda$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности. Можно показать [1], что $\Pi^{2\odot} = \Pi$, т. е. Π является идемпотентом, а $F\Pi$ и ΠF — проекторами.

В [1, теорема 7] доказано, что при любой непрерывной ограниченной $f : \mathbb{R} \to \operatorname{Im} F\Pi$ уравнение

$$\big(Fx\big)'(t) - Gx(t) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

имеет ограниченное вместе с производной решение $x : \mathbb{R} \to \operatorname{Im} \Pi F$, которое задается формулой

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}^r(t-s) f(s)\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(Для $f \in \operatorname{Ker} F\Pi$ решение имеет вид линейной комбинации f и ее производных с операторными коэффициентами.)

Предложение 1 ([1, предложение 9]) *Регулярная часть $\mathcal{G}^r$ функции Грина обладает свойствами*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}^r(t) \odot \mathcal{G}^r(s) = \mathcal{G}^r(t+s), \qquad t, s > 0,\\
&\mathcal{G}^r(t) \odot \mathcal{G}^r(s) = \mathcal{G}^r(t+s), \qquad t, s < 0,\\
&\mathcal{G}^r(t) \odot \mathcal{G}^r(s) = 0, \qquad t > 0, s < 0,\\
&\mathcal{G}^r(t) \odot \mathcal{G}^r(s) = 0, \qquad t < 0, s > 0.
\end{aligned}$$

Предложение 2 ([1, предложение 10]) *Регулярная часть $\mathcal{G}^r$ функции Грина при $t \neq 0$ дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(F\mathcal{G}^r)'(t) - G\mathcal{G}^r(t) = \mathbf{0}.$$

Целью настоящего сообщения является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2 *Пусть выполнено предположение. Пусть*

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{G}^r(t) < \infty, \qquad t > 0.$$

Тогда пространства X и Y допускают разложения в прямые суммы

$$X = X_0 \oplus X_1, \qquad Y = Y_0 \oplus Y_1$$

замкнутых подпространств таких, что X_1 и Y_1 являются конечномерными, сужение $\mathcal{G}^r(t)$ на Y_0 является нулевым оператором, а оператор $\mathcal{G}^r(t)$ устанавливает изоморфизм между Y_1 и X_1. Аналогичное утверждение справедливо для $t < 0$.

Заметим, что в теореме 2 $\dim \operatorname{Im} \mathcal{G}^r(t)$ априори может зависеть от t.

В доказательстве нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 3 ([3, теорема 1]) *Пусть $T : (0, +\infty) \to X$ — сильно непрерывная полугруппа операторов, обладающая свойством*

$$\dim \operatorname{Im} T(t) < \infty, \qquad t > 0.$$

Тогда пространство X допускает разложение $X = X_0 \oplus X_1$ в прямую сумму двух замкнутых инвариантных относительно $T(t)$, $t > 0$, подпространств X_0 и X_1. При этом сужение $T(t)$ на X_0 является нулевым оператором, X_1 конечномерно, а сужение $T(t)$ на X_1 является обратимым оператором.

Доказательство теоремы 2 Рассмотрим семейство $T(t) = F\mathcal{G}^r(t)$, $t > 0$. В силу предложения 1 оно является полугруппой, имеющей конечномерные образы. В силу предложения 2 эта полугруппа непрерывна по норме. Поэтому в силу предложения 3 она порождает разложение $Y = Y_0 \oplus Y_1$, причем сужение $T(t)$ на Y_0 является нулевым оператором, а образ $T(t)$ совпадает с Y_1. Из представления

$$\mathcal{G}^r(t) = \mathcal{G}^r(t/2) \odot \mathcal{G}^r(t/2) = \mathcal{G}^r(t/2)T(t/2)$$

видно, что сужение $\mathcal{G}^r(t)$ на Y_0 является нулевым оператором. Из этого же представления видно, что $\dim \operatorname{Im} \mathcal{G}^r(t) \leq \dim \operatorname{Im} T(t/2) = \dim Y_1$. С другой стороны, из представления $T(t) = F\mathcal{G}^r(t)$ видно, что $\dim Y_1 = \dim \operatorname{Im} T(t) \leq \dim \operatorname{Im} \mathcal{G}^r(t)$. Таким образом,

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{G}^r(t) = \dim Y_1.$$

Рассмотрим также непрерывную полугруппу $S(t) = \mathcal{G}^r(t)F$, $t > 0$. В силу предложения 3 она порождает разложение $X = X_0 \oplus X_1$, причем сужение $S(t)$ на X_0 является нулевым оператором, а образ $S(t)$ совпадает с X_1. Из представления

$$\mathcal{G}^r(t) = \mathcal{G}^r(t/2) \odot \mathcal{G}^r(t/2) = S(t/2)\mathcal{G}^r(t/2)$$

видно, что $\operatorname{Im} \mathcal{G}^r(t)$ содержится в $\operatorname{Im} S(t/2) = X_1$. С другой стороны, из представления $S(t) = \mathcal{G}^r(t)F$ видно, что $\operatorname{Im} S(t) = X_1$ содержится в $\operatorname{Im} \mathcal{G}^r(t)$. Таким образом,

$$\operatorname{Im} \mathcal{G}^r(t) = X_1.$$

Итак, оператор $\mathcal{G}^r(t)$ переводит Y на X_1. Следовательно, поскольку оператор $\mathcal{G}^r(t)$ переводит Y_0 в ноль, он переводит Y_1 на X_1. Но поскольку $\dim X_1 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{G}^r(t) = \dim Y_1$, оператор $\mathcal{G}^r(t)$ устанавливает изоморфизм между Y_1 и X_1.

Литература

1. Печкуров А.В., Операторные пучки, биполугруппы и задача об ограниченных решениях // Spectral and Evolution Problems. T. 21. № 2. 2011. C. 75–86.

2. Печкуров А.В., Бисекториальные операторные пучки и задача об ограниченных решениях // Известия вузов. Математика. № 3. 2012. С. 1–11.

3. Печкуров А.В., О структуре полугруппы операторов, имеющих конечномерные образы // Математические заметки. Т. 91. вып. 2. 2012. С. 240–252.

4. Баскаков А.Г., Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления – М.: МАИ. Т. 9. 2004. С. 3–151.

5. Курбатова И.В., Банахова алгебра, связанная с линейным операторным пучком // Математические заметки. Т. 86. № 3. 2009. С. 394–401.

Обобщенные пространства Степанова с надэкспоненциально растущими и подэкспоненциально убывающими весами

С.В. Писарева

(Воронеж, ВГЛТА; pisareva-s@mail.ru)

Рассмотрим классы весовых функций Φ^+ и Φ^+, определенные следующим образом:

Определение 1. Через $\Phi^+ = \Phi^+(0; +\infty)$ обозначим множество положительных, монотонно возрастающих, дифференцируемых функций $\rho_+(t), t \in (0; +\infty)$ таких, что:

а) $\rho_+(0) = 0$;

б) $\rho'_+(0) > 0$;
в) выполняется соотношение $\forall t, s \in (0; +\infty)$

$$\rho_+(t)\rho_+(s) \leq \rho_+(t+s). \tag{1}$$

Для функций из Φ^+ справедлива оценка

$$\rho_+(t) \geq e^{\rho'_+(0)t}. \tag{2}$$

В связи с этим классы таких функций называют надэкспоненциально растущими.

Определение 2. Через $\Phi^- = \Phi^-(0; +\infty)$ обозначим множество положительных, монотонно убывающих, дифференцируемых функций $\rho_-(t), t \in (0; +\infty)$ таких, что:
а) $\rho_-(0) = 0$;
б) $\rho'_-(0) < 0$;
в) выполняется соотношение $\forall t, s \in (0; +\infty)$

$$\rho_-(t)\rho_-(s) \geq \rho_-(t+s).$$

Заметим, что в общем случае, когда функция $\rho(t)$ измеримая по Борелю на $[0; +\infty)$, классы таких функций рассматривались в [1], стр 154.

Нетрудно видеть, что если $\rho_+(t) \in \Phi^+$, то $\frac{1}{\rho_+(t)} = \rho_-(t) \in \Phi^-$. И наоборот, из $\rho_-(t) \in \Phi^-$ следует, что $\frac{1}{\rho_-(t)} = \rho_+(t) \in \Phi^+$. Кроме того оценка (2) переходит в оценку

$$\rho_-(t) \leq e^{\rho'_-(0)t}. \tag{3}$$

Как известно, классические пространства Степанова $S_p[0; +\infty)$ локально интегрируемых на $[0; +\infty)$ функций $f(t)$ определяются нормой

$$\|f\|_{S_{p,l}} = \sup_{t>0} \left[\frac{1}{l} \int_t^{t+l} |f(t)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

где $p \geq 1, l > 0$. При различных l нормы (4) эквивалентны(см. [2]).

Рассмотрим обобщенные пространства Степанова с экспоненциальным весом $B^-_{p,\alpha,\omega}$ и $B^+_{p,\alpha,\omega}$, определяемые нормами

$$\|f\|_{B^-_{p,\alpha,\omega}} = \sup_{t \in R} \left[\int_{-\infty}^t e^{\omega(x-t)} (t-x)^{\alpha-1} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{t \in R} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\omega s} s^{\alpha-1} |f(t-s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}; \tag{5}$$

$$\|f\|_{B^+_{p,\alpha,\omega}} = \sup_{t \in R} \left[\int_t^{+\infty} e^{\omega(t-x)} (x-t)^{\alpha-1} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{t \in R} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\omega s} s^{\alpha-1} |f(t+s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}; \tag{6}$$

где $p \geq 1, 0 < \alpha < 1, \omega > 0$.

Заметим, что нормы (5) и (6) не эквивалентны нормам (4)(см.[3]).

Введем пространства $B^-_{p,\alpha,\omega\rho}$ и $B^+_{p,\alpha,\omega,\rho}$, определенные следующими нормами.

Определение 3.Через $B^+_{p,\alpha,\omega\rho}$ обозначим множество локально интегрируемых по Лебегу на $[0;+\infty)$ функций $f(t)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B^+_{p,\alpha,\omega,\rho}} = \sup_{t>0}\left[\int_t^{+\infty} e^{\omega(t-x)}(x-t)^{\alpha-1}\rho_+(x)|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{t>0}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\omega s}s^{\alpha-1}\rho_+(s+t)|f(t+s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}; \qquad (7)$$

где $p \geq 1, 0 < \alpha < 1, \omega > 0, \rho_+(t) \in \Phi^+$.

Рассмотрим операторы дробного интегрирования Римана-Лиувилля, задаваемые выражениями (см.[4])

$$\left(I^\beta_+\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}f(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \tau^{\beta-1}f(t-\tau)d\tau, \qquad (8)$$

$$\left(I^\beta_-\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_t^{+\infty} (s-t)^{\beta-1}f(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{+\infty} \tau^{\beta-1}f(t+\tau)d\tau. \qquad (9)$$

Теорема. Операторы дробного интегрирования I^β_- являются линейными и ограниченными в пространствах $B^+_{p,\alpha,\omega\rho}$.

Доказательство: Оценим следующий интеграл

$$J = \Gamma(\beta)\left[\int_t^{+\infty} e^{\omega(t-x)}(x-t)^{\alpha-1}\rho_+(x)|\left(I^\beta_-\right)(t)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[\int_t^{+\infty} e^{\omega(t-x)}(x-t)^{\alpha-1}\rho_+(x)\Big|\int_0^{+\infty}\tau^{\beta-1}f(x+\tau)d\tau\Big|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= e^{\frac{\omega t}{p}}\left[\int_t^{+\infty}\Big|\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega x}{p}}(x-t)^{\frac{\alpha-1}{p}}[\rho_+(x)]^{\frac{1}{p}}\tau^{\beta-1}f(x+\tau)d\tau\Big|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Применив обобщенное неравенство Минковского к последнему интегралу (см. [4], стр.26), получим

$$J \leq e^{\frac{\omega t}{p}}\int_0^{+\infty}\left[\int_t^{+\infty} e^{-\omega x}(x-t)^{\alpha-1}\rho_+(x)\tau^{(\beta-1)p}|f(x+\tau)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}d\tau =$$

$$= e^{\frac{\omega t}{p}}\int_0^{+\infty}\tau^{\beta-1}\left[\int_t^{+\infty} e^{-\omega x}(x-t)^{\alpha-1}\rho_+(x)|f(x+\tau)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}d\tau.$$

Запишем неравенство (1) в виде $\rho_+(x) \leq \frac{\rho_+(x+\tau)}{\rho_+(\tau)}$, $\forall x, \tau \in (0;+\infty)$ и применим в последнем интеграле

$$J \leq e^{\frac{\omega t}{p}}\int_0^{+\infty}\tau^{\beta-1}\left[\frac{1}{\rho_+(\tau)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_t^{+\infty} e^{-\omega x}(x-t)^{\alpha-1}\rho_+(x+\tau)|f(x+\tau)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}d\tau.$$

Сделаем замену во внутреннем интеграле $x+\tau = s$

$$J \leq e^{\frac{\omega t}{p}}\int_0^{+\infty}\tau^{\beta-1}\left[\rho_-(\tau)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{t+\tau}^{+\infty} e^{-\omega(s-\tau)}(s-\tau-t)^{\alpha-1}\rho_+(s)|f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}d\tau.$$

Внесем множитель $e^{\frac{\omega t}{p}}$ во внутренний интеграл и сделаем еще одну замену $\xi = t + \tau$

$$J \leq \int_0^{+\infty} \tau^{\beta-1} \left[\rho_-(\tau)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\xi^{+\infty} e^{-\omega(s-\xi)}(s-\xi)^{\alpha-1}\rho_+(s)|f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} d\tau \leq$$

$$\leq \|f\|_{B^+_{p,\alpha,\omega,\rho}} \int_0^{+\infty} \tau^{\beta-1} \left[\rho_-(\tau)\right]^{\frac{1}{p}} d\tau.$$

Для оценки данного интеграла воспользуемся неравенством (3)

$$J \leq \|f\|_{B^+_{p,\alpha,\omega,\rho}} \int_0^{+\infty} \tau^{\beta-1} e^{\frac{\rho'_-(0)\tau}{p}} d\tau = \|f\|_{B^+_{p,\alpha,\omega,\rho}} \left(\frac{p}{-\rho'_-(0)}\right)^\beta \Gamma(\beta). \tag{10}$$

Переходя к sup по $t > 0$ в левой части неравенства (10), получим оценку

$$\left\|I^\beta_-\right\|_{B^+_{p,\alpha,\omega,\rho}} \leq \|f\|_{B^+_{p,\alpha,\omega,\rho}} \left(\frac{p}{-\rho'_-(0)}\right)^\beta.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы/ Э.Хилле, Р.Филлипс.– М.: Изд-во иностр. литер., 1962. – 829 с.

2. Левитан, Б.М. Почти - периодические функции/ Б.М.Левитан.–М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953.–396 с.

3. Костин, А.В. К теории функциональных пространств Степанова/ А.В.Костин, В.А.Костин.–Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007.–259 с.

4. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С.Г.Самко, А.А.Килбас, О.И.Маричев.–Минск:Наука и техника, 1987.–687 с.

Аппроксимация уравнений с производящим оператором, порождающим проинтегрированную полугруппу [10]

С.И. Пискарев

(Москва, МГУ; s_piskarev@hotmail.com)

Введение

Рассмотрим абстрактную задачу Коши в банаховом пространстве E

$$\begin{aligned} &u'(t) = Au(t) + f(t),\ t \in [0,T], \\ &u(0) = u^0 \in E, \end{aligned} \tag{1}$$

где оператор A порождает k-раз проинтегрированную полугруппу и $f(\cdot) \in L^1([0,T];E)$. Функция $u(\cdot)$ называется классическим решением задачи (1), если она принадлежит $C^1([0,T];E) \cap C([0,T];D(A))$ и удовлетворяет уравнению в (1). Проинтегрированные полугруппы рассматривают, когда оператор A удовлетворяет более слабым условиям, чем условия порождения C_0-полугруппы. Например, оператор Шредингера $i\Delta$ порождает C_0-полугруппу на пространстве $L^p(I\!R^n)$ тогда и тхолько тогда, когда $p = 2$. Довольно часто, особенно в нелинейных задачах, необходимо рассматривать случай, когда $p \neq 2$. Если же $\alpha > n|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|$, то $i\Delta$ порождает α-раз проинтегрированную полугруппу на $L^p(I\!R^n)$.

[10]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00297_а.

K-раз проинтегрированной полугруппой называется сильно непрерывное по $t \in \overline{I\!R}_+$, семейство линейных ограниченных операторов $e_k^{tA} \in B(E), t \in \overline{I\!R}_+$, такое, что удовлетворяется равенство

$$e_k^{tA} = A\int_0^t e_k^{sA} ds + \frac{t^k}{k!}, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Определим функцию $v(t) = e_k^{tA}u^0 + \int_0^t e_k^{(t-s)A} f(s)ds, t \in [0,T]$. Если существует классическое решение задачи (1), то $v(\cdot) \in C^{k+1}([0,T];E)$ и для производной порядка k имеет место равенство $v^{(k)}(\cdot) = u(\cdot)$. Для примера, при $k=1$ задача (1) с проинтегрированной полугруппой при $f(\cdot) \equiv 0$, $u^0 \in D(A)$ имеет решение $u(t) = (e_1^{tA}u^0)'_t$. Это обстоятельство вынуждает для получения решения $u(\cdot)$ аппроксимировать 1-ю производную по времени. Как ясно из (2) производная при $x \in D(A)$ вычисляется также и по формуле

$$(e_1^{tA}x)'_t = e_1^{tA}\, Ax + x, \; t \geq 0. \tag{3}$$

Значит, если выбрать $u^0 \in D(A)$ для задачи (1) и положить $u_n^0 \in D(A_n)$ такими, что $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, то $u_n(t) = (e_1^{tA_n}u_n^0)' \xrightarrow{\mathcal{P}} (e_1^{tA}u^0)' = u(t)$ равномерно по $t \in [0,T]$, что обеспечивается условиями теоремы Троттера-Като [2]. В обоих случаях приходим к необходимости аппроксимировать значения неограниченного оператора, т.е. вычислять производную $(e_1^{tA}x)'$ или аппроксимировать значения неограниченного оператора A в (3).

Алгоритм аппроксимации

Следуя общей теории аппроксимации неограниченных операторов [1,5], рассмотрим функционал

$$\Phi_\alpha(\eta_n(\cdot)) = \|\eta_n(\cdot) - e_1^{\cdot A_n}u_n^\delta\|^2_{L^2([0,T];H_n)} + \alpha\, \|\frac{d}{dt}\eta_n(\cdot)\|^2_{L^2([0,T];H_n)},$$

с $0 < \alpha \to 0$ и $D(\frac{d}{dt}) = \{\eta(\cdot) \in L^2([0,T];H_n) : \eta_n'(0) = \eta_n'(T) = 0\}$. Элемент $v_{n,\alpha}(\cdot)$, который решает задачу $\inf_{\eta_n(\cdot)\in D(\frac{d}{dt})} \Phi_\alpha(\eta_n(\cdot)) = \Phi_\alpha(v_{n,\alpha}(\cdot))$, может быть получен из задачи с естественными граничными условиями $-\alpha\frac{d^2}{dt^2}v_{n,\alpha}(t) + v_{n,\alpha}(t) = e_1^{tA_n}u_n^\delta$, $t \in [0,T]$, $\quad v'_{n,\alpha}(0) = v'_{n,\alpha}(T) = 0$. Учитывая, что $e_1^{tA}|_{t=0} = 0$, естественно рассмотреть задачу и при других граничных условиях:

$$-\alpha\frac{d^2}{dt^2}v_{n,\alpha}(t) + v_{n,\alpha}(t) = e_1^{tA_n}u_n^\delta, \quad t \in [0,T], \quad v_{n,\alpha}(0) = v_{n,\alpha}(T) = 0. \tag{4}$$

Теорема 3 *Предположим, что замкнутые операторы A, A_n на E и E_n соответственно порождают экспоненциально ограниченные 1-раз проинтегрированные полугруппы и предположим, что выполняются условия теоремы Троттера-Като и пусть $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leq \delta$. Если выбрать регуляризирующий параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ как $\delta = \sqrt{\alpha} \to 0$ и $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0, A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, то $\|v_{n,\alpha}(t) - e_1^{tA_n}u_n^0\| \leq C\sqrt{\alpha}$ равномерно по $t \in [0, T-\epsilon]$ и $\epsilon > 0$. Более того, если $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, $A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0$, то $\|v'_{n,\alpha}(t) - (e_1^{tA_n}u_n^0)'\| \leq C\sqrt{\alpha}$ при $\delta = \alpha \to 0$ равномерно по $t \in [0, T-\epsilon]$ с $\epsilon > 0$.*

Положим $T_n(\tau_n) = (I_n - \tau_n A_n)^{-1}$. Дискретная один раз проинтегрированная полугруппа определяется как $\int_0^t T_n^{[s/\tau_n]}ds = \tau_n \Sigma_{j=1}^{[t/\tau_n]}(I_n - \tau_n A_n)^{-j}$ и мы положим по определению $\tau_n \Sigma_{j=1}^{[t/\tau_n]}(I_n - \tau_n A_n)^{-j} = 0$ для $0 \leq t < \tau_n$.

Определение 1 *Дискретное семейство операторов* $\{W_n^i(k\tau_n)\}, k = 0,1,2,\ldots,$ *называется неявной дискретной 1-раз проинтегрированной полугруппой, если* $W_n^i(0) = 0, W_n^i(\tau_n) = \tau_n(I_n - \tau_n A_n)^{-1}$ *и*

$$W_n^i(k\tau_n)W_n^i(\tau_n) = \tau_n W_n^i((k+1)\tau_n) - \tau_n W_n^i(\tau_n).$$

Предложение 4 *Если операторы* A_n^{-1} *существуют, то неявная дискретная 1-раз проинтегрированная полугруппа задается формулами*

$$W_n^i(0) = 0,\, W_n^i((k+1)\tau_n) = W_n^i(k\tau_n)(I_n - \tau_n A_n)^{-1} + W_n^i(\tau_n),\, k = 1,2,\ldots,$$

$$W_n^i(k\tau_n) = \sum_{j=1}^{k} \tau_n (I_n - \tau_n A_n)^{-j} = ((I_n - \tau_n A_n)^{-k} - I_n)A_n^{-1},\, k = 1,2,\ldots.$$

Практическая реализация метода (4) приводит к разностной схеме. Предположим на мгновение, что мы в гильбертовом пространстве и аппроксимирующее решение вычислено по устойчивой схеме и дано в виде вектора $\{W_n^i(k\tau_n)u_n^\delta\}_{k=0}^K$, $K\tau_n = T$. В пространстве векторов $\Big(\xi_n(0), \xi_n(1), \cdots, \xi_n(K)\Big), \xi_n(j) \in H_n, j \in \overline{\{0,...,K\}}$, которое обозначим как

$$L^2_{\tau_n}([0,T];H_n) = \Big\{\{\xi_n(j)\}_{j=0}^K : \|\xi_n(\cdot)\|^2_{L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)} = \Sigma_{j=0}^K \|\xi_n(j)\|^2_{H_n}\tau_n\Big\},$$

рассмотрим параметрический функционал для оператора $\partial_{\tau_n} : L^2_{\tau_n}([0,T];H_n) \to L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)$, который определен на $L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)$ по формуле $(\partial_{\tau_n}\{\xi_n(\cdot)\})(m) = \frac{\xi_n(m+1)-\xi_n(m)}{\tau_n}$, с $D(\partial_{\tau_n}) = \Big\{\{\xi_n(\cdot)\} : (\partial_{\tau_n}\xi_n)(0) = 0, (\partial_{\tau_n}\xi_n)(K-1) = 0\Big\}$. Соответствующие рассмотрения приводят [3] к аналогичному (4) дискретному уравнению

$$-\alpha\,(\bar\partial_{\tau_n}\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(k) + V_{n,\alpha}(k) = W_n^i(k\tau_n)u_n^\delta, \quad k \in \{1,2,...,K-1\}, \tag{5}$$

с граничными условиями $(\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(0) = 0, (\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(K-1) = 0$.

Численно уравнение (5) может быть решено, например, методом прогонки [4]. В силу структуры оператора $-\alpha\bar\partial_{\tau_n}\partial_{\tau_n} + I_n$ решение задачи (5) получается устойчивой процедурой. Как и в случае полудискретной аппроксимации с уравнением (5) можно рассматривать разные граничные задачи. Наиболее простым регуляризационным методом является при $(V_{n,\alpha}(0) = V_{n,\alpha}(K) = 0)$

$$(\bar\partial_{\tau_n}\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(k) = \frac{1}{\alpha}V_{n,\alpha}(k) - \frac{1}{\alpha}W_n^i(k\tau_n)u_n^\delta, \quad k \in \{1,...,K-1\}. \tag{6}$$

Теорема 4 *Предположим, что замкнутые операторы* A, A_n *на* E *и* E_n *соответственно порождают экспоненциально ограниченные* 1*-раз проинтегрированные полугруппы и предположим, что выполняются условия Теоремы Троттера-Като. Пусть* $\|u_n^\delta - u_n^0\| \le \delta, u^0 \in D(A^4), u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0, A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$. *Если параметры* α, δ, τ_n, *выбраны так, что* $\delta = \alpha, \tau_n = \alpha^{3/2}$ *при* $\alpha \to 0$, *то решение* $V_{n,\alpha}(\cdot)$ *задачи* (6), *построенное по устойчивой схеме* $W_n^i(\cdot)u_n^\delta$, *дает регуляризованное решение задачи* (1) *с* $f = 0$ *и выполняются следующие оценки* $(t = k_n\tau_n \in [0, T-\epsilon])$

$$\|\frac{V_{n,\alpha}(k_n+1) - V_{n,\alpha}(k_n)}{\tau_n} - p_n u(t)\| \le$$

$$\le \max_{s\in[0,T]} \|e_1^{sA_n}A_n u_n^0 - p_n e_1^{sA}Au^0\| + \|u_n^0 - p_n u^0\| + O(\sqrt{\alpha}) + \tau_n C\|A_n^4 u_n^0\|.$$

Литература

1. Morozov V. A. Regularization methods for ill-posed problems. Translated from the 1987 Russian original. CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

2. Li M., Piskarev S. On approximation of integrated semigroups // Taiwanese journal of mathematics. Vol. 14, N 6, 2010, C. 2137 – 2161.

3. Li M., Morozov V., Piskarev S. On the approximations of derivatives of integrated semigroups// Journal of Inverse and Ill-posed Problems. Vol. 18, No. 5, 2010, C. 515—550.

4. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. Numerical methods for grid equations. Volume I: Direct methods. Volume II: Iterative methods. Birkha"user Verlag, 1989, 242 p./vol. I; xv, 502 p./vol. 2.

5. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods for the solution of ill-posed problems. Moscow: "Nauka". 1979. 286 p.

Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка

Д.М. Поляков

(Воронеж, ВГУ; DmitryPolyakow@mail.ru)

Пусть $L_2[-1,1]$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[-1,1]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением со скалярным произведением $(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau, \qquad x,y \in L_2[-1,1]$.

Символом $L_\infty[-1,1]$ обозначается банахово пространство существенно ограниченных на $[-1,1]$ комплекснозначных функций. Через $W_2^4[-1,1]$ обозначим пространство Соболева $\{y : [-1,1] \to \mathbb{C} : y$ имеет три непрерывные производные, y''' абсолютно непрерывна и $y^{IV} \in L_2[-1,1]\}$.

Рассматривается оператор

$$L = A - B : D(L) \subset L_2[-1,1] \to L_2[-1,1],$$

где операторы A и B определяются следующими дифференциальными выражениями

$$Ay = y^{IV}, \qquad By = a(t)y'' + b(t)y, \qquad a,b \in L_\infty[-1,1],$$

с областью определения

$$y \in D(L) = D(A) = \left\{y \in W_2^4[-1,1] : y(-1) = y(1) = 0, y'(-1) = y'(1) = 0\right\}.$$

Оператор A — самосопряженный положительный оператор с компактной резольвентой. При изучении оператора L оператор A будет играть роль невозмущенного оператора. Оператор B, в свою очередь, будет играть роль возмущения.

При исследовании асимптотики собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка методом подобных операторов, были получены следующие результаты.

Теорема 1 . *Исследуемый дифференциальный оператор $L = A - B$ является оператором с компактной резольвентой и его собственные значения $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots$ допускают* *следующую асимптотику для нечетного и четного случая соответственно:*

$$\tilde{\lambda}_n = \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^4 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 \left(\int_{-1}^{0} a(t) e^{(\frac{\pi}{2} - 2\pi n)t + \frac{\pi}{2} - 2\pi n} dt + \right.$$
$$\left. + \int_{0}^{1} a(t) e^{(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n)t + \frac{\pi}{2} - 2\pi n} dt\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{nj} b_{jn}}{\lambda_j - \lambda_n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), n \in \mathbb{N},$$

для нечетного случая;

$$\tilde{\lambda}_n = \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 \left(\int_{-1}^{0} a(t) e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)t - \frac{\pi}{2} - 2\pi n} dt + \int_{0}^{1} a(t) e^{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)t - \frac{\pi}{2} - 2\pi n} dt\right) -$$
$$- \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_{nj} b_{jn}}{\lambda_j - \lambda_n} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), n \in \mathbb{N},$$

для четного случая, где $b_{nj} = \int_{-1}^{1} a(t) \tilde{e}_j(t) e_n(t) dt, n, j \in \mathbb{N}$, *— коэффициенты матрицы оператора умножения для соответствующих случаев, где*
$\tilde{e}_j(t) = \frac{1}{\alpha_j}(\cos\mu_j \operatorname{ch}(\mu_i t) + \operatorname{ch}\mu_j \cos(\mu_j t)), j \in \mathbb{N}$ *для нечетного случая,*
$\tilde{e}_j(t) = \frac{1}{\beta_j}(\sin\mu_j \operatorname{sh}(\mu_i t) + \operatorname{sh}\mu_j \sin(\mu_j t)), j \in \mathbb{N}$ *для четного случая.*

Теорема 2 . *Система собственных и присоединенных функций функций оператора $A - B$ образует базис Рисса в гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$. В частности, оператор $A - B$ является спектральным по Данфорду.*

Теорема 3 . *Если $\widetilde{P}_n$ — проектор Рисса, построенный по собственному значению $\widetilde{\lambda}_k$ оператора $A - B$, то*

$$\sum_{\lambda_n} \|\widetilde{P}_n - P_n\|_2^2 < \infty,$$

где P_n — проектор Рисса, отвечающий собственному значению λ_n оператора A.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов – изд-во Воронежского государственного университета, Воронеж 1987. – 165 с.

2. Баскаков А.Г., Дербушев А.В., Щербаков А.О., Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. Т.75. №3. 2011. С.3-28.

3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве – М.: Наука. 1965. – 448 с.

Критерий аддитивности конечного метрического пространства и минимальные заполнения

О.В. Рублёва

(Москва; rubleva-olga91@mail.ru)

В докладе будет доказан критерий аддитивности конечных метрических пространств, основанный на свойствах минимальных заполнений в смысле М. Громова.

Литература

1. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении,” Математ. сборник (2011), (в печати).

2. M. Gromov, “Filling Riemannian manifolds,” J. Diff. Geom., **18** (1), pp. 1–147 (1983).

3. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований (2003).

4. M. M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances*, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, (2009).

5. К. А. Зарецкий, “Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами,” УМН, **20** (6), сс. 90–92 (1965).

6. J. M. S. Simões-Pereira, “A note on the tree realizability of a distance matrix,” J. Combinatorial Th., **6**, pp. 303–310 (1969).

Количество вырожденных седловых атомов с одной вершиной степени $2n$

Н.Ю. Руденко

(Москва; rudenkony@gmail.com)

Если определить вырожденный седловой атом как $2n$-угольник со склеенными попарно сторонами, тогда множество таких атомов можно взаимно однозначно сопоставить с множеством хордовых диаграмм с $2n$ вершинами.

Тогда для подсчета количества седловых атомов с одной вершиной степени $2n$ достаточно посчитать количество соответствующих хордовых диаграмм с точностью до поворотов и симметрий.

Комбинаторными методами выводится рекуррентная формула, путем рассмотрения хордовых диаграмм с различными периодами и учетом их симметричности.

К вопросу об управляемости линейных уравнений соболевского типа с относительно секториальным оператором

О.А. Рузакова, Е.А. Олейник

(Челябинск, ЮУрГУ; oruzakova@gmail.com, oleynikkaterina@mail.ru)

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (т. е. линейный непрерывный), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ (т. е. линейный замкнутый, плотно определенный в $\mathfrak{X}$), $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$. Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \tag{1}$$

для уравнения

$$L \, \dot{x} \, (t) = Mx(t) + Bu(t), \quad 0 < t < T. \tag{2}$$

Основной целью данной работы является исследование ε-управляемости уравнения соболевского типа (2) при условии, что оператор M сильно (L, p)-секториален [1].

Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\mu_k}(M)$, $L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\mu_k}(M)$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Определение 1. Оператор M называется сильно (L, p)-секториальным, $p \in \mathbb{N}_0$, если

(i) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{a,\Theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \mu \neq a\} \subset \rho^L(M);$$

(ii) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\max\left\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}, \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|}$$

при любых $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\Theta}(M)$;

(iii) для всех $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\Theta}(M)$

$$\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\right\|_{\mathfrak{X}} \leq \frac{K}{|\lambda - a| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|};$$

(iv) существует плотный в $\mathfrak{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$ такой, что

$$\left\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) y\right\|_{\mathfrak{Y}} \leq \frac{\mathrm{const}(y)}{|\lambda - a| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|} \quad \forall y \in \overset{\circ}{\mathfrak{Y}}$$

при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\Theta}(M)$.

Теорема 1. [2] Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда

(i) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$;

(ii) $L_k = L\Big|_{\mathfrak{X}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $\quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom} M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^k; \mathfrak{Y}^k)$, $\mathrm{dom} M_k = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{X}^k$, $k = 0, 1$;

(iii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0; \mathfrak{X}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{Y}^1; \mathfrak{X}^1)$;

(iv) существует аналитическая в секторе полугруппа $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, разрешающая уравнение $L \overset{\cdot}{x}(t) = Mx(t)$;

(v) инфинитезимальным генератором аналитической полугруппы $\{X^t_1 = X^t\Big|_{\mathfrak{X}^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ является оператор $S_1 = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^1)$;

(vi) оператор $H = M_0^{-1} L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^0)$ нильпотентен степени не больше p.

Через P (Q) обозначим проектор вдоль $\mathfrak{X}^0$ ($\mathfrak{Y}^0$) на $\mathfrak{X}^1$ ($\mathfrak{Y}^1$).

Определение 2. Сильным решением задачи (1), (2) назовем вектор–функцию $x \in W^1_q(\mathfrak{X})$, если она удовлетворяет условию (1) и почти всюду на интервале $(0, T)$ удовлетворяет уравнению (2).

Теорема 2. [3] Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, $u \in W^{p+1}_q(\mathfrak{Y})$

$$x_0 \in \mathcal{P}_x = \left\{x \in \mathrm{dom} M : (I - P)x = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} (I - Q) B u^{(k)}(0)\right\}.$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (1), (2), имеющее вид

$$x(t) = X^t x_0 + \int\limits_0^t X^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} (I - Q) B u^{(k)}(t). \qquad (3)$$

Пусть функции управления $u(t)$ принадлежат $V(T) = W_q^{p+1}(\mathfrak{Y})$. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $x_0 \in \mathcal{P}_x$ теоремы 2 о разрешимости задачи Коши. Множество функций управления из $V(T)$, удовлетворяющих этому условию, обозначим $V_{x_0}(T)$.

В силу теоремы 1 задача (1), (2) редуцируется к системе двух задач:

$$\dot{x}^1(t) = S_1 x^1(t) + L_1^{-1} Q B u(t), \quad x^1(0) = P x_0 = x_0^1 \tag{4}$$

на пространстве $\mathfrak{X}^1$,

$$H \dot{x}^0(t) = x^0(t) + M_0^{-1}(I - Q) B u(t), \quad x^0(0) = (I - P) x_0 = x_0^0 \tag{5}$$

на пространстве $\mathfrak{X}^0$. При этом первые два слагаемых в формуле (3) дают решение задачи (4), а выражение

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I - Q) B u^{(k)}(t)$$

задает решение задачи (5) при выполнении условия согласования.

Говоря об управляемости системы, описываемой некоторым уравнением, будем через $x(T; x_0; u(t))$ обозначать значение в момент времени T решения задачи (1), (2) с начальным значением x_0 и функцией управления $u(t)$.

Определение 3. Система (2) называется ε-управляемой за время T, если для любых точек $x_0 \in \mathrm{domM}$, $\tilde{x} \in \mathfrak{X}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует управление $u(t) \in V_{x_0}(T) \neq \emptyset$ такое, что $\|x(T; x_0; u(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.

Аналогично результатам [4] справедлива

Теорема 3. Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален. Система (2) ε-управляема за время T (за свободное время) в том и только в том случае, когда

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{imX^sL_1^{-1}QB}, 0 \leq \mathrm{s} \leq \mathrm{T}\} = \mathfrak{X}^1 \quad (\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{imX^TL_1^{-1}QB}, \mathrm{T} \geq 0\} = \mathfrak{X}^1),$$

$$\mathrm{span}\{\mathrm{imH^kM_0^{-1}(I - Q)B}, \mathrm{k} = \overline{0, \mathrm{p}}\} = \mathrm{domM_0}.$$

Рассмотрим задачу

$$(\lambda - \Delta)\omega_t(x, t) = \alpha\omega(x, t) + u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \tag{6}$$

$$\omega(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \tag{7}$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

которая описывает переходные процессы в полупроводнике ([5], с. 97). Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Выберем пространства $\mathfrak{Y} = \mathfrak{U} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{X} = H_0^2(\Omega) = \{\omega(x) \in H^2(\Omega) : \omega(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.

Через $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим собственные числа оператора Лапласа, определенного на $H_0^2(\Omega)$, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ – соответствующие собственные функции ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$.

Определим линейные непрерывные операторы $L = \lambda I - \Delta$, $M = \alpha I$, $B = I$. Согласно результатам [6] оператор M сильно $(L, 0)$-секториален. Используя теорему 3, получаем

Теорема 4. Система (6)-(8) ε-управляема.

Литература

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47 – 74.

2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / . – Utrecht; Boston; K$\ddot{o}$ln; Tokyo: VSP, 2003.

3. Свиридюк Г.А., Ефремов А.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11.– С. 1912 – 1919.

4. Федоров В.Е., Рузакова О.А. Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах // Мат. заметки. – 2003. – Т. 74, № 4. – С. 618 – 628.

5. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. Физматлит, М., 2007.

6. Плеханова М.В., Исламова А.Ф. О разрешимости задач смешанного оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени // Известия вузов. Математика. – 2011. № 7. –С. 37 – 47

Теорема Борсука-Улама для квазиобратимых операторов

С.С. Рыданова
(Воронеж, ВГПУ; rydanova_vrn@mail.ru)

Пусть E_1, E_2 - два банаховых пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — линейный сюръективный оператор, $f : D(f) \subset E_1 \to E_2$ — вполне непрерывное отображение. Рассмотрим следующее уравнение:

$$A(x) = f(x). \tag{1}$$

Обозначим $N(A, f)$ множество решений уравнения (1), т.е.

$$N(A, f) = \{x \in E_1 \mid A(x) = f(x)\}.$$

Определение 1. *Будем говорить, что оператор A является квазиобратимым, если существует непрерывное отображение $p : E_2 \to E_1$ такое, что $A(p(y)) = y$ для любого $y \in E_2$. В этом случае отображение p будем называть квазиобратным к отображению.*

В дальнейшим будем предполагать, что оператор $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ квазиобратим и p является отображением квазиобратным к A.

Определение 2. *Будем говорить, что отображение f является (A, p) — вполне непрерывным, если $p \circ f$ является вполне непрерывным отображением.*

Известно, что замкнутый линейный сюрьективный оператор является квазиобратимым (см. [3]).

В работе [1] была рассмотрена теорема Борсука-Улама, в которой A является непрерывным линейным сюрьективным оператором. В настоящей работе рассматривается случай, когда A является квазиобратимым оператором и приводятся некоторые приложения этой теоремы.

Рассмотрим еще пример квазиобратимого оператора.

Пример 1. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$ — банаховы пространства, $A_i : D(A_i) \subset E_i \to E_{i+1}$ — замкнутые линейные сюрьективные операторы, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим оператор $C = A_n \circ A_{n-1} \circ \ldots \circ A_1$. Областью определения этого отображения является множество

$$D(C) = A_1^{-1}(A_2^{-1}(\ldots(A_{n-1}^{-1}(D(A_n)))\ldots)).$$

Очевидно, что C также является сюрьективным оператором.

Нетрудно доказать, что оператор C — квазиобратимый, так как компазиция $p = p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n$ является квазиобратным к оператору C, где $p_i : E_{i+1} \to E_i$ — квазиобратное отображение к оператору A_i.

Лемма 1. *Если A - квазиобратимый оператор, то у него существует нечетное правое обратное отображение.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $p : E_2 \to E_1$ такое, что $A(p(y)) = y$. Определим непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$ следующим образом:

$$q(y) = \frac{p(y) - p(-y)}{2}.$$

Нетрудно видеть, что $A(q(y)) = \frac{1}{2}A(p(y)) - \frac{1}{2}A(p(-y)) = \frac{1}{2}y - (-\frac{1}{2}y) = y$.

Очевидно также что

$$q(-y) = \frac{p(-y) - p(y)}{2} = -q(y),$$

следовательно q — нечетно отображениее, что и доказывет лемму 1.

Замечание. Если f является (A, p)-вполне непрерывным, то (A, q)-вполне непрерывно.

Пусть E — банахово пространство, $E_0 = E \times R^1$. Норму в E_0 определим по правилу:

$$||(x, t)|| = \sqrt{||x||^2 + t^2}.$$

Пусть S_0 — единичная сфера в банаховом пространстве E_0, а $f : S_0 \to E$ — вполне непрерывное нечетное отображение.

Рассмотрим уравнение

$$f(x, t) = x. \tag{2}$$

Лемма 2. *При сделанных предположениях уравнение (2) имеет решение.*

Доказательство см., например, [1].

Нам будет необходима также следующая лемма. Пусть S^{n-1} — единичная сфера в R^n, X — компактное метрическое пространство с непрерывной инволюцией T, то есть $T : X \to X$ и $T^2(x) = x$ для любого $x \in X$. Пусть инволюция T не имеет неподвижных точек на X.

Лемма 3. *Если $dimX \leq n - 1$, то существует непрерывное отображение $\gamma : X \to S^{n-1}$ такое, что $\gamma(Tx) = -\gamma(x)$ для любого $x \in X$.*

Простое доказательство этой леммы содержится в [5].

Пусть E_1, E_2 - два банаховых пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — квазиобратимый оператор. Пусть $S_r(0)$ — сфера радиуса r с центром в нуле пространства E_1, отображение $f : S_r(0) \to E_2$ — (A, p)-вполне непрерывное нечетное отображение.

Теорема 1. *Если $dim(KerA) \geq 1$, то уравнение (1) на сфере $S_r(0)$ имеет непустое множество решений и $dim(N(A, f)) \geq dim(KerA) - 1$.*

Доказательство этой теоремы основывается на предыдущих леммах.

Приложения теоремы Борсука-Улама

Об устойчивости ядра квазиобратимого оператора относительно вполне непрерывных возмущений.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — квазиобратимый оператор. Пусть $k : E_1 \to E_2$ — вполне непрерывный линейный оператор.

Теорема 2. *Если $dim(Ker(A)) \geq 1$, то оператор $A + k$ имеет ненулевое ядро и $dim(Ker(A + k)) \geq dim(Ker(A))$.*

Доказательство данной теоремы основывается на теореме 1.

Рассмотрим следующее следствие. Пусть оператор $C : D(C) \subset E_1 \to E_{n+1}$ такой, как в примере 1. Пусть $k : E_1 \to E_n$ — вполне непрерывный линейный оператор.

Следствие 1. *Если $dim(Ker(C)) \geq 1$, то оператор $C + k$ имеет ненулевое ядро и $dim(Ker(C + k)) \geq dim(Ker(C))$.*

Теорема об антиподах в бесконечномерных банаховых пространствах.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $A : D(A) \subset E_1 \to E_2$ — квазиобратимый оператор. Пусть $S_r(0)$ — сфера в E_1 радиуса r с центром в нуле и $g : S_r(0) \to E_2$ — вполне непрерывное отображение.

Рассмотрим отображение $\varphi : S_r(0) \to E_2$, $\varphi(x) = A(x) + g(x)$.

Теорема 3. *Если $dim(Ker(A)) \geq 1$, то существует точка $x_0 \in S_r(0)$ такая, что $\varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$ и топологическая размерность множества таких точек больше или равна $dim(Ker(A)) - 1$.*

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 1.

Рассмотрим следствие из этой теоремы. Пусть оператор $C : D(C) \subset E_1 \to E_{n+1}$ такой, как в примере 1. Пусть $S_r(0)$ — сфера в E_1 радиуса r с центром в нуле и $g : S_r(0) \to E_n$ — вполне непрерывное отображение, тогда справедливо следующее следствие.

Следствие 2. *Если $dim(Ker(C)) \geq 1$, то существует точка $x_0 \in S_r(0)$ такая, что $\varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$ и топологическая размерность множества таких точек больше или равна $dim(Ker(C)) - 1$.*

Литература

1. Гельман Б.Д. Теорема Борсука-Улама в бесконечномерных баноховых пространствах // Математические заметки. – Т. 193, №1. — 2002. – С. 83-92.

2. Гельман Б.Д. Бесконечномерная версия теоремы Борсука-Улама // Функциональный анализ и его приложения. — Т.38, №4. — 2004. — С. 1-5.

4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа / М:Наука. – 1975. – 510 с.

5. Izydorek M. The Bourgin-Yang theorem for multi-valued maps in the nonsymmetric case // Zeszyty naukowe wydzialu matem., fiziki i chemii, uniwers. Gdan'sk. — 1987. — № 6. — P. 37-41.

Корректность нелокально краевых задач

Г.Б. Савченко, Ю.Б. Савченко, С.А. Ткачёва
(Воронеж, ВГУ)

Рассматривается задача

$$Lu = f, \tag{1}$$

$$\Gamma_1 u|_{t=0} = \Gamma_2 u|_{t=a}. \tag{2}$$

Здесь $L = \frac{\partial}{\partial t} - A(-iD_x)$, $\Gamma_i = \Gamma_i(-iD_x)$, где $A(-iD_x)$, $\Gamma_1(-iD_x)$, $\Gamma_2(-iD_x)$ – дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами; $f = f(t,x)$ – заданная, а $u = u(t,x)$ – искомая n-мерные комплекснозначные вектор-функции, определенные в слое $(0 \leq t \leq a;\ \ x \in R^m)$.

Мы рассматриваем обобщенную функцию $f(t,x) \in S'(R^{m+1})$ как абстрактную функцию $t \in [0,a]$ со значениями в $S'(R^m)$.

Функция $u(t,x) \in W_2^1([0,a];\ S'(R^m))$ называется решением задачи (1)-(2), если для любой функции $\varphi(x) \in S(R^m)$ при почти всех $t \in [0,a]$ выполняются равенства

$$(Lu, \varphi) = (f, \varphi),$$

$$(\Gamma_1 u, \varphi)|_{t=0} = (\Gamma_2 u, \varphi)|_{t=a}.$$

Исследование корректности задачи в L_2-норме [1], [2].

Выделены классы задач (1)-(2) достаточно общего вида, для которых получены достаточные условия $\updownarrow_2$-корректности.

Литература

1. Дезин А.А. – Изв. АН СССР. Математика, 1967, т.31, №1 С. 61-86.
2. Савченко Г.Б. – Дифференциальные уравнения, 1985, Т.21, №8, С. 1450-1453.

Изучение прогибов кирхгофова стержня посредством редукции Морса – Ботта

Ю.И. Сапронов, К.А. Хуссейн
(Воронежский государственный университет, Дагестанский государственный университет)

Задача о закритических равновесных формах кирхгофова стержня.

Равновесные конфигурации прямолинейного и продольно сжатого кирхгофова стержня длины единица с жестким закреплением концов описывается краевой задачей ([1]-[3])

$$A\dot{\omega} + [\omega, A\omega] + \lambda[f^{-1}r_3, r_3] = 0, \qquad f(0) = f(1) = I. \tag{1}$$

Здесь λ — параметр сжимающей нагрузки, $A = diag(A_1, A_2, A_3)$ — тензор упругости в поперечном сечении $(J_k > 0\ \ \forall k)$, $\omega(s)$ — угловая скорость движения нормального сечения стержня в зависимости от параметра длины s средней линии стержня, записанная в координатах тройки ортов $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$, направленных по осям инерции нормального сечения, $r_3 = f_3(0)$. Орт $f_3(s)$ является касательным вектором к средней линии стержня, $f(s)$ — матричная функция, столбцами которой являются векторы $f_1(s), f_2(s),\ f_3(s)\ \ (f_k(s) = f(s)r_k)$.

Уравнение (1) является уравнением Эйлера – Лагранжа экстремалей функционала полной энергии

$$V(f,\lambda) = \frac{1}{2}\,\langle A\omega,\omega\rangle + \lambda\langle r_3, fr_3\rangle \tag{2}$$

($\langle\phi,\psi\rangle := \int\limits_0^1(\phi(s),\psi(s))ds$).

Уравнение (1) описывает также движение в поле тяготения твердого тела вокруг неподвижной точки: после замены параметра длины s на параметр времени t получаем уравнением Эйлер – Пуассона динамики твердого тела, которому также соответствует потенциал в виде функционала действия (2) (функционал Эйлера – Пуассона).

Точную информацию о функционале (2) на энергетическом многообразии $\Lambda := \{f(t) \in C^2([0,1], SO(3)) : f(0) = f(1) = I\}$ можно получить, рассмотрев редукцию Морса – Ботта к функции на двумерной сфере. Эту редукцию можно разложить в композицию двух редукций: бесконечномерной — в многообразие петель на двумерной сфере и конечномерной — из многообразия петель на сфере к функции на двумерной сфере.

Вектор $\omega = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$ канонически отождествляется [4] с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

для которой имеет место представление $\Omega = f^{-1}(s)\frac{df}{ds}(s)$.

Редукция к эйлерову стержню.

Пусть $\mathcal{M}$ — банахова группа Ли C^2-петель на $SO(3)$ в единице:

$$\mathcal{M} = \{f \in C^2([0,1], SO(3)) :\ f(0) = f(1) = I\}.$$

Отображение $p : f(s) \longmapsto \tau(s) := f(s)r_3$ задает гладкую субмерсию из $\mathcal{M}$ на гладкое банахово многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$ петель класса C^2 на двумерной сфере S^2: $\tilde{\mathcal{M}} = \{\tau \in C^2([0,1], S^2) :\ \tau(0) = \tau(1) = r_3\}$. Прообраз $p^{-1}(\tau)$ любой петли $\tau \in \tilde{\mathcal{M}}$ является орбитой правого действия

$$G \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \qquad (g(s), f(s)) \mapsto f(s)g(s),$$

банаховой группы Ли $G = \{g : g(s) = exp(\varphi(s)R_3)\}$. Через R_3 обозначается представление вида (3) для вектора r_3. Функция $\varphi(s)$ принадлежит классу C^2 и для нее выполняется условие

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi k, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

Следовательно, $p^{-1}(\tau)$ состоит из счетного набора компонент связности $\mathcal{N}_k(\tau)$, определяемых выбором k в (4).

В случае $A_1 = A_2$ (симметричного стержня) на компоненте $\mathcal{N}_0(\tau)$ имеет место представление

$$V(fg,\lambda) = \int\limits_0^1 \left(A_1\frac{|\dot{\tau}|^2}{2} + A_3\frac{(\omega_3+\dot{\varphi})^2}{2}\right)ds + \lambda\langle\tau, r_3\rangle, \tag{5}$$

где $g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)$, ω_3 — третья компонента угловой скорости, $|\dot\tau(s)|$ — кривизна средней линии стержня. Доказательство того факта следует из соотношения $|\dot\tau(s)|^2 = \omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)$, вытекающего из равенств $\tau(s) = f(s)r_3$, $|\dot f(s)r_3| = |f^{-1}(s)\dot f(s)r_3| = |\Omega r_3| = |[\omega, r_3]|$, и соотношения $(fg)^{-1}\frac{d}{ds}(fg) = g^{-1}f^{-1}(\dot f g + f\dot g) = g^{-1}(\Omega + \dot\varphi R_3)g$.

Из представления (5) получаем, что $V|_{p^{-1}(\tau)}$ имеет ровно по одной точке минимума на каждой компоненте $\mathcal{N}_k(\tau)$. Причем $f \in \mathcal{N}_k(\tau)$ является точкой минимума $V|_{p^{-1}(\tau)}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\int\limits_0^1 \omega_3^2 ds = c_k^2$, где $c_k = 2\pi k + \int\limits_0^1 \omega_3 ds$ (интеграл $\int_0^1 \omega_3 ds$ является инвариантом правого действия G на $\mathcal{M}$). Нетрудно установить, что ограничение $V|_{p^{-1}(\tau)}$ является геодезически выпуклым в бесконечномерной римановой метрике, в которой расстояние между $f(s)$ и $f(s)g(s)$, $g(s) = exp(\varphi(s)R_3)$, измеряется интегралом $\int_0^1 \varphi^2(s)ds$. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 (см. [3]) *Пусть* $\mathcal{O} = \left\{ f \in \mathcal{M} : \left| \int_0^1 \omega_3 ds \right| < \pi \right\}$. *Тогда функционал*

$$\tilde V(\tau, \lambda) := \inf_{f : f \in \mathcal{O} \cap \pi^{-1}(\tau)} V(f, \lambda), \quad \tau \in p(\mathcal{O}),$$

является гладким и для него имеет место представление

$$\int\limits_0^1 \left(A_1 \frac{|\dot\tau|^2}{2} + \lambda(\tau, r_3) \right) ds + \frac{A_3}{2} \left(\int\limits_0^1 \omega_3 ds + 2\pi k \right)^2. \tag{6}$$

Данная теорема означает возможность редукции (бесконечномерной), позволяющей сводить изучение поведения V на области $\mathcal{O}$ к изучению $\tilde V$ на области $p(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Из геодезической выпуклости V на $p^{-1}(\tau)$ следует, что критические точки V на $\mathcal{O}$ взаимно однозначно соответствуют критическим точкам V на $p(\mathcal{O})$. При этом невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные, с сохранением значений индекса Морса, а соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей.

Если $\lambda < 4\pi^2$, то дальнейший анализ функционала (6) можно осуществить через конечномерную редукцию Морса – Ботта к ключевой функции W

$$W(\xi, \lambda) := \inf_{\tau : \tau(1/2) = \xi} \tilde V(\tau, \lambda), \quad \xi \in S^2. \tag{7}$$

Функцию W удобно вычислять, перейдя к промежуточной вариационной задаче для эйлерова функционала

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\dot\varphi^2}{2} + \lambda \cos(\varphi) \right) dt, \quad \varphi = \varphi(t),\ t \in [0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Подмногообразие $\mathfrak{M}$ петель в единице (группы $SO(3)$) вида

$$f(t) := \exp(\varphi(t)R_1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad R_1 := \mathcal{E}_{2,3} := e_2 \wedge e_3,$$

квазиинвариантно [5] относительно функционала V.

Это вытекает из следующих ниже замечаний. Во-первых, что общий касательный вектор η к подмногообразию $\mathfrak{M}$ в точке f допускает, как нетрудно проверить, следующее представление (после "снесения в единицу"): $\eta(t) = h(t)R_2$. Так как $\exp(\varphi R_1) = \cos(\varphi)I + \sin(\varphi)R_1$, то $\tau(t) := f^{-1}(t)e_3 = \exp(-\varphi(t)R_1)\, e_3 = \cos(\varphi)e_3 - \sin(\varphi)e_2$. Из соотношений $\omega := f^{-1}\dot{f} = \dot{\varphi}\; e_1$, $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}\; e_1$, $\quad A\dot{\omega} = A_2\ddot{\varphi}\; e_1$, получаем

$$\mathcal{F}(f) := A\dot{\omega} + [\omega, A\omega] - \lambda\,[e_3, f^{-1}e_3] = (A_1\ddot{\varphi} + \lambda\sin(\varphi))\, e_1$$

(здесь $\mathcal{F} = grad\ V$). Из последнего соотношения вытекает квазиинвариантность $\mathfrak{M}$ относительно V.

Заметим, что отображение $\mathcal{F}$ здесь действует (фредгольмово) из многообразия $\mathcal{M} = \{f \in C^2([0,1], SO(3)) \ :\ \ f(0) = f(1) = I\}$ в пространство $\mathcal{M}_0 = \{f \in C^0([0,1], \mathcal{SO}(3))\}$.

Если $\lambda < 4\pi^2$, то функция (9) является гладкой на $S^2 \setminus \{-r_3\}$. При этом её критические точки взаимно однозначно соответствуют критическим точкам $\tilde{V}$ на $p(\mathcal{O})$ с сохранением значений индексов Морса и типов локальных колец особенностей.

Функция (9) допускает представление в явном виде [3].

Применение редуцирующей схемы Морса–Ботта.

В общем случае переход к конечномерной задаче выглядит (для абстрактной вариационной задачи $V(x) \longrightarrow extr$) следующим образом: рассмотривается конечная система редуцирующих функционалов $p_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (с линейно независимыми градиентами в каждой точке), посредством которой совершается переход к ключевой функции

$$W(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \inf_{x:p_i(x)=\xi_i} V(x) \tag{8}$$

(при некотрых условиях технического характера [3]). Система $\mathfrak{P}$ называется также *системой ключевых параметров* для функционала V.

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (индекс Морса, кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п.) исходного функционала, наследуются ключевой функцией.

Анализ функционала энергии в случае $\lambda < 4\pi^2$ можно осуществить (при нагрузке продольного сжатия, не превышающей второго критического значения) через конечномерную редукцию Морса–Ботта к ключевой функции

$$W(\xi, \lambda) := \inf_{\tau:\tau(1/2)=\xi} \tilde{V}(\tau, \lambda), \quad \xi \in S^2. \tag{9}$$

Функция (9) является гладкой на $S^2 \setminus \{-r_3\}$. Её критические точки взаимно однозначно соответствуют критическим точкам $\tilde{V}$ (на $p(\mathcal{O})$, $p(\tau) := \tau(1/2)$) с сохранением значений индексов Морса и типов локальных колец особенностей.

Функция (9) допускает представление в явном виде. Действительно, маргинальное отображение $\xi \longmapsto \tau_\xi$ допускает представление в виде

$$\tau_\xi(s) = e^{\psi(s)R} = (\cos\psi(s))r_3 + (\sin\psi(s))r, \quad r \perp r_3,$$

где $\psi(s)$ получено склейкой решений $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ уравнения

$$\ddot{\psi} + \lambda\sin\psi = 0, \tag{10}$$

отвечающих краевым условиям

$$\psi_1(0)=0,\quad \psi_1(1/2)=\eta,\qquad \psi_2(1/2)=\eta,\quad \psi_2(1)=0,\qquad \eta=\arccos\langle\xi,r_3\rangle.$$

Произведя в уравнении равновесия стандартную подстановку [2]

$$\psi=2\arcsin(k\ \sin u), \tag{11}$$

где k — константа, $0<k<1$, получим, что u является решением уравнения

$$\dot u \ = \ \lambda^{1/2}(1-k^2\sin^2 u)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$u(s)=am(\sqrt{\lambda}s;k), \tag{12}$$

где $am(\sqrt{\lambda}s;k)$ — так называемая амплитуда, полученная обращением эллиптического интеграла первого рода (в нормальной тригонометрической форме Лежандра) [2] $\sqrt{\lambda}s=F(u;k):=\int\limits_0^u\frac{dy}{(1-k^2\sin^2 y)^{1/2}}$. Из (11) и (12) получаем явную формулу решения $\psi_1(s)\ =\ 2\arcsin\left(k\ sn(\sqrt{\lambda}s;k)\right)$, где $sn(\tau;k)\ :=\ \sin am(\tau;k)$ — эллиптический синус. Для производной функции ψ_1 получаем представление $\dot\psi_1(s)\ =\ 2\sqrt{\lambda}\ cn(\sqrt{\lambda}s;k)$, где $cn(\tau;k):=\cos am(\tau;k)$ — эллиптический косинус.

Соответственно, для лагранжиана $L=\frac{\dot\psi^2}{2}-\lambda(\cos\psi-1)$ на решении $\psi_1(s)$ имеем представление

$$L\ =\ 2\lambda k^2(cn^2(\sqrt{\lambda}s;k)-sn^2(\sqrt{\lambda}s;k))\ =\ 2\lambda k^2(2cn^2(\sqrt{\lambda}s;k)-1).$$

Решение ψ_2 уравнения (11) получается продолжением $\psi_1(s)$ с интервала $[0,\ 1/2]$ на интервал $[1/2,\ 1]$ по симметрии: $\psi_2(s)\ =\ \psi_1(1-s)$. Следовательно, $\int\limits_0^1 L\ ds\ =\ 2\int\limits_0^{1/2} L\ ds$, и для ключевой функции (9) получаем глобальное представление $\widetilde{W}(k,\lambda)\ =\ 4\lambda k^2\left(2\int\limits_0^{1/2} cn^2(\sqrt{\lambda}s;k;ds-\frac{1}{2}\right)$ (ключевым параметром здесь служит эллиптический параметр k).

В случае $4\pi^2<\lambda<9\pi^2$ (при сжатии, не превышающем третью критическую нагрузку) изучение прогибов можно осуществить через конечномерную редукцию Морса–Ботта к ключевой функции W

$$W(\xi,\lambda):=\inf_{\tau:\tau(1/4)=\xi_1,\tau(1/2)=\xi_2}\tilde V(\tau,\lambda),\quad \xi\in S^2. \tag{13}$$

Критические точки этой функции взаимно однозначно соответствуют критическим точкам $\tilde V$ (на $p(\mathcal{O})$, $p(\tau):=(\tau(1/4),\tau(1/2))$ с сохранением значений индексов Морса и типов локальных колец особенностей.

Функция (13) также допускает представление в явном виде.

Литература

1. Николаи Е.Л. К задаче об упругой линии двоякой кривизны// Труды по механике. М.: Гостехиздат. 1955. – С.45-277.

2. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. М.: ОГИЗ. 1948. – 170с.

3. Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов// Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004). М., 2004. С.3–140.

4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. – 472 с.

5. Сапронова Т.Ю. О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов// В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж, ВГУ. 2000. – С.107-124.

Бифуркационная теорема для принципа Лагранжа

Л.В. Стенюхин
(Воронеж, ВГАСУ; stenyuhin@mail.ru)

Рассмотрим экстремальную задачу с ограничением типа равенств

$$D(u,\mu) \to \mathrm{extr},\ \ F(u,\mu) = 0, \tag{1}$$

$D : E_1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F : E_1 \times \mathbb{R} \to E_2,\ E_1, E_2$ — банаховы пространства, μ — параметр.

Согласно принципу Лагранжа, условная критическая точка u_0 при некотором $\lambda^* \in E_2^*$ является нулевой точкой оператора

$$\Phi(u,\mu) = (D'(u,\mu) + F'^*(u,\mu)\lambda_0^*,\ F(u,\mu)), \tag{2}$$

$\Phi : E_1 \times \mathbb{R} \to E_3 \times E_2$ и $E_1 \subset E_3$.

Теорема 5 *Пусть* $\Phi(u,\mu) \in C^p, p \geq 2$ *в окрестности точки* $(u_0,\mu_0) \in E_1 \times \mathbb{R},\ \Phi(u_0,\mu_0) = 0$. *Предположим, что*
1) $\Phi_\mu(u_0,\mu_0) = 0$*;*
2) $Ker\,\Phi_u(u_0,\mu_0)$ *одномерно и порождается элементом* h_0*;*
3) $Im\,\Phi_u(u_0,\mu_0) \equiv Y_1$ *имеет коразмерность 1;*
4) $\Phi_{\mu\mu}(u_0,\mu_0) \in Y_1$ *и* $\Phi_{u\mu}(u_0,\mu_0)h_0 \overline{\in} Y_1$.
Тогда (u_0,μ_0) *является точкой бифуркации отображения* Φ. *Множество решений уравнения* $\Phi(u,\mu) = 0$ *вблизи точки* (u_0,μ_0) *состоит из двух* $C^{p-2}-$ *кривых* Γ_1 *и* Γ_2, *пересекающихся только в этой точке. Если* $p > 2$, *то*

кривая Γ_1 *касается оси* μ *в точке* (u_0,μ_0) *и параметризуется*

$$(u(t_1), t_1),\ \ |t_1 - t_0| \leq \varepsilon;$$

кривая Γ_2 *параметризуется параметром* $t_2,\ |t_2| \leq \varepsilon$ *:*

$$(t_2 h_0 + h_1(t_1), \mu(t_1)),$$

где $\mu(0) = \mu_0$.

Достаточные условия теоремы использовались автором в задаче изгиба стержня с ограничением интегрального среднего и в задаче минимальных поверхностей. Эти условия аналогичны условиям из [1], но в задачах управления множители Лагранжа по отношению к условно критической точке не единственны. Это обстоятельство может осложнить выполнение условия 2) теоремы, если ядро линеаризации находить по паре переменных (u, λ^*). Нахождение ядра по переменной u при некотором фиксированном λ^* позволяет "сделать"ядро одномерным.

Литература

1. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу – М.: Мир. 1977. – 232 с.

Исследование математической модели процесса нагрева неоднородной среды «ТЭН-песок-воздух»

М.Г. Телков

(Вологда, ВоГТУ; m.telkov@yandex.ru)

Настоящая работа посвящена исследованию следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \ u = u(t, x), \ t > 0, \ r < x < R, \tag{1}$$

$$c_r \frac{\partial u}{\partial t}(t, r) - k \frac{\partial u}{\partial x}(t, r + 0) = Q_0, \tag{2}$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(t, r + 0) = h_r(u(t, r) - u(t, r + 0)), \tag{3}$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(t, R - 0) = h_R(u(t, R - 0) - u(t, R)), \tag{4}$$

$$c_R \frac{\partial u}{\partial t}(t, R) + \alpha_R u(t, R) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(t, R - 0), \tag{5}$$

$$u(0, x) = u_0 \ , \ r \le x \le R. \tag{6}$$

Здесь $u(t, x)$ - температура в пространстве между двумя концентрическими цилиндрами радиусов r и R, наполненном песком, на расстоянии x от оси симметрии в момент времени t. Уравнение (1) есть уравнение теплового баланса согласно закону Фурье [1], где $a^2 = k/c\rho$ - коэффициент температуропроводности песка, k, ρ, c - коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость песка. Краевое условие (2) представляет тепловой баланс на поверхности ТЭНа, а краевое условие (5) - тепловой баланс на внешней поверхности. Краевыми условиями (3), (4) представлены условия теплопередачи на внутренней границе «ТЭН-песок» и на внешней границе «песок-воздух». Начальным условием (6) задается начальная температура среды.

Начально-краевая задача (1)-(6) характеризует процесс нагрева одновременно в трех взаимосвязанных средах. Задача подобного вида впервые была рассмотрена в работе [2] при исследовании температурного режима «печь-стержень». Задача (1)-(6) принципиально отличается от задачи, исследованной в работе [2].

Теорема 1. *Пусть $k \neq 0$, $c_r \neq 0$, $c_R \neq 0$, $h_R > 0$, $\alpha_R > 0$. Тогда решение задачи (1)-(6) единственно.*

По аналогии с работой [2] регулярным режимом называем представление решения $u(t, x)$ в виде

$$u(t, x) = u_0(x) + u_1(x) e^{-\lambda_1 a^2 t} + U_2(t, x), \tag{7}$$

где $\lambda_1 > 0$ и остаточный член $U_2(t, x)$ удовлетворяет условию $e^{-\lambda_1 a^2 t} U_2(t, x) \to 0$, $t \to +\infty$ равномерно по всем $x \in [r, R]$. Расчет регулярного температурного режима состоит в однозначном нахождении функций $u_0(x), u_1(x)$ и положительного числа λ_1. Зная их, на основе экспериментальных данных можно находить тепловые константы h_r - коэффициент теплопередачи от ТЭНа к песку, h_R - коэффициент теплопередачи от песка воздуху, α_R - коэффициент потери тепла в воздухе вблизи внешней поверхности.

В процессе нагрева, по истечении большого промежутка времени, происходит стабилизация температуры - возникает стационарный режим. Стационарный режим в задаче (1) - (6) определяется функцией $u_0(x)$, к которой приближается решение $u(t,x)$ при $t \to +\infty$. В задаче (1) - (6), формально переходя к пределу при $t \to +\infty$, получим:

$$\frac{d^2u_0}{dx^2}(x) + \frac{1}{x}\frac{du_0}{dx}(x), \quad r < x < R,$$

$$-k\frac{du_0}{dx}(r+0) = Q_0, \quad \alpha_R u_0(R) = -k\frac{du_0}{dx}(R-0),$$

$$-k\frac{du_0}{dx}(r+0) = h_r(u_0(r) - u_0(r+0)),$$

$$-k\frac{du_0}{dx}(R-0) = h_R(u_0(R-0) - u_0(R)).$$

Отсюда находим $u_0(x)$:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0(r+0) + \dfrac{Q_0}{h_r}, & x = r, \\ \left(1 + \dfrac{\alpha_R}{h_R}\right)\dfrac{rQ_0}{R\alpha_R} + \dfrac{rQ_0}{k} ln\dfrac{R}{x}, & r < x < R, \\ \dfrac{rQ_0}{R\alpha_R}, & x = R. \end{cases} \tag{8}$$

Для того чтобы определить $u_1(x)$ и λ_1, участвующие в представлении (7), решение задачи (1) - (6) формально представим в виде

$$u(t,x) = u_0(x) + u_1(x)e^{-\lambda_1 a^2 t} + \cdots + u_n(x)e^{-\lambda_n a^2 t} + \cdots, \tag{9}$$

и для нахождения чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{d^2v}{dx^2}(x) + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx}(x) + \lambda v(x) = 0, \quad r < x < R, \tag{10}$$

$$\frac{h_r c_r a^2\lambda}{h_r - c_r a^2\lambda} v(r+0) + k\frac{dv}{dx}(r+0) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{h_R(\alpha_R - c_R a^2\lambda)}{h_R + \alpha_R - c_R a^2\lambda} v(R-0) + k\frac{dv}{dx}(R-0) = 0. \tag{12}$$

Теорема 2. *Задача (10)-(12) имеет счетное число собственных значений* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ *и*

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R-r} + \frac{-2\pi}{R-r} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \text{при} \quad n \to +\infty,$$

Литература

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. - М.: Физматлит, 2002. - 320 с.

2. Избранные труды А.А. Самарского. - М.: МАКС Пресс, 2003. - 531 с.

Об одном эпизоде из предыстории синергетики

Н.Н. Удоденко
(Воронеж, ВГУ)

В 70-е годы прошлого века возникла синергетика — новое междисциплинарное направление исследований современной науки. Одной из главных задач синергетики является познание общих принципов, лежащих в основе процессов самоорганизации, реализующихся в физических, биологических и социальных системах.

Математической базой синергетики является, если говорить современным языком, качественная теория динамических систем, основы которой были заложены в работах А. Пуанкаре [6], А. М. Ляпунова [10] и которая активно развивалась в XX столетии.

В конце XIX—начале XX вв. Н. В. Бугаев предпринял попытку создать в математике новую область исследований — аритмологию [3, 5, 11]. По его замыслу, в аритмологии должны были создаваться методы анализа разрывных функций, которые могли быть полезны при решении задач, где методы классического анализа были малоэффективны. Проблемами аритмологии занимались В. Г. Алексеев, Д. Ф. Егоров, П. А. Некрасов, П. А. Флоренский.

В. Г. Алексеев, по его словам, занимался популяризацией идей аритмологии. В [1] он излагает идеи аритмологии и, говоря об их важности, аппелирует к работам К. Бэра, А. Эттингена, С. И. Коржинского, Г. де Фриза.

Одним из оппонентов В. Г. Бугаева и его последователей был выдающийся математик Д. Д. Мордухай-Болтовской. Анализируя идеи аритмологии и скачкообразного развития природы, он приходит к следующему заключению:

«Природа делает скачки, не видимые, а действительные. Мы видим преимущественно те её элементы, которые инертны ко всякому движению, и которые, приняв положение устойчивого равновесия, с упорством его сохраняют. Но в то же время, невидимые нами силы совершают непрерывную работу, до поры не влияющие на перемену положения инертных элементов и только в момент достижения известных границ выводящие их из положения равновесия для разложения или приведения в новое устойчивое равновесие [8].»

Таким образом, скачки в теории гетерогенезиса С. И. Коржинского, мутационной теории Г. де Фриза и других — это бифуркации в динамических системах, встречающихся в химии, биологии и т. д.

В дальнейшем, при изучении математических моделей, возникающих в естествознании, активно использовались методы качественной теории дифференциальных уравнений [2, 4]. По-видимому, в [8] впервые в неявной форме была высказана идея использования качественной теории дифференциальных уравнений в биологических задачах. Исследования же в области аритмологии прекратились в начале 10-х гг. прошлого века.

Эксперты в социологии науки утверждают, что XXI-й век — век биологии и биотехнологий. По их мнению [7, 10], в решении этих проблем будут полезны методы дискретной математики. И здесь могут быть востребованы в модифицированной форме идеи аритмологии.

Литература

1. Алексеев В. Г. Математика как основание критики научно-философского мировоззрения. Юрьев. 1904. 52 с.

2. Базыкин Ю. М. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М. Наука. 1985. 182 с.

3. Бугаев Н. В. Математика и научно-философское миросозерцание / Матем. сб., т. 25, 1904. С. 349— 369.

4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М. Наука. 1976. 286 с.

5. Колягин Ю. М., Саввина О. А. Математики-педагоги России. Забытые имена. Кн. 4. Н. В. Бугаев. Елец. 2009. 278 с.

6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / Собр. соч., т. 2, 1948 с. 7— 263.

7. Монастырский М. И. Математика на рубеже двух столетий / Ист.-матем. исследования (вторая серия). вып. 5(40). М. 2000. С. 56— 70.

8. Мордухай-Болтовской Д. Д. О законе непрерывности / Вопросы философии и психологии, 1907, кн. 87(2). С. 168— 184.

9. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. ГИТТЛ. М.— Л. 1947, 392 с.

10. Тихомиров В. М. О некоторых особенностях математики XX в. / Ист.-матем. исследования (вторая серия). вып. 3(38). М. 1999, С. 178— 197.

11. Шапошников А. В. Философские взгляды Н. В. Бугаева и русская культура XIX—начало XX вв.. / Ист.-матем. исследования (вторая серия). вып. 7(42). М. 2002.

Описание особенностей системы биллиарда в эллипсе

В.В. Фокичева

(Москва; arinir@yandex.ru)

Рассмотрим биллиард в области, ограниченной эллипсом. Широко известен факт: касательные к кускам траекторий являются касательными к одной и той же квадрике, софокусной с исходным эллипсом. Данный факт, во-первых делает систему интегрируемой, а во-вторых, позволяет рассматривать другие интегрируемые биллиарды, к примеру биллиарды в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами. В докладе будут рассмотрена простая система с эллипсом. Особо стоит отметить то, что в данной задаче молекулу - инвариант лиувиллевой эквивалентности - можно вычислить почти по определению.

Литература

1. Vladimir Dragović, Milena Radnović, Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards

2. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе.-М.-Ижевск:НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика2010

3. A.V.Bolsinov, A.T.Fomenko. Orbital classification of geodesic flows on two-dimensional ellipsoids. The Jacobi problem is orbitally equivalent to the integrable Euler case in rigid body dynamics. - Functional Analysis and its Applications. 1995, vol.29, No.3, pp.149-160

4. А.В.Болсинов, А.Т. Фоменко, «Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация», т.1,2, РХД, Ижевск, 1999

5. E.Gutkin. Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems. REGULAR AND CHAOTIC DYNAMICS, 2003, v.8, №1

Построение решения одной начально-краевой задачи, возникающей в механике упругих систем

О.А. Хребтюгова
(г. Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова; olgax29@yandex.ru)

Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$J^*\ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a)y_{tt}(x,t)dx + \varepsilon \int_0^1 \phi_{tt}(x,t)dx = M(t), \tag{1}$$

$$-\varepsilon y_{tt} + \gamma(y_{xx} - \phi_x) = \varepsilon(x+a)\ddot{\theta}, \tag{2}$$

$$-\varepsilon^2\phi_{tt} + \varepsilon\phi_{xx} + \gamma(y_x - \phi) = \varepsilon^2\ddot{\theta}, \tag{3}$$

$$y(0,t) = \phi(0,t) = 0, y_x(1,t) - \phi(1,t) = \phi_x(1,t) = 0, \tag{4}$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1(x), y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x),$$
$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \tag{5}$$

которая описывает поворот твердого тела с жестко закрепленным в нем упругим стержнем, моделируемым балкой Тимошенко, под действием момента внешних сил, приложенного к оси, проходящей перпендикулярно плоскости колебаний стержня. Начально- краевая задача (1)-(5) приведена в безразмерных переменных: $x = x'/l$, $y = y'/l$,$a = a'/l$, $t = t'/t_0$, $M(t) = M(t')/(EJ)$, $t_0 = l^2(S\rho/(EJ))^{1/2}$, $J_0 = J_0'/(\rho Sl^3)$, $\varepsilon = J/(Sl^2)$, $\gamma = æ/(2(1+\upsilon))$. Здесь l - длина стержня, ρ - плотность материала стержня и твердого тела, E - модуль Юнга материала стержня, υ - коэффициент Пуассона материала стержня, æ - коэффициент сдвиговых деформаций сечения стержня, J_0' - момент инерции твердого тела относительно оси вращения, a' - расстояние от точки заделки стержня до центра масс твердого тела, S - площадь сечения стержня. Кроме того

$$J^* = J_0 + \int_0^1 (x+a)^2 dx + \varepsilon.$$

Выразим из уравнения (1) $\ddot{\theta}$ и подставим это выражение в (2)-(3). В результате получим следующую систему уравнений

$$\varepsilon y_{tt} - \frac{1}{J^*}\varepsilon(x+a)\int_0^1 (x_1+a)y_{tt}(x_1,t)dx_1 -$$
$$- \frac{1}{J^*}\varepsilon^2(x+a)\int_0^1 \phi_{tt}(x_1,t)dx_1 - \gamma(y_{xx} - \phi_x) = -\varepsilon\frac{1}{J^*}(x+a)M(t), \tag{6}$$

$$\varepsilon^2\phi_{tt} - \frac{1}{J^*}\varepsilon^2\int_0^1 (x_1+a)y_{tt}(x_1,t)dx_1 -$$
$$\frac{1}{J^*}\varepsilon^3\int_0^1 \phi_{tt}(x_1,t)dx_1 - \varepsilon\phi_{xx} - \gamma(y_x - \phi_x) = -\varepsilon^2\frac{1}{J^*}M(t)(2) \tag{7}$$

с краевыми и начальными условиями (4), (5) для определения $y(x,t)$ и $\phi(x,t)$.

Введем гильбертово пространство H вектор-функций $u(x) = col(y(x), \phi(x))$, $y(x)$, $\phi(x) \in L_2(0,1)$ со скалярным произведением и нормой

$$(u,v)_H = \varepsilon \int_0^1 y(x)z(x)dx+$$
$$\varepsilon^2 \int_0^1 \phi(x)\psi(x)dx - \frac{1}{J^*}\varepsilon \int_0^1 (x+a)y(x)dx \int_0^1 (x+a)z(x)dx-$$
$$\frac{1}{J^*}\varepsilon^2 \int_0^1 (x+a)y(x)dx \int_0^1 \psi(x)dx - \frac{1}{J^*}\varepsilon^2 \int_0^1 (x+a)z(x)dx \int_0^1 \phi(x)dx-$$
$$\frac{1}{J^*}\varepsilon^3 \int_0^1 \phi(x)dx \int_0^1 \psi(x)dx, \quad (8)$$

где $v(x) = col(z(x), \psi(x))$.

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$Au \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon y(x) - \frac{1}{J^*}\varepsilon(x+a)\int_0^1 (x_1+a)y(x_1)dx_1 - \frac{1}{J^*}\varepsilon^2(x+a)\int_0^1 \phi(x_1)dx_1 \\ \varepsilon^2\phi(x) - \frac{1}{J^*}\varepsilon^2 \int_0^1 (x_1+a)y(x_1)dx_1 - \frac{1}{J^*}\varepsilon^3 \int_0^1 \phi(x_1)dx_1 \end{pmatrix},$$
$$u(x) = col(y(x), \phi(x)). \quad (9)$$

Утверждение 1. *Оператор A, действующий из $H \to H$, является симметричным, ограниченным и положительно определенным.*

В H введем еще одно скалярное произведение $\langle u,v\rangle = (Au,v)_H$ и норму $\| u \|_H^2 = \langle u,u\rangle$.В H рассмотрим дифференциальный оператор

$$Bu = \begin{pmatrix} -\gamma(y''(x) - \phi'(x)) \\ -\varepsilon\phi''(x) - \gamma(y'(x) - \phi(x)) \end{pmatrix} \quad (10)$$

с областью определения $D(B) = \{(y(x), \phi(x)) \in C^2(0,1),\ y(0) = \phi(0) = 0,\ y'(1) - \phi(1) = 0,\ \phi'(1) = 0\}$.

Утверждение 2. *Оператор B является симметричным и строго положительным.*

Ведем в H_B энергетическое скалярное произведение $(u,v)_B = (Bu,v)_H$ и норму

$$\| u \|_B^2 = (u,u)_B. \quad (11)$$

Пополнив D_B в норме (11), получим энергетическое пространство H_B оператора B.

Утверждение 3. $H_B \subset H$.

В дальнейшем расширение оператора B на H_B вновь обозначим через B.

Запишем начально-краевую задачу (6)-(7), (4)-(5) в операторной форме

$$Au_{tt} + Bu = g(x)M(t), \quad (12)$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_0(x) = col(y_0(x), \phi_0(x)),$$
$$u_t(x,0) = u_1(x), u_1(x) = col(y_1(x), \phi_1(x)), \quad (13)$$

где $g(x) = col(-\frac{1}{J^*}\varepsilon(x+a), -\frac{1}{J^*}\varepsilon^2)$.

Обозначим через $H_1(Q_T)$ пространство вектор-функций $u(x,t) = col(y(x,t), \phi(x,t))$, полученное замыканием в норме

$$\| u(x,t) \|_{H_1}^2 = \int_0^T ((u_t(x,t), u_t(x,t)) + (u(x,t), u(x,t))_B)dt$$

множества вектор-функций $u(x,t) = col(y(x,t), \phi(x,t)) \in C^{1,1}(Q_T)$, $y(0,t) = \phi(0,t) = 0$, $y_x(1,t) - \phi(1,t) = 0$, $\phi_x(1,t) = 0$.

Введем в рассмотрение функцию вида

$$u(x,t) = col(y(x,y), \phi(x,t)) \in H_1(Q_T),\ v(x,t) \equiv 0. \tag{14}$$

Пусть

$$u_0(x) \in H_B, u_1(x) \in H. \tag{15}$$

Под обобщенным решением начальной краевой задачи (6)-(7), (4)-(5), определенным в Q_{T_1}, с начальными условиями (15) будем понимать функцию $u(x,t) \in H_1(Q_T)(u(x,0) = u_0(x))$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$\int_0^T \Big((u_t(x,t), v_t(x,t)) - (u(x,t), v(x,t))_B -$$

$$- \frac{1}{J^*}(g(x)M(t), v(x,t)) \Big) dt + (u_1(x), v(x,0)) = 0 \tag{16}$$

для любой функции $v(x,t)$ вида (14).

Утверждение 4. *Обобщенное решение начальной краевой задачи (6)-(7), (4)-(5) единственно.*

Рассмотрим в H_B спектральную задачу

$$-\lambda A u + B u = 0. \tag{17}$$

Утверждение 5. *Существует счетная последовательность вещественных однократных точек спектра $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots (\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty)$ спектральной задачи (17), которым отвечают собственные функции $u_n(x) \in H_B$, нормированные следующим образом $\langle u_n(x), u_m(x) \rangle = \delta_{nm}$.*

Из (17) имеем $\omega_n^2(u_n, u_m) = (u_n, u_m)_B$ $(\omega_n^2 = \lambda_n)$.

Таким образом функции $u_n(x)$ образуют ортонормированный базис в H и ортогональный в H_B. Используя метод Фурье, обобщенное решение начальной краевой задачи (6)-(7), (4)-(5) можно получить в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\omega_n^{-1} \Big(a_{0n}\cos(\omega_n t) + b_{0n}\sin(\omega_n t) -$$

$$- \frac{1}{J_0} d_n \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau))M(\tau)d\tau \Big), \tag{18}$$

где $\omega_n^2 = \lambda_n, a_{0n} = \omega_n^{-1}(u_0(x), u_n(x))_B, b_{0n} = \langle u_0(x), u_n(x) \rangle, d_n = \langle g(x), u_n(x) \rangle$.

Утверждение 6. *Обобщенное решение начальной краевой задачи (6)-(7), (4)-(5) существует, задается формулой (18). При этом*

$$\| u(x,t) \|_{H_1}^2 \le C \left(\| u_0(x) \|_B^2 + \| u_1(x) \|_H^2 + \| g(x) \|_H^2 \| M(t) \|_{L_2(0,T)}^2 \right).$$

Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для одного уравнения соболевского типа

О.Н. Цыпленкова
(Челябинск, ЮУрГУ; tsyplenkova_olga@mail.ru)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява

$$(\lambda - \Delta)x_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')x_t + \beta(\Delta - \lambda'')x + u \tag{1}$$

с граничным условием

$$x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

Уравнение (1) описывает продольные колебания упругого стержня с учетом инерции и при внешней нагрузке, причем отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу задачи.

Данную задачу в подходящих гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ удается редуцировать к абстрактному уравнению соболевского типа

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0x + y + Cu, \tag{3}$$

где операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $\mathrm{u} : [0,\tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : [0,\tau) \subset \mathbf{R}_+ \to \mathfrak{Y}$ $(\tau < \infty)$.

Определение 1. Пучок операторов $\vec{B}$ называется *полиномиально ограниченным относительно оператора* A (или просто *полиномиально* A*-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})).$$

Определение 2. Если пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, ∞ – полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, то будем называть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)*-ограниченным.*

Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен и выполнено условие

$$\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})d\mu \equiv \mathbb{O}, \tag{A}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ [1]. Тогда существуют относительно спектральные проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B})\mu A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu A R^A_\mu(\vec{B})d\mu,$$

пространства $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ расщепляются в прямую сумму и действия операторов A, B_1, B_0 также расщепляются.

Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{array}{l} A\text{-спектр пучка } \vec{B}\ \sigma^A(\vec{B}) = \sigma^A_0(\vec{B}) \bigcup \sigma^A_1(\vec{B}), \text{ причем} \\ \sigma^A_k(\vec{B}) \neq \emptyset,\ k = 0,1; \text{ и существует контур } \gamma_0 \subset \mathbb{C}, \\ \text{ограничивающий область } \Gamma_0 \subset \mathbb{C} \text{ такую, что} \\ \Gamma_0 \bigcap \sigma^A_0(\vec{B}) = \sigma^A_0(\vec{B}),\ \overline{\Gamma}_0 \bigcap \sigma^A_1(\vec{B}) = \emptyset, \end{array} \tag{B}$$

$$\int_{\gamma_0} R_\mu^A(\vec{B})d\mu = \mathbb{O}. \tag{A_0}$$

Если пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и выполнены условия (A), (B), (A_0), тогда операторы $P_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \mu R_\mu^A(\vec{B})Ad\mu \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ и $P_{in} = P - P_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ – проекторы, причем $P_{fin}P_{in} = P_{in}P_{fin} = \mathbb{O}$ [2].

Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа (3) рассмотрим начально-конечную задачу

$$\begin{array}{c} P_{in}(\dot{x}(0) - x_1^0) = 0,\ P_{in}(x(0) - x_0^0) = 0; \\ P_{fin}(\dot{x}(\tau) - x_1^\tau) = 0,\ P_{fin}(x(\tau) - x_0^\tau) = 0. \end{array} \tag{4}$$

Определение 3. Вектор-функцию $x \in H^2(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : \ddot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовем *сильным решением уравнения*

$$A\ddot{x} = B_1\dot{x} + B_0x + y, \tag{5}$$

если она п. в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (5) назовем сильным решением задачи (4),(5), если оно удовлетворяет (4).

Теорема 1. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, выполнены условия $(A),(B),(A_0)$. Тогда для любых $x_k^0, x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = 0,1$ и $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (4) для уравнения (5).*

Введем в рассмотрение пространство управлений

$$H^{p+2}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : u^{(p+2)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}), p \in \{0\}\cup\mathbb{N}\}.$$

Выделим в пространстве $H^{p+2}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $\mathfrak{U}_{ad} = H_\partial^{p+2}(\mathfrak{U})$ – *множество допустимых управлений.*

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании пары $(\hat{x},\hat{u})$, где $\hat{x}$ – решение задачи (3), (4), а $\hat{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$ – управление, для которого выполняется соотношение

$$J(\hat{x},\hat{u}) = \min\nolimits_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x,u),$$

где

$$J(x,u) = \sum_{q=0}^{2}\int_0^\tau ||x^{(q)} - \tilde{x}^{(q)}||^2 dt + \sum_{q=0}^{p+2}\int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{U}} dt. \tag{6}$$

Здесь $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+2$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $\tilde{x}(t)$ – плановое состояние системы.

Теорема 2. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, выполнены условия $(A),(B),(A_0)$. Тогда для любых $x_k^0, x_k^\tau \in \mathfrak{X}$, $k = 0,1$ и $y \in H^{p+2}(\mathfrak{Y})$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (4) для уравнения (3).*

Редуцируя задачу (3), (4) к уравнению (1), положим

$$\mathfrak{X} = \{x \in W_2^{l+2}(\Omega) : x(s) = 0, s \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{Y} = W_2^l(\Omega),$$

где $W_2^l(\Omega)$ – пространства Соболева. Операторы А, B_1 и B_0 зададим формулами $A = \lambda - \Delta$, $B_1 = \alpha(\Delta - \lambda')$, $B_0 = \beta(\Delta - \lambda'')$, $C = \mathbb{I}$. При любом $l \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$.

Лемма 1. [3] *Пусть выполнено одно из следующих условий:*
(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$*;*
(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$*;*
(iii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$*.*
Тогда пучок $\vec{B}$ *полиномиально* A*-ограничен.*

Если выполнены условия (i) или (iii) леммы 1, то имеет место и условие (A). Если $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$, т.е. выполнено условие (ii) леммы 1, условие (A) не выполняется, и мы исключим его из дальнейших рассмотрений.

A-спектр пучка $\vec{B}$ составляют решения $\mu_k^{1,2}$ уравнения

$$(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k) = 0, \ k \in \mathbb{N}.$$

Построим проектор P:

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если выполнено (i);} \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda = \lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \text{ если выполнено (iii).} \end{cases}$$

Для построения проектора P_{fin} выберем область $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$, содержащую конечное множество точек $\mu_{k_s}^{1,2}$ A-спектра $\sigma_0^A(\vec{B})$ и такую, что $\partial\Gamma_0 \bigcap \sigma_0^A(\vec{B}) = \emptyset$. Как нетрудно видеть, область Γ_0 можно выбрать такой, что $\partial\Gamma_0 = \gamma_0$ – контур. Таким образом выполнены условия (B) и (A_0).

Рассмотрим начально-конечную задачу

$$\begin{array}{ll} \sum_{\substack{\mu_k^{1,2} \neq \mu_{k_s}^{1,2} \\ \lambda \neq \lambda_k}} < \varphi_k, x(s,0) - x_1^0(s) > \varphi_k = 0, & \sum_{\substack{\mu_k^{1,2} \neq \mu_{k_s}^{1,2} \\ \lambda \neq \lambda_k}} < \varphi_k, x_t(s,0) - x_0^0(s) > \varphi_k = 0, \\ \sum_{\substack{\mu_k^{1,2} = \mu_{k_s}^{1,2} \\ \lambda \neq \lambda_k}} < \varphi_k, x(s,\tau) - x_1^\tau(s) > \varphi_k = 0, & \sum_{\substack{\mu_k^{1,2} = \mu_{k_s}^{1,2} \\ \lambda \neq \lambda_k}} < \varphi_k, x_t(s,\tau) - x_0^\tau(s) > \varphi_k = 0. \end{array} \tag{7}$$

для уравнения (1) с граничными условиями (2).

В силу теоремы 2 имеет место

Теорема 3. *При любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$ *таком, что выполнено условие либо (i), либо (iii) леммы 1, и любых* $\tau \in \mathbb{R}_+, x_k^0, \ x_k^\tau \in \mathfrak{X}, k = 0, 1$, *существует единственное решение задачи оптимального управления* $(\hat{x}, \hat{y})$ *для уравнения Буссинеска–Лява (1) с условиями (2), (7), минимизирующее функционал (6).*

Литература

1. Замышляева А.А. Цыпленкова О.Н., Задача оптимального управления для уравнения соболевского типа второго порядка // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ под ред. А.И. Кожанова. Новосибирск. 2010. С. 95 – 101.

2. Замышляева, А.А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. 2011. № 37 (254), вып. 10. С. 22 – 29.

3. Замышляева А.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка // Вычислит. технол. 2003. Т. 8, № 4. С. 45 – 54.

Об осцилляционности спектра одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере

С.А. Шабров, Ф.В. Голованева
(Воронеж, ВГУ; shaspoteha@mail.ru)

Бурное развитие качественная теория дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами получила после выхода в 1999 году работы Ю. В. Покорного [1].

Это можно объяснить следующим обстоятельством: дифференциальное уравнение

$$-\left(pu'\right)' + Q'u = F' \tag{1}$$

трактуется как поточечно заданное, т.е. как обыкновенное.

Поточечная трактовка позволяет применить качественные методы анализа решения дифференциальных уравнений (типа теорем Ролля), что делает возможным получить столь важную для приложений информацию (например, количество нулей, экстремумов и пр.). Следует отметить, что изучение (1) с позиций теории обобщенных функций позволяет установить лишь слабую разрешимость (оставляем за кадром вопросы о перемежаемости нулей и пр.). Последнее вызвано тем, что (1) расценивается как равенство функционалов, определенных на D — пространстве бесконечно дифференцируемых финитных на $[0;\, l]$ функций.

С точки зрения поточечной интерпретации уравнения (позволившей для уравнения второго порядка [2], [3] построить точную параллель классической теории вплоть до осцилляционных теорем) для краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = \lambda u M'_\sigma, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(l) = u'(l) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где λ — спектральный параметр, удается доказать осцилляционность спектра. А именно, справедлива

Теорема. Спектр состоит из действительных положительных собственных значений, единственная точка сгущения которых $+\infty$, (геометрическая) кратность каждого из них равна 1. Если собственные значения занумеровать в порядке возрастания $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, и через $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ обозначить соответствующие им собственные функции, то справедливы следующие утверждения:

(а) нули $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются;

(б) нетривиальная комбинация $\sum\limits_{i=k}^{m} \alpha_i \varphi_i(x)$ имеет не более m нулей и не менее k перемен знака.

Решение краевой задачи (2) мы ищем в классе непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, первая производная $u'(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$; вторая производная $u''_{xx}(x)$ имеет конечное на $[0;\, l]$ изменение; $\left(pu''_{xx}\right)(x)$ - абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$, $\left(pu''_{xx}\right)'_x(x) - \sigma$ - абсолютно непрерывна на $[0;\, l]$.

В уравнении (2) все производные до третьего порядка включительно понимаются в обычном смысле, а производная четвертого порядка — по Радону-Никодиму [1].

На коэффициенты $p(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ мы накладываем вполне физичные условия

1. $p(x)$ имеет конечные на $[0;\, l]$ изменения;
2. $\inf\limits_{x \in [0;\, l]} p(x) > 0$;
3. $Q(x)$ - не убывает на $[0;\, l]$;
4. $M(x)$ - возрастает на $[0;\, l]$;
5. $Q(x)$ и $M(x)$ – σ-абсолютно непрерывны на $[0;\, l]$.

Переменная x в уравнении принадлежит специальному множеству $\overline{[0;\, l]_{\sigma}}$, в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S(\sigma)$ точек разрыва функции $\sigma(x)$, заменена на упорядоченную тройку собственных элементов $\{\xi - 0,\ \xi,\ \xi + 0\}$. В точках ξ уравнение понимается как равенство

$$\Delta\left(pu''_{xx}\right)'_x(\xi) + u(\xi)\,\Delta Q(\xi) = \lambda u(\xi)\,\Delta M(\xi)\,,$$

где $\Delta\psi(\xi)$ - скачок функции $\psi(\xi)$ в точке ξ.

Литература

[1] Покорный Ю.В. Стилтьеса и производная по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. РАН. – 1999. – Т. 364, 2. – С. 167 – 169.

[2] Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Успехи матем. наук. – Т. 63, вып. 1 (379). – 2008. – С. 111 – 154.

[3] Покорный Ю.В. Осцилляционный метод в спектральных задачах / Покорный Ю.В. [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 192 с.

Случаи интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле

М.В. Шамолин

(Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова; shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru)

В работе приводятся результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного четырехмерного ($4D-$) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных двумерных ($2D-$) и трехмерных ($3D-$) твердых тел, взаимодействующих со средой, когда в системе присутствует неконсервативная пара сил, заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно [1]. Получено несколько случаев интегрируемости в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии некоторой следящей силы (ср. с [1–3]). Один из фрагментов осветим в данной работе подробнее.

Пусть четырехмерное твердое тело Θ массы m с гладкой трехмерной границей $\partial\Theta$ движется в среде, заполняющей четырехмерную область евклидового пространства. При этом тензор инерции тела в некоторой связанной системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ имеет вид $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}$. Расстояние от точки N приложения неконсервативной силы $\mathbf{S}$ до точки D является функцией некоторого угла α: $DN = R(\alpha)$ (ср. с [1–3]). Сила $\mathbf{S}$ имеет величину $S = s(\alpha)\mathrm{sgn}\cos\alpha \cdot v^2,\ |\mathbf{v}_D| = v$, где s — некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [1, 2]. При этом функции R и S определим следующим образом (ср. с [1, 2]) $R = R(\alpha) = A\sin\alpha,\ S = S_v(\alpha) = Bv^2\cos\alpha;\ A, B > 0$.

Если Ω — тензор угловой скорости тела Θ, $\Omega \in \mathrm{so}(4)$, то часть уравнений движения, отвечающая алгебре $\mathrm{so}(4)$, имеет вид [2]

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega,\ \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{1}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\},\ \lambda_1 = (-I_1+I_2+I_3+I_4)/2, \ldots,\ \lambda_4 = (I_1+I_2+I_3-I_4)/2$, M — момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbf{R}^4$, спроектированный на естественные координаты в алгебре $\mathrm{so}(4)$, $[\ ]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(4)$.

Кососимметрическая матрица $\Omega \in \mathrm{so}(4)$ определяется шестью величинами $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6$ — своими компонентами в алгебре $\mathrm{so}(4)$. При этом, очевидно, выполнены следующие равенства: $\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$ для любых $i, j = 1, \ldots, 4$.

При вычислении момента внешней силы строится отображение

$$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathrm{so}(4),$$

переводящее пару векторов из $\mathbf{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры so(4) [2, 3].

Уравнение движения центра масс C тела Θ представится в виде $m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}$, где по многомерной формуле Ривальса $\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}$, $\mathbf{w}_D = \mathbf{v}_D + \Omega\mathbf{v}_D$, $E = \dot{\Omega}$, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения [1, 2].

Нам необходимо несколько расширить задачу, а именно, по прямой $Dx_1 = DC$ будет действовать следящая сила $\mathbf{T}$, введение которой используется для рассмотрения интересующих нас классов движений, в результате чего порядок динамической системы может быть понижен. В данной работе интересен такой класс движения, когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно.

Если $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N в системе $Dx_1x_2x_3x_4$, $\{-S, 0, 0, 0\}$ — координаты вектора $\mathbf{S}$, то момент силы при проектировании в алгебру so(4) имеет вид

$$\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbf{R}^6 \cong M \in \mathrm{so}(4).$$

При этом, если $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ — сферические координаты в $\mathbf{R}^4$, то $x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1$, $x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2$, $x_{4N} = R(\alpha)\sin\beta_1\sin\beta_2$.

С учетом всего можно расписать уравнение (1) в виде

$$\begin{gathered}
(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0,\\
(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0,\\
(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S,\\
(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0,\\
(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S,\\
(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S.
\end{gathered} \tag{2}$$

Очевидно, что существуют три циклических первых интеграла у уравнений (2): $\omega_1 = \omega_1^0, \omega_2 = \omega_2^0, \omega_4 = \omega_4^0$, при этом считаем, что $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0$. В результате этого оставшиеся уравнения на so(4) примут следующий вид (здесь $n_0^2 = AB/2I_2$):

$$\dot{\omega}_3 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2,$$

$$\dot{\omega}_5 = -n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2,$$

$$\dot{\omega}_6 = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1.$$

Замена угловых скоростей $z_1 = \omega_3\cos\beta_2 + \omega_5\sin\beta_2$, $z_2 = -\omega_3\sin\beta_2\cos\beta_1 + \omega_5\cos\beta_2\cos\beta_1 + \omega_6\sin\beta_1$, $z_3 = \omega_3\sin\beta_2\sin\beta_1 - \omega_5\cos\beta_2\sin\beta_1 + \omega_6\cos\beta_1$ после учета условий, понижающих порядок общей системы, позволяет рассматривать "совместные" уравнения движения на касательном расслоении $T\mathbb{S}^3$ трехмерной сферы ($\sigma = DC$)

$$\dot{v} = \sigma\cos\alpha[n_0^2v^2\sin^2\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^3)],$$

$$\begin{gathered}
\dot{\alpha} = -z_3 + \sigma n_0^2 v\sin\alpha\cos^2\alpha + \sigma\sin\alpha(z_1^2 + z_2^2 + z_3^3)/v,\\
\dot{z_3} = n_0^2v^2\sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2)\mathrm{ctg}\alpha,\ \dot{z_2} = z_2z_3\,\mathrm{ctg}\,\alpha + z_1^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta_1,\\
\dot{z_1} = z_1z_3\,\mathrm{ctg}\,\alpha - z_1z_2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta_1,\ \dot{\beta_1} = z_2\,\mathrm{ctg}\,\alpha,
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\dot{\beta_2} = -z_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha\csc\beta_1.$$

В системе седьмого порядка появилась независимая подсистема шестого порядка, в которой отделяется независимая подсистема пятого порядка (3). Для полного интегрирования необходимо знать, вообще говоря, шесть независимых первых интегралов. Однако после замен переменных и введения нового дифференцирования $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_* = z_2/z_1$, $z = n_0vZ$, $z_k = n_0vZ_k$, $k = 1, 2, 3$, $z_* = Z_*$, $n_0v\ ' \mapsto\ '$, она приводится к виду ($b = \sigma n_0, [b] = 1$)

$$v' = v\Psi(\alpha, Z, Z_3),\ \Psi(\alpha, Z, Z_3) = b\cos\alpha[\sin^2\alpha - (Z^2 + Z_3^2)],$$

$$\begin{gathered}\alpha' = -Z_3 + b\sin\alpha\cos^2\alpha + b\sin\alpha(Z^2+Z_3^2),\\ Z_3' = \sin\alpha\cos\alpha - Z^2\mathrm{ctg}\alpha - Z_3\Psi(\alpha,Z,Z_3),\ \ Z' = ZZ_3\mathrm{ctg}\alpha - Z\Psi(\alpha,Z,Z_3),\end{gathered} \tag{4}$$

$$Z_*' = Z\sqrt{1+Z_*^2}\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta_1,\ \ \beta_1' = \tfrac{ZZ_*}{\sqrt{1+Z_*^2}}\mathrm{ctg}\alpha, \tag{5}$$

$$\beta_2' = -\frac{Z_1}{\sqrt{1+Z_*^2}}\mathrm{ctg}\alpha\csc\beta_1.$$

Видно, что система пятого порядка (3) распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (4) — третьего, а система (5) (после замены независимого переменного) — второго. Поэтому для полной интегрируемости достаточно указать два независимых интеграла системы (4), один — системы (5) и два дополнительных интеграла, "привязывающих" оставшиеся уравнения. При этом заметим, что систему (4) можно рассматривать на касательном расслоении $T\mathbb{S}^2$ двумерной сферы.

Полная система седьмого порядка обладает аналитическим первым интегралом вида $v^2(1-2bZ_3\sin\alpha+(Z^2+Z_3^2)) = V_C^2$, поскольку центр масс движется прямолинейно и равномерно.

Система (4) принадлежит к классу систем, возникающих в динамике трехмерного ($3D-$) твердого тела, и обладает двумя независимыми первыми интегралами, являющимися трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (ср. с [1–3]):

$$\frac{Z^2+Z_3^2-bZ_3\sin\alpha+\sin^2\alpha}{Z\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const},\ \ G(Z,Z_3,\sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const}.$$

Система (5) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1+Z_*^2}}{\sin\beta_1} = C_3 = \mathrm{const}$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл, позволяющий определить величину β_2, имеет вид

$$\pm\frac{\cos\beta_1}{\sqrt{C_3^2-1}} = \sin\{C_3(\beta_2+C_4)\},\ \ C_4 = \mathrm{const}.$$

Литература

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд–во "Экзамен 2007. 352 с.

2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.

3. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

Метод конечных элементов для сингулярно возмущенных эллиптических краевых задач на сетках Шишкина

У.И. Шустикова
(Самара, ПГУТИ; ulana-1988@mail.ru)

Метод конечных элементов Галеркина является одним из основных универсальных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Он имеет существенные алгоритмические преимущества перед разностными методами в случае многомерных задач и областей со сложной геометрией. В случае сингулярно возмущенных задач для отыскания приближенного решения во всей области необходимо сгущение расчетной сетки в области погранслоя, т.е. применение адаптивных сеток. МКЭ на сетках Бахвалова [1] рассматривался в [2]. Однако аналогичные результаты для широко распространенных, в последнее время, сеток Шишкина [3] получены не были. Настоящая работа посвящена получению этих результатов.

Обозначения

Ω - ограниченная односвязная область в $R^2, \Gamma = \partial\Omega$ - достаточно гладкая замкнутая кривая. Пусть $\rho(z,\Gamma)$ - расстояние от z до Γ, a_ε-точка перехода от редкого разбиения к густому и соответствует точной m - границе пограничного слоя ($a_\varepsilon = 1-2/p_0\varepsilon|\ln(\varepsilon)|$). Пусть $\Omega_\pi = \{z \in \Omega : \rho(z,\Gamma) \le 1 - a_\varepsilon\}, \Omega_\Delta = \Omega \setminus \Omega_\pi$. Область Ω_Δ будем называть центральной зоной, а Ω_π - зоной пограничного слоя. Предлоложим , что параметр ε столь мал, что отрезки внутренней нормали к Γ не пересекаются в Ω_π.

Для $m \in N$ определим на отрезке $[0,1]$ кусочно-равномерную сетку узлов в соответствии с известной методикой Шишкина [3].

$$x_i = \begin{cases} a_\varepsilon \frac{i}{m}, i = 0,1,\cdots,m \\ a_\varepsilon + (1-a_\varepsilon)\frac{i-m}{k^*-m}, i = m+1, m+2,\cdots,k^* \end{cases}$$

где $k^* = m + (\frac{2}{p_0} m \ln m)$.

Построенное разбиение будем называть сеткой Шишкина .

Постановка задачи

Рассмотрим на множестве Ω задачу

$$M_\varepsilon v \equiv -\varepsilon^2 \Delta v + q(z,v) = 0, v|_\Gamma = 0, z \in \Omega \subset R^2, \tag{2.1}$$

Предполагается, что $q(x,v)$ — достаточно гладкая по совокупности аргументов функция, причем

$$|q_v(z,v)| \ge p_0^2 > 0.$$

Эта задача имеет особенности типа пограничного слоя на границе области Ω.

Численный метод решения задачи (2.1) на сетках Шишкина[3]

Определим разбиение области Ω на конечные элементы. Из каждой точки линии Γ проведем луч $\gamma_k (k = m, m+1,\cdots,2)$ в направлении внутренней нормали к Γ. На каждом из лучей отложим отрезок длины $2/p_0\varepsilon|\ln(\varepsilon)| = 1 - a_\varepsilon$ и разобьем его по методу Шишкина [3]. Разобьем контур Ω_π на дуги длины $O^*(h)$ и из точек деления проведем лучи l_j в направлении внутренней нормали к Γ. В результате область Ω_π разобьется линиями γ_k и l_j на конечные элементы ω_i, каждый из которых является криволинейным четырехугольником. Ω_Δ — триангуляциеей разобьем на конечные элементы ω_i. Будем предполагать, что разбиение Ω_Δ квазиравномерно с параметром h, т.е. $mes\omega_i = O^*(h^2), diam\omega_i = O^*(h)$. Определим пробные галеркинские пространства как

$$E = E(\varepsilon,h) = \{v \in C[-1,1] \times C[-1,1] : v(x,y) =$$

$$= a_i + b_i x + c_i y + d_i xy, x \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$
$$i,j = -2m, -2m+1,\cdots,2m; u|_\Gamma = 0\}.$$

Метод Галеркина [5] для задачи (2.1) состоит в отыскании такой функции $v_m \in E$, что для любой $w \in E$

$$\varepsilon^2(\nabla v_m, \nabla w) + (q(z,v_m), w) = 0, \tag{3.1}$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2(\Omega)$.

Существование и единственность решения галеркинской задачи в двумерном случае

Теорема 4.1. Найдутся такие числа $\varepsilon_0 > 0, h_0 > 0, \gamma_0 > 0$, $C > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], h \in (0, h_0] : \varepsilon |\ln(\varepsilon)| \leq \gamma_0 h$ существуют единственные решения $v_m(z)$ задачи (2.1), для которых справедливы оценки

$$\| v_m - v_\varepsilon \|_C \leq Ch^2,$$

где $\| \ \|_C$ — норма в $C(\Omega)$.

Алгоритм численного решения

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon^2(\nabla v_m, \nabla w) + (qv_m, w) = (f(z), w),$$
$$v|_\Gamma = 0, z \in \Omega \subset R^2 \qquad (5.1),$$

1. Базис в пространстве E (определенного в п.3), состоит из тензорного произведения B-сплайнов.
2. Разбиение сетки строится по методике Г.И. Шишкина [3] по x и по y (п.1).
3. Решение задачи (5.1) будем искать в виде

$$u_m(t) = \sum_{i=-2m}^{2m-2} \sum_{j=-2m}^{2m-2} \alpha_{i,j} N_{1,i}(x) N_{1,j}(y),$$

   где

$$N_{1,i} = \begin{cases} (x - x_i)/(x_{i+1} - x_i), x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)/(x_{i+2} - x_{i+1}), x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, x \notin [x_i, x_{i+2}] \end{cases}$$

$$N_{1,j} = \begin{cases} (y - y_j)/(y_{j+1} - y_j), y \in [y_j, y_{j+1}] \\ (y_{j+2} - y)/(y_{j+2} - y_{j+1}), y \in [y_{j+1}, y_{j+2}] \\ 0, y \notin [y_j, y_{j+2}] \end{cases}$$

   Подставляя этот вид решения в (5.1) и учитывая финитность B-сплайнов, получим СЛАУ с разреженной матрицей.

4. Найдем элементы этой матрицы методом Симпсона для двойных интегралов.
5. СЛАУ с разреженной матрицей решается методом сопряженных градиентов [4].
6. Наблюдаемую скорость сходимости определяем по формуле $V_m = log_2 \frac{\|u_m - u_{2m}\|_{C(\Omega)}}{\|u_{2m} - u_{4m}\|_{C(\Omega)}}$.

Результаты численного эксперимента

На множестве $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ рассмотрена задача

$$-\varepsilon^2 \Delta u(x, y) + u(x, y) = 1, u(x, y)|_\Gamma = 0,$$

где $\Gamma = \partial\Omega$.

Численная реализация проведена согласно алгоритму, описанному в п. 5.
Экспериментально установлена вторая наблюдаемая скорость сходимости, что согласуется с

теоремой 4.1.
Таблица значений скорости сходимости алгоритма для различных m и ε приведена ниже.

m ε	2	4	8
0,1	1,559	2,06	2,02
0,01	1,529	2,03	2,01
0,001	1,17	2,69	2,29

Литература

1. Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1969. Т.9. N4. С.841-859.

2. Стрыгин В.В.,Сирунян В.В. Метод Галеркина для сингулярно возмущенных краевых задач на адаптивных сетках // Сибирский мат. журнал. 1990. Т. 31. N 5. С. 138-148.

3. Шишкин Г.И. Разностная схема для решения эллиптического уравнения с малым параметром в области с криволинейной границей // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1978. Т.18. N 6. С.1466-1475.

4. Марчук Г.И.,Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.

Once again about plus-operators

V.A. Khatskevich
(Braude College, Israel, victor_kh@hotmail.com),
V.A. Senderov
(Moscow, Russia, senderov@mccme.ru)

The present paper generalizes and develops some of the results obtained in [1, 2]. Here the restrictive condition $0 \in \tilde{\rho}(A_{11})$ imposed in [1, 2] is not assumed to be satisfied.

The following definitions and notation coincide with those used in [1, 2].

Definition. An operator $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ is called an $\mathcal{L}$-*operator* if $\operatorname{Ker} A \subset \mathfrak{p}_-$ and $\operatorname{Im} A \subset \mathfrak{p}_+$.

Proposition 1. If A is an $\mathcal{L}$-operator, then $\operatorname{Ker} A_{11} = \{0\}$.

Proposition 2. Let A be an $\mathcal{L}$-operator. Then $\operatorname{Ker} A \in \mathfrak{M}_-$ exactly for $\operatorname{Im} A_{12} \subseteq \operatorname{Im} A_{11}$.

Theorem 3. Let $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Then $\operatorname{Im} A \subset \mathfrak{p}_+$ and $\operatorname{Ker} A \in \mathfrak{M}_-$ exactly if $\operatorname{Ker} A_{11} = \{0\}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}Z \\ WA_{11} & WA_{11}Z \end{pmatrix},$$

where $\|Z\| \leq 1$ and $\|W\| \leq 1$.

Theorem 4. Let $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, and $\operatorname{Ker} A \in \mathfrak{M}_-$. Then A is exactly a strict plus-operator if ( ) $A\mathfrak{H}_1$ is a uniform positive subspace and (b) $\operatorname{Ker} A \in \mathfrak{M}_-^0$.

Remark 5. Theorem 2 (see [2]) is a corollary of Theorem 4, but Theorem 4is still a more general statement.

References

1. Khatskevich V., Senderov V., Vestnik Voronezh Univ. Ser.: Fiz. Mat. No. 2. 2010. pp. 170–174.

2. Khatskevich V., Senderov V., IWOTA-2011 Report (Seville, July 2011).

Invariant generalized limits and their applications to noncommutative geometry

A.S. Usachev
(Sydney, UNSW; a.usachev@unsw.edu.au)

1. Generalized limits.

Let $L_\infty = L_\infty(0,\infty)$ be the Banach space of Lebesgue measurable bounded functions on $(0,\infty)$ with the uniform norm.

A normalized positive linear functional on L_∞ which equals the ordinary limit on convergent (at infinity) sequences is called a generalized limit. Define the following linear transformations on L_∞

1. Translations

$$(T_l x)(t) := x(t+l),\ l > 0;$$

2. Dilations

$$(\sigma_{\frac{1}{\beta}} x)(t) := x(\beta t),\ \beta > 0;$$

3. The Cesàro operator

$$(Hx)(t) := \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds;$$

4. The logarithmic Cesàro operator

$$(Mx)(t) := \frac{1}{\log t}\int_1^t x(s)\,\frac{ds}{s}.$$

A generalized limit ω is said to be translation invariant if

$$\omega(T_l x) = \omega(x)$$

for every $x \in L_\infty$ and any $l > 0$. Similarly we define dilation, H- and M-invariant generalized limits.

It is easy to check the for every translation invariant generalized limit ω the functional $\omega \circ \exp$ is dilation invariant generalized limit and for every H-invariant generalized limit ω the functional $\omega \circ \exp$ is M-invariant generalized limit.

The existence of translation invariant generalized limits (Banach limits) was established by S. Banach [1,Chapter 2, §3], via applying the Hanh-Banach theorem to the convex functional

$$q(x) := \inf \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x(t+n_k), \quad x \in L_\infty,$$

where infimum is taken over all $m \in \mathbb{N}$ and all non-negative real shifts $n_1, n_2, ..., n_m$.

However, the functional $q(\cdot)$ is not much convenient for practical purposes. In the present talk we introduce several sublinear functionals to describe the sets of invariant generalized limits. Armed with these descriptions we prove the results on Dixmier traces on (noncommutative) Marcinkiewicz operator space.

2. Dixmier traces.

Let $B(H)$ be an algebra of all bounded linear operators on a separable Hilbert space H equipped with the uniform norm and let Tr be the standart trace.

For every operator $T \in B(H)$ a generalized singular value function $\mu(T)$ is defined by the formula

$$\mu(t,T) = \{\|Tp\| : \mathrm{Tr}(1-p) \le t\}.$$

Consider the Banach ideal $(\mathcal{M}_{1,\infty}, \|\cdot\|_{1,\infty})$ of compact operators in $B(H)$ given by

$$\mathcal{M}_{1,\infty} := \left\{ T : \|T\|_{1,\infty} := \sup_{t>0} \frac{1}{\log(1+t)} \int_0^t \mu(s,T)ds < \infty \right\}.$$

It was proven by J. Dixmier that for arbitrary dilation invariant generalized limit ω the weight

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) := \omega\left(\frac{1}{\log(1+t)} \int_0^t \mu(s,T)ds\right), \quad 0 \le T \in \mathcal{M}_{1,\infty},$$

extends to a non-normal trace (a Dixmier trace) on $\mathcal{M}_{1,\infty}$ [2].

There are several natural subclasses of Dixmier traces useful in noncommutative geometry. Firstly, natural way to generate dilation invariant generalized limits was suggested by A. Connes [3,Section IV, 2β] by observing that for any generalised limit γ a functional $\omega := \gamma \circ M$ is dilation invariant. Finally, various important formulae of noncommutative geometry, were frequently established for yet a smaller subset $\mathcal{D}_M$, when the generalized limit ω is assumed to be M-invariant.

In this talk we prove that the class of Dixmier traces coincide with the (a priori smaller) class of traces generated by dilation and H-invariant generalized limits. We also prove that $\mathcal{D}_M$ is a proper subset of the set of all Dixmier traces.

This talk based on the joint work with F. Sukochev and D. Zanin.

References

1. Banach S. Théorie des Opérations Linéaires – Warsaw. 1932.

2. Dixmier J., Existence de traces non normales // C. R. Acad. Sci. Paris. 262. 1966. A.1107-1108.

3. Connes A. Noncommutative Geometry – Academic Press, San Diego. 1994.

Содержание