Воронежский государственный университет
Передовая инженерная школа ВГУ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2026

Материалы международной Воронежской зимней математической школы
(24–27 января 2026 г.)

Под редакцией Д. В. Костина

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2026

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
В75

Конференция поддержана Воронежским госуниверситетом и передовой инженерной школой ВГУ

Программный комитет:

А. Т. Фоменко (председатель), В. А. Костин (заместитель председателя), В. В. Ведюшкина, Ю. П. Вирченко, В. Г. Данилов, С. Ю. Доброхотов, В. А. Кибкало, В. Н. Колокольцов, Д. С. Миненков, А. Б. Муравник, Э. М. Мухамадиев, В. В. Обуховский, С. И. Пискарев, С. Г. Пятков, Н. Р. Раджабов, В. И. Ряжских, К. Б. Сабитов, А. Л. Скубачевский, А. П. Солдатов, В. Е. Фёдоров, А. И. Шафаревич, А. С. Бондарев (ученый секретарь)

Оргкомитет:

Ю. Н. Старилов (председатель), А. И. Шафаревич, В. А. Костин (сопредседатели), М. Ш. Бурлуцкая, Д. В. Костин (заместители председателя), Ю. А. Алхутов, Ю. Е. Гликлих, А. В. Звягин, В. Г. Звягин, М. И. Каменский, А. И. Кожанов, С. В. Корнев, Л. Н. Ляхов, В. П. Орлов, И. П. Половинкин, А. Ю. Савин, Е. М. Семенов, Т. Н. Фоменко, Б. Н. Хабибуллин, Э. Л. Шишкина, Р. С. Юлмухаметов

В75 **Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2026** : материалы международной Воронежской зимней математической школы (24–27 января 2026 г.) / под ред. Д. В. Костина ; Воронежский государственный университет; Передовая инженерная школа ВГУ ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2026. — 401 с.

ISBN 978-5-9273-4469-7

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН. Тематика охватывает широкий спектр проблем теорий функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, нелинейного анализа, геометрии, топологии, математического моделирования и истории математики.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-4469-7

Организаторы

Воронежский государственный университет

Передовая инженерная школа ВГУ

Московский государственный университет

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Содержание

Contents

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ЖЁСТКОГО ЛАПЛАСИАНА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Л. Акпово, А.Г. Ефимов (Воронеж, ВГУ)
akpovolaurencia@gmail.com, artem.efimov.15@mail.ru

В недавней работе А. Спивак и С. Ощепковой (см. [1]) был получен аналог теоремы о среднем для гармонических в смысле жёсткого лапласиана функций на стратифицированном множестве, связывающий интеграл гармонической функции по сфере с интегралом по шару. Хотелось бы получить аналог теоремы о среднем в форме Гаусса, выражающий значение функции в точке через её среднее по шару или сфере. Если понимать сферу в метрическом смысле, то такого аналога нет. Однако, если вместо метрической сферы рассмотреть стохастическую, то такой аналог имеется. Оказалось, что задача Дирихле для уравнения $\Delta u = 0$ на стратифицированном множестве допускает вероятностную интерпретацию. А именно, приближённое решение можно представить в виде линейной комбинации специальных дискретных броуновских процессов. Мы нашли соответствующие броуновские процессы и моделировали их на компьютере. Оказалось, что стохастическая сфера для гармонических функций является, вообще говоря, разрывной; в докладе будут представлены соответствующие графические материалы.

Литература

1. Ощепкова С.Н. Теорема о среднем и субгармонические функции на стратифицированном множестве / С.Н. Ощепкова, А.С. Спивак // Прикладная математика & Физика. — 2025. — Т. 57, № 4. — С. 266–271.

ОБРАЩЕНИЕ ДРОБНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЭЙЛЕРА И ЗАДАЧИ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Х. Алкади (Воронеж, ВГУ)
hamsaphd.hassan44@gmail.com

В работе исследуется задача без начальных условий для дробно-полиномиального уравнения Эйлера

$$L_n u(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m (\mathbb{D}^\nu)^m u = f(x), \quad x \in [0,1], \qquad (1)$$

где $\mathbb{D}^\nu$ — дробная степень порядка $\nu \in (0,1)$ оператора $\mathbb{D} = x\frac{d}{dx}$.

Задачи такого типа возникают при изучении промежуточных асимптотик по Баренблатту–Зельдовичу, важных для многих прикладных задач математической физики. Особенность рассматриваемой постановки в том, что начальные условия не заданы — классическая задача Коши здесь неприменима. Это соответствует ситуациям, когда информация о начальном состоянии системы отсутствует или неполна.

Корректная разрешимость исследуется в весовых пространствах $C_\mu[0,1]$ с нормой $\|u\|_\mu = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|u(x)|}{x^\mu}$, $\mu \geqslant 0$. Основное внимание уделяется доказательству устойчивости решения к возмущениям правой части, что необходимо для обоснования корректности по Адамару.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) правая часть $f \in C_\mu$, а характеристический полином $P_n(p) = \sum_{m=0}^n a_m p^m$ имеет различные действительные корни $\{p_k\}_{k=1}^n$. Тогда, если выполняется условие*

$$p_k < \mu^\nu \quad \text{для всех } k = 1,\dots,n, \tag{2}$$

уравнение (1) имеет единственное решение $u \in C_\mu$, которое допускает явное представление через операторную экспоненту. Для решения справедлива оценка устойчивости

$$\|u\|_\mu \leqslant M \sum_{k=1}^n \frac{\|f\|_\mu}{(\mu^\nu - p_k)|P_n'(p_k)|}. \tag{3}$$

Таким образом, установлены условия, при которых сингулярное дробно-дифференциальное уравнение Эйлера имеет единственное устойчивое решение без задания начальных условий. Результаты работы развивают теорию краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными.

Литература

1. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.

2. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — Academic Press, 1999.

3. Костин В.А. О корректной разрешимости задач без начальных условий для некоторых сингулярных уравнений / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. : Физика. Математика. — 2018. — № 1. — С. 87–93.

4. Алкади Х. О корректной разрешимости задачи Коши с нулевым условием для неоднородного обобщённого уравнения субдиффузии / Х. Алкади // Наука XXI века: открытия, инновации, технологии : материалы конф. — 2020.

5. Костин В.А. Задача без начальных условий для уравнения с дробными производными и промежуточные асимптотики / В.А. Костин, Д.В. Костин, Х. Алкади // Челябинский физико-математический журнал. — 2023. — Т. 8, № 1. — С. 18–28.

ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БИХАРИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С ТРЕМЯ РЕБРАМИ

Н.Д. Арахов (Воронеж, ВГУ)
arahovnikita@gmail.com

На трёхрёберном графе типа «звезда» рассматривается дифференциальное уравнение вида:

$$u_i'' + \lambda p_i(x) f_i(u_i) g_i(u_i') = 0,\ x \in \gamma_i,\ i = \overline{1,3}.$$

Граф задаётся следующим образом: $\Gamma = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{3} \gamma_i\right) \cup \{a\}$, где $\gamma_i = (b_i; a)$, $b_1 \neq b_2$, $b_2 \neq b_3$, $b_3 \neq b_1$, $\partial\Gamma = \{b_1; b_2; b_3\}$.

На концах рёбер b_i задаются краевые условия типа Дирихле. А в вершине a выполняются условия: $u_1(a) = u_2(a) = u_3(a)$ и

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i(a) u_i'(a) = 0,$$

где $\alpha_i(a) > 0$ – фиксированные числа. Функции $p_i(x)$, $f_i(u)$, $g_i(u')$ удовлетворяют условиям Бихари. Это означает, что для любого $i = \overline{1,3}$: 1) p_i непрерывна на γ_i и непрерывно доопределима в концах γ_i, 2) $g_i \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ - множество положительных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, неубывающих на $(-\infty; 0]$ и невозрастающих на $(0; +\infty]$, 3) определена функция

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} f_i(y)/y, \text{ если } y \neq 0 \\ f_i'(0), \text{ если } y = 0 \end{cases},$$

и она принадлежит $\mathcal{F}$, 4) f_i возрастает на $\mathbb{R}$. В условиях данной задачи были доказаны следующие утверждения.

Лемма 1.

$$\forall(\alpha > 0)\exists(\lambda^* > 0)\forall(\lambda \in (0;\lambda^*)) :$$

решение задачи

$$\begin{cases} u_i''(x) + \lambda p_i(x) f_i(u_i(x)) g_i(u_i'(x)) = 0,\ x \in \gamma_i,\ i = \overline{1,3} \\ u_1(b_1) = 0,\ u_1'(b_1) = \alpha \\ u_2(b_2) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

положительно на $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{a\}$.

С использованием теоремы 3 из [1] была доказана

Лемма 2.

$$\exists(\lambda_\star > 0)\forall(\lambda \in (0;\lambda_\star))\forall(\alpha > 0) :$$

решение задачи (1) положительно на γ_3.

Лемма 3. *Для достаточно малых* $\lambda > 0$ *решение задачи*

$$\begin{cases} u'' + \lambda \overline{pg\varphi} u = 0, x \in \Gamma \\ u(b_1) = 0,\ u'(b_1) = \alpha \\ u(b_2) = 0 \end{cases},$$

где

$$\overline{g} = \max\{g_1(0); g_2(0); g_3(0)\},$$
$$\overline{\varphi} = \max\{\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)\},$$
$$\overline{p} = \max_{i=\overline{1,3}} sup\{p_i(x) | x \in \gamma_i\},$$

существует и положительно на Γ. *И является нижней априорной оценкой для решения задачи (1) при таких* λ.

Леммы 1–3 устанавливались в соответствии с теоремами из [1].

Литература

1. Прядиев В.Л. Свойства Штурма нелинейных уравнений на сетях: дисс. ... канд. физ-мат. наук / В.Л. Прядиев. — Воронеж. : ВГУ, 1994. — 141 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ-ПУАССОНА В КАНАЛЕ НАД НЕРОВНЫМ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМСЯ ДНОМ С УЧЕТОМ ОТРАЖЕНИЯ ОТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКИ[1]

А.А. Аркушина (Москва, ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского)
a.zolotukhina19@yandex.ru

Волны на поверхности жидкости над неровным дном в поле сил тяжести Земли описываются уравнением с псевдодифференциальным оператором, который в первом приближении похож на волновой оператор. В данной работе рассматривается одномерный случай и ставится задача Коши с локализованным начальным условием и краевым условием непротекания (условие Неймана) на жесткой вертикальной стенке. В работе исследуется отражение волны от стенки и влияние дисперсии на начальное возмущение. Дисперсионные эффекты, возникающие на границе вертикальной стенки и неровного дна, порождают малые двумерные волны. Асимптотики задачи строятся в виде канонического оператора Маслова с использованием метода отражений. В окрестности головного фронта асимптотика выражается через функцию Эйри и ее производную. При использовании равномерных формул можно выразить через функцию Эйри и всю асимптотику, что при использовании современных программных пакетов значительно удобнее традиционного сшивания решений в регулярных и сингулярных картах.

Рассматриваемое уравнение с псевдодифференциальным оператором возникает из задачи на потенциальную модель течения жидкости в двумерном слое в поле сил тяжести Земли с аналогичными условиями на границах. Переход между такими задачами может быть осуществлен посредством операторного разделения переменных в случае отсутствия вертикальной стенки.

Литература

1. Dobrokhotov S.Yu. Asymptotic Expansions and the Maslov Canonical Operator in the Linear Theory of Water Waves. I. Main Constructions and Equations for Surface Gravity Waves / S.Yu. Dobrokotov, P.N. Zhevandrov. // Russian Journal of Mathematical Physics — 2003. — Vol. 10, No. 1. — pp. 1–31.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ № 24-11-00213

2. Аникин А.Ю. Равномерная асимптотика в виде функции Эйри для квазиклассических связанных состояний в одномерных и радиально-симметричных задачах / А.Ю. Аникин, С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский, А.В. Цветкова // ТМФ — 2019. —Т. 201, № 3. — С. 382—414.

3. Kopaeevskij N. D. Operator approach in linear problems of hydrodynamics / N.D. Kopaeevskij, S.G. Krein —Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, Vol. 1 Self-adjoint problems for an ideal fluid. - 2001

4. Доброхотов С.Ю. Методы Маслова в линеаризованной теории гравитационных волн на поверхности жидкости /С.Ю. Доброхотов // ДАН СССР , 1983, том 269, номер 1, с. 76–80

5. Stekloff W. Sur les problemes fondamentaux de la physique mathematique (suite et fin) /W. Stekloff // Annales scientifiques de l'e.N.S. 3e serie, tome 19 (1902), p. 455-490

6. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский — Москва: Наука, 1977

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГУ имени А.А. Кадырова)
askhabov@yandex.ru

В данной работе изучаются нелинейные уравнения, содержащие сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Гильберта специального вида

$$(Bu)(x) = -\frac{b(x)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[b(s)\cdot u(s)]'\cdot \mathrm{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds, \quad b\in C^1[-\pi,\pi],$$

который рассматривается как оператор, действующий из пространства вещественных 2π-периодических функций Лебега $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<\infty$, в сопряженное пространство $L_{p'}(-\pi,\pi)$, $p'=p/(p-1)$, с областью определения

$$D(B)=\left\{u(x):\ u\in AC[-\pi,\pi], u(\mp\pi)=0, \int\limits_{-\pi}^{\pi}|u'(x)|^{p'}dx<\infty\right\},$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект FEGS-2026-0004).

где $AC[-\pi,\pi]$ есть множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций.

Применяя методы теории тригонометрических рядов, следуя работам [1], [2], установлено, что B является симметричным, потенциальным, строго положительным и максимальным монотонным оператором. Используя эти свойства, методом максимальных монотонных по Браудеру-Минти операторов доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта, содержащих оператор B.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор суперпозиции (так называемый оператор Немыцкого). Пусть вещественнозначная функция $F(x,u)$ определена при $x \in [-\pi,\pi]$, $u \in \mathbb{R}$, имеет период 2π по x и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u почти для всех $x \in [-\pi,\pi]$. Обозначим через F оператор суперпозиции, порожденный функцией $F(x,u)$: $(Fu)(x) = F(x,u(x))$, а через $L_p^+(-\pi,\pi)$ множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\pi,\pi)$.

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 2$ и $f \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Если для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*
1) $|F(x,u)| \leqslant a(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, где $a \in L_{p'}^+(-\pi,\pi)$, $d_1 > 0$;
2) $F(x,u)$ не убывает по u;
3) $F(x,u)\cdot u \geqslant d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, где $D \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_2 > 0$,
то при любых значениях параметра $\lambda \geqslant 0$ уравнение

$$\lambda \cdot F(x,u(x)) - \frac{b(x)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[b(s)\cdot u(s)]' \cdot \operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u \in D(B)$.

Теорема 2. *Пусть $p \geqslant 2$ и $f \in D(B)$. Если для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*
4) $|F(x,u)| \leqslant g(x) + d_3 \cdot |u|^{1/(p-1)}$, где $g \in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_3 > 0$;
5) $F(x,u)$ строго возрастает по u;
6) $F(x,u)\cdot u \geqslant d_4 \cdot |u|^{p/(p-1)} - D(x)$, где $D \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_4 > 0$,
то при любых значениях параметра $\lambda \geqslant 0$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot F\left(x, -\frac{b(x)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[b(s)\cdot u(s)]' \cdot \operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds\right) = f(x)$$

имеет единственное решение $u \in D(B)$.

Аналоги теорем 1 и 2 имеют место и в случае нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши [3].

Литература

1. Асхабов С.Н. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Гильберта и монотонной нелинейностью / С.Н. Асхабов // Владикавказский матем. журнал — 2017. — Т. 19, № 3. — С. 11–20.

2. Wolfersdorf L.v. Monotonicity methods for nonlinear singular integral and integro-differential equations / L.v. Wolfersdorf // ZAMM. — 1983. — V. 63, № 6. — P. 249–259.

3. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с произвольным параметром / С.Н. Асхабов // Матем. заметки — 2018. — Т. 103, № 1. — С. 20–26.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.Б. Бабаев (Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет)
albabaev@sfedu.ru

Классический результат Р. Билса [1] позволяет утверждать, что введённые им классы псевдодифференциальных операторов замкнуты относительно операции взятия обратного оператора. Более точно, если псевдодифференциальный оператор нулевого порядка обратим в $L_2(\mathbb{R}^n)$, то его обратный оператор принадлежит тому же классу. Этот результат был перенесен на изотропные пространства Гёльдера и Гёльдера–Зигмунда в работе [2].

Настоящая работа посвящена переносу этих результатов на анизотропный случай. Интерес к анизотропным классам псевдодифференциальных операторов мотивирован, в частности, изучением таких операторов, как оператор теплопроводности $\partial/\partial x_1 - \sum_{j=2}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$, символ которого $a(\xi) = i\xi_1 + \sum_{j=2}^{n} \xi_j^2$ принадлежит изотропному классу Хёрмандера $S^2_{1,0}$, но символ его параметриксы принадлежит лишь классу с меньшим порядком гладкости. Введение анизотропных классов символов устраняет это несоответствие.

Для учёта анизотропии в пространстве $\mathbb{R}^n$ вводится вектор анизотропии $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n) \in \mathbb{Q}^n_{>0}$, удовлетворяющий условию $\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_n = n$. Например, для теплового оператора следует взять $\varkappa_1 = \frac{2n}{n+1}$ и $\varkappa_j = \frac{n}{n+1}$ для $j > 1$.

Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ его «анизотропная длина» $|x|_\varkappa$ определяется по формуле

$$|x|_\varkappa = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; x = 0, \\ t > 0, & \text{если} \;\; \sum_{i=1}^n x_i^2 t^{-2\varkappa_i} = 1. \end{cases}$$

Класс анизотропных символов $S^m_\varkappa$ порядка $m \in \mathbb{R}$ состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $a(x,\xi)$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, для которых при любых $p,q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ выполняется условие:

$$|a|^m_{p,q} := \sum_{|\alpha|\leqslant p,\, |\beta|\leqslant q} \sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\right| \left(1 + |\xi|_\varkappa\right)^{\alpha\cdot\varkappa - m} < \infty.$$

Каждому символу $a \in S^m_\varkappa$, ставится в соответствие псевдодифференциальный оператор $\mathrm{Op}(a)$, действующую на функцию $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по правилу (см. [3]):

$$\mathrm{Op}(a)u(x) = \iint a(x,\xi) e^{2\pi i (x-y)\cdot\xi} u(y)\, dy d\xi.$$

Множество всех таких операторов обозначается через $OPS^m_\varkappa$.

Для введения анизотропных пространств Гёльдера–Зигмунда используется разложение единицы Литтлвуда–Пэли, модифицированно для анизотропного случая. Для $s \in \mathbb{R}$ пространство $\Lambda^s_\varkappa(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех распределений $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, для которых норма

$$\|u\|_{\Lambda^s_\varkappa(\mathbb{R}^n)} = \sup_{j\geqslant 0} \left\|2^{js}\mathrm{Op}(\lambda_j)u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

конечна [4].

Для оператора $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим его коммутаторы с операторами умножения на координатные функции и операторами дифференцирования:

$$L_j B = [x_j, B] = x_j B - B x_j, \quad M_j B = [D_{x_j}, B] = D_{x_j} B - B D_{x_j},$$

где $D_{x_j} = (2\pi i)^{-1}\partial_{x_j}$. Для мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ положим:

$$B^{(\alpha)}_{(\beta)} = L_1^{\alpha_1} \dots L_n^{\alpha_n} M_1^{\beta_1} \dots M_n^{\beta_n} B.$$

Теорема 1. *Пусть $0 < s < \varkappa_-$. Линейное отображение $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $OPS^m_\varkappa$ тогда и только тогда, когда* *для любых мультииндексов* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ *оператор* $B^{(\alpha)}_{(\beta)}$ *продолжается до ограниченного оператора из* $\Lambda^{s+m-\alpha\cdot\varkappa}_{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ *в* $\Lambda^{s}_{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$.

Этот результат позволяет доказать теорему о замкнутости классов анизотропных псевдодифференциальных операторов относительно взятия обратного оператора:

Теорема 2. *Пусть анизотропный псевдодифференциальный оператор* $A \in OPS^m_{\varkappa}$ *обратим как оператор из* $\Lambda^s_{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ *в* $\Lambda^{s-m}_{\varkappa}(\mathbb{R}^n)$ *для некоторого* $s \in \mathbb{R}$. *Тогда обратный оператор* $A^{-1} \in OPS^{-m}_{\varkappa}$.

Литература

1. Beals R. Characterization of pseudodifferential operators and applications / R. Beals // Duke Math. J. — 1977. — Vol. 44, No. 1. — P. 45–57.

2.Кряквин В.Д. Характеризация псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера-Зигмунда / В.Д. Кряквин// Дифференциальные уравнения — 2013. — Т. 20, вып. 3. — С. 304–313.

3. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными III / Л. Хёрмандер // М. : Мир, 1987. — 694 с.

4. Triebel H. Theory of function spaces III / H. Triebel // Basel : Birkhäuser, 2006. — 426 p.

О «БОЛЬШИХ» КЛАССАХ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М.Б. Банару, Г.А. Банару (Смоленск, СмолГУ)
mihail.banaru@yahoo.com

Опубликованная в 1980 году статья выдающегося американского геометра Альфреда Грея и его испанского коллеги Луиса М. Хервеллы [1] — наверное, самая цитируемая работа в области эрмитовой геометрии. Основной результат, который представлен в названной статье, — выделение 16 классов (однако, правильнее было бы сказать, типов) почти эрмитовых структур.

Эти 16 классов Грея–Хервеллы почти эрмитовых структур исследованы очень неравномерно. Менее всего изучены так называемые «большие» классы: $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. За многообразиями класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ уже более сорока лет закрепилось название полукелеровых (semi-Kählerian, SK-) многообразий; многообразия классов $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus$

W_4 изучались обычно под названиями G_1- и G_2-многообразий, соответственно. А у многообразий класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ пока нет особого названия — потому, наверное, что эти многообразия отдельно практически не изучались.

Оказалось, что на основании характеризации классов Грея–Херведлы в терминах тензоров Кириченко [2], [3] можно получить ряд результатов о 6-мерных полукелеровых многообразиях [4], [5], а также о многообразиях классов G_1 и G_2 [6], [7]. В докладе будет проведена попытка систематизации полученных результатов в данной области эрмитовой геометрии. Также будут поставлены три задачи о «больших» классах почти эрмитовых многообразий. Эти задачи, по нашему мнению, могут быть решены в ближайшее время.

Как известно [4], почти эрмитовой структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$, состоящая из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$, которые должны быть согласованы таким условием

$$\langle JX,\ JY\rangle = \langle X,\ Y\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, определяемая равенством

$$F(X,\ Y) = \langle X,\ JY\rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура называется полукелеровой, если $\delta F = 0$ (здесь δ — оператор кодифференцирования); почти эрмитова структура принадлежит классу G_1 , если

$$\nabla_X\left(F\right)\left(X, Y\right) - \nabla_{JX}\left(F\right)\left(JX, Y\right) = 0;$$

почти эрмитова структура принадлежит классу G_2, если

$$\underset{XYZ}{\mathrm{G}}\left\{\nabla_X\left(F\right)\left(Y, Z\right) - \nabla_{JX}\left(F\right)\left(JY, Z\right)\right\} = 0;$$

почти эрмитова структура принадлежит классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, если

$$\nabla_X\left(F\right)\left(Y, Z\right) + \nabla_{JX}\left(F\right)\left(JY, Z\right) =$$

$$= -\frac{1}{n-1}\left\{\langle X, Y\rangle\,\delta F\left(Z\right) - \langle X, Z\rangle\,\delta F\left(Y\right) - \langle X, JY\rangle\,\delta F\left(JZ\right)\right\},$$

где $X, Y, Z \in \aleph(M^{2n})$ [4].

Авторами данного сообщения за последние двадцать пять лет опубликовано около 40 работ, связанных с геометрией почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий. Естественно, при этом в основном рассматривались почти эрмитовы многообразия так называемых «малых» и «средних» классов Грея–Хервеллы (см., например, [8], [9], [10], [11]). Оказалось, что многие свойства почти эрмитовых многообразий «больших» классов в какой-то мере аналогичны соответствующим свойствам их «малых» подклассов. При этом некоторые результаты, связанные с почти контактными метрическими гиперповерхностями с типовыми числами 1 или 0, а также с минимальными гиперповерхностями, хотя и получаются намного сложнее, чем, например, для гиперповерхностей приближенно келеровых или келеровых многообразий, при этом не утрачивают ясности и наглядности и сохраняют понятный геометрический смысл. Особенно это относится к теории почти эрмитовых многообразий, удовлетворяющих так называемым аксиомам [12], [13], [14], [15] почти контактных метрических гиперповерхностей.

В сообщении будет представлен краткий обзор основных результатов, полученных за последние 25 лет в области геометрии почти эрмитовых многообразий, принадлежащих «большим» классам Грея–Хервеллы. Также будут представлены новые результаты, а именно:

1) несколько условий, необходимых для того, чтобы почти контактная метрическая структура на гиперповерхности G_1-многообразия была структурой Эндо;

2) несколько условий, необходимых для того, чтобы почти контактная метрическая структура на гиперповерхности 6-мерного G_2-многообразия была квазисасакиевой.

И, наконец, формулируются три задачи, связанные с геометрией почти эрмитовых многообразий, принадлежащих «большим» классам Грея–Хервеллы:

1) какими свойствами достаточно хорошо изученных эрмитовых многообразий обладают многообразия классов G_1 и G_2, пересечением которых и является класс эрмитовых многообразий;

2) какими свойствами обладают вполне геодезические почти контактные метрические гиперповерхности многообразий, принадлежащих «большим» классам Грея–Хервеллы;

3) возможно ли обобщить результаты, связанные с так называемыми аксиомами почти контактных метрических гиперповерхно-

стей, которые были получены ранее для приближенно келеровых и квазикелеровых многообразий.

Еще раз подчеркнем, что существенные продвижения в решении поставленных задач представляются вполне реальными.

Литература

1. Gray A. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants / A. Gray , L.M. Hervella // Ann. Mat. Pura Appl. — 1980. — V. 123, N4. — P. 35–58.

2. Банару М.Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли / М.Б. Банару // Дисс. ... к.ф.-м.н. Москва. МПГУ им. В.И. Ленина. 1993.

3. Banaru M. On the Gray–Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra / M. Banaru // Annuaire de l'Université de Sofia «St. Kliment Ohridski». Faculté de Mathématiques et Informatique. — 2004. — V. 95. — P. 125–131.

4. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В.Ф. Кириченко // М.: МПГУ, 2003.

5. Banaru M.B. Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra / M.B. Banaru // J. Math. Sci., New York. — 2015. — V. 207, N3. — P. 354–388.

6. Banaru M. A note on six-dimensional G_1-submanifolds of the octave algebra / M. Banaru // Taiwanese Journal of Mathematics. — 2002. — Vol. 6, No. 3. — P. 383–388.

7. Банару М.Б. О 6-мерных G_2-подмногообразиях алгебры Кэли / М.Б Банару // Математические заметки. — 2003. — Т. 74, №3. — С. 323–328.

8. Банару М.Б. О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли / М.Б Банару // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2003. — №7. — С. 59–63.

9. Banaru M. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere / M. Banaru , G. Banaru // Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics, Informatics, Physics. — 2015. — Vol. 8, No. 2. — P. 21–28.

10. Степанова Л.В. О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий / Л.В. Степанова , Г.А. Банару , М.Б. Банару // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2016. — №1. — С. 86–89.

11. Банару М.Б. О гиперповерхностях со структурой Кириченко–Ускорева в келеровых многообразиях / М.Б. Банару , Г.А. Банару //

Сибирские электронные математические известия. — 2020. — Т. 17. — - С. 1715–1721.

12. Vanhecke L. The axiom of coholomorphic $(2p+1)$-spheres for some almost Hermitian manifolds / L. Vanhecke // Tensor (N. S.). — 1976. — V. 30. — P. 275–281.

13. Банару М.Б. Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях / М.Б. Банару// Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2014. — №3. — С. 60–62.

14. Банару Г.А. О несуществовании структуры Кенмоцу на acm-гиперповерхностях косимплектического типа келерова многообразия / Г.А. Банару // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2019. — Вып. 50. — С. 23–28.

15. Абу-Салим А. Заметка об аксиомах почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий / А. Абу-Салим , М.Б. Банару , Г.А Банару // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2024. — Вып. 55, №1. — С. 14–19.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ МЕТОДОМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина, Н.Б. Ускова
(Воронеж, ВГУ, ВГТУ)
anatbaskakov@yandex.ru, g.garkavenko@mail.ru, kostinalubov@bk.ru, nat-uskova@mail.ru

Пусть $L_2 = L_2[0,\omega]$ — гильбертово пространство измеримых на $[0,\omega]$ со значениями в $\mathbb{C}$ и суммируемых с квадратом модуля классов эквивалентности функций, а $W_2^1 = W_2^1[0,\omega]$ — пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из L_2 с производными из L_2.

Рассматриваются два дифференциальных оператора первого порядка с инволюцией:

$$(L_1x)(s) = \frac{dx}{ds} - q_0(s)x(s) - q_1(s)x(\omega - s), \tag{1}$$

$$(L_2x)(s) = i\frac{dx}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=\omega-s} - g_0(s)x(s) - g_1(s)x(\omega - s), \tag{2}$$

где $D(L_1) = D(L_2) = \{x \in W_2^1 : x(0) = x(\omega)\}$ и функции q_j, g_j, $j = 0,1$, принадлежат L_2. Подробно эти операторы исследовались в

работе [1]. При этом оператор L_2 с помощью преобразования подобия (не связанного с методом подобных операторов) приводился к оператору вида (1), но с громоздкими функциями $\widetilde{q}_0$ и $\widetilde{q}_1$, которые выражались через g_0 и g_1. После этого уже к вновь полученному оператору вида (1) применялся метод подобных операторов. Это позволяло выписывать асимптотику собственных значений, собственных векторов и спектральных проекторов исследуемых операторов (см. [1]), а также, например, одно из условий обратимости оператора L_1.

Если же оператор L_2 рассматривать не с точки зрения асимптотических оценок собственных значений, а с точки зрения его состояний обратимости $St_{inv}\,(L_2)$ (см. [2, Определение]), то его исследование существенно упрощается с помощью метода эквивалентных операторов [2], [3].

Пусть $L_0 = d/ds$, $D(L_0) = D(L_1) = D(L_2)$, $J \in \operatorname{End} L_2$ — оператор инволюции, $(Jx)(s) = x(\omega - s)$ и V — оператор умножения на некоторую функцию $v \in L_2$, $(Vx)(s) = v(s)x(s)$, $x \in L_2$. Запишем операторы L_1 и L_2 в операторной форме

$$L_1 = L_0 - Q_0 - Q_1 J, \qquad L_2 = iJL_0 - G_0 - G_1 J.$$

Учитывая, что $JL_0 = -L_0 J$, получим

$$L_2 = (L_0 - iG_0 J - iG_1)(-iJ) = L_3(-iJ), \tag{3}$$

где $L_3 = L_0 - iG_0 J - iG_1$. Применим к оператору L_2, записанному в виде (3), лемму 3 из [2].

Теорема 1. $St_{inv}\,(L_2) = St_{inv}\,(L_3)$.

Оператор L_3 имеет тот же тип, что и оператор L_1. Поэтому к нему применимы результаты из [1].

В частности, из [1, Теорема 7] вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$\sqrt{|\operatorname{Im} \widehat{g}_1(0)|} > \|v\|_2 \sqrt{\omega/2},$$

где

$$\widehat{g}_1(0) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} g_1(\tau)\, d\tau$$

и

$$v(s) = i g_0(s) \exp \int\limits_{s}^{\omega - s} i(g_1(\tau) - \widehat{g}_1(0))\, d\tau.$$

Тогда оператор L_2 обратим.

Литература

1. Криштал И.А. Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов / И.А. Криштал, Н.Б. Ускова // Сиб. электрон. матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 1091–1132.

2. Баскаков А.Г. Состояния обратимости некоторых классов операторов / А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина, Н.Б. Ускова // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2024. — № 2. — С. 27–35.

3. Баскаков А.Г. Об эквивалентных операторах / А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова, Л.Н. Костина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — Т. 235. — С. 3–14.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБРАТНЫХ МАГНИТНЫХ БИЛЛИАРДОВ В ОКРУЖНОСТИ

П.С. Белюкина (Москва, МГУ)
polina.belukina@math.msu.ru

Рассмотрим плоскую динамическую систему: на материальную точку единичной массы и заряда вне области единичного круга $\mathcal{B}$ действует постоянное магнитное поле индукции β, ортогональное к плоскости стола, а внутри $\mathcal{B}$ не действует. Частица будет двигаться равномерно по прямолинейным траекториям внутри области $\mathcal{B}$ и по дугам окружностей Лармора L вне этой области. Такая система называется **обратным магнитным биллиардом в окружности**. Она будет интегрируема в кусочно-гладком смысле, введеным А.Т. Фоменко, с первыми интегралами L — радиус окружностей Лармора, R — расстояние от центра области $\mathcal{B}$ до центров окружностей Лармора:

$$L = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{\beta}$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \beta^2 - 2\beta(xv_1 - yv_2)} & : \ (x, y) \in \mathcal{B} \\ \frac{1}{\beta}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \beta^2(x^2 + y^2) - 2\beta(xv_1 - yv_2)} & : \ (x, y) \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

Слоение Лиувилля данной системы будет следующим: при $R = 0$ и произвольном L, а также при $L + R = 1$ — одномерная сфера S^1; при любом другом фиксированном $R > 0$, $L > 0$ и $R + L > 1$ — двумерный тор T^2.

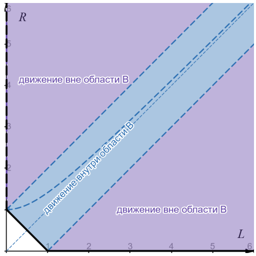


Рис. 1: Образ отображения момента обратного магнитного биллиарда. Бифуркационная диаграмма.

Если в обратном магнитном биллиарде рассматривать только траектории, которые попадают внутрь области $\mathcal{B}$, то система является биллиардом с переменным проскальзыванием, так как при отражении от границы частица не только меняет свою скорость, но и перемещается на некоторое расстояние вдоль границы. Величина дуги φ, на которую поскальзывает точка, зависит от угла α, под которым биллиардная частица ударилась в границу: $\cos\varphi = 1 - \frac{2L^2}{R^2}\sin^2\alpha$.

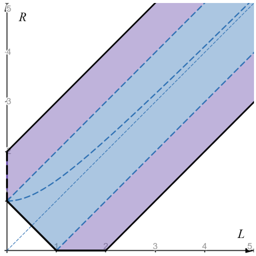


Рис. 2: Образ отображения момента обратного магнитного биллиарда, ограниченного дополнительной окружностью. Бифуркационная диаграмма.

Изоэнергетическая поверхность обратного магнитного биллиарда некомпактна, так как траектории могут проходить через любую точку плоскости. Чтобы получить компактное изоэнергетическое многообразие, ограничим обратный магнитный биллиард окружностью радиуса 2 и определим на границе этой окружности отождествление согласно биллиардному закону. Полученный биллиард будет интегрируемым в кусочно-гладком смысле с теми же первыми интегралами. Образ его отображения момента имеет вид как на рисунке 2, бифуркационной диаграммой является граница изображенной области. Изоэнергетическая поверхность такого биллиарда будет гомеоморфна трёхмерной сфере S^3.

Литература

1. Пустовойтов С.Е. Топология и классификация слоений Лиувилля интегрируемых возмущений классических и топологических биллиардов / С.Е. Пустовойтов // ИСТИНА МГУ диссертация — 2025. — С. 173–185.

2. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация / А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко // Ижевск : Удмуртский университет, 1999. - 443 с. : ил. - (Регулярная и хаотическая динамика).

3. Sean Gasiorek On the dynamics of inverse magnetic billiards / Sean Gasiorek // School of Mathematics and Statistics, Carslaw Building F07, University of Sydney, NSW 2011 Australia.

ОБ ЭКВИДИСТАНТАХ НЕКОТОРЫХ КРИВЫХ

А.А. Бортников, Л.В. Стенюхин (Воронеж, ВГУ)
stenyuhin@mail.ru, bortnikov7maath@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматриваются семейство $k_1(t,\ \lambda)$ эквидистант и эволюта $v_1(s)$ функции $r_1(t) = (x(t),\ y(t)) = (t,\ e^t)$, имеющие представление

$$k_1(t,\ \lambda) = \left(t + \lambda \cdot \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}},\ e^t - \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right),$$

$$v_1(s) = (s - 1 - e^{2s},\ 2e^s + e^{-s}).$$

Геометрическим местом точек бифуркации семейства эквидистант $k_1(t,\ \lambda)$ является кривая, описываемая множеством

$$\Gamma = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : (x,\ y) = k_1(t_1,\ \lambda(t_1,\ t_2)) \vee k_1(t_2,\ \lambda(t_1,\ t_2))\right\},$$

где $\lambda(t_1,\ t_2) < -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, причём

$$\lambda(t_1,\ t_2) = \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{e^{t_2}}{\sqrt{1+e^{2t_2}}} - \dfrac{e^{t_1}}{\sqrt{1+e^{2t_1}}}}, \tag{1}$$

а $(t_1,\ t_2)$ — решение системы

$$\begin{cases} t_1 + \lambda \cdot \dfrac{e^{t_1}}{\sqrt{1+e^{2t_1}}} = t_2 + \lambda \cdot \dfrac{e^{t_2}}{\sqrt{1+e^{2t_2}}}, \\ \\ e^{t_1} - \lambda \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t_1}}} = e^{t_2} - \lambda \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t_2}}}. \end{cases} \tag{2}$$

Утверждение 1. *Параметры t_1 и t_2 связаны зависимостью вида*

$$e^{t_1} - e^{t_2} = \frac{(t_2 - t_1)\left(\sqrt{1+e^{2t_2}} - \sqrt{1+e^{2t_1}}\right)}{e^{t_1}\sqrt{1+e^{2t_2}} - e^{t_2}\sqrt{1+e^{2t_1}}}. \tag{3}$$

Утверждение 2. *Зафиксируем $\lambda < -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Координаты любой из двух точек пересечения кривых, задаваемых выражениями* (1) *и* (3), *образуют решение $(t_1,\ t_2)$ системы* (2) *и, соответствено, определяют на эквидистанте $k_1(t)$ точку бифуркации.*

Аналогично рассмотрим семейство $k_2(t,\ \lambda)$ эквидистант и эволюту $v_2(s)$ функции $r_2(t) = (x(t),\ y(t)) = (t,\ t^2)$, имеющие представление

$$k_2(t,\ \lambda) = \left(t + \lambda \cdot \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}},\ t^2 - \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\right),$$

$$v_2(s) = (-4s^3,\ 3s^2 + \frac{1}{2}).$$

Утверждение 3. *Эквидистанта, продящая через критическую точку эволюты $v_2(s)$ с координатами $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, определяется значением параметра $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.*

При $\lambda \in \left(-\dfrac{1}{2}; -\infty\right)$ возникают точки бифуркации. Их геометрическим местом является часть оси Oy, а именно: интервал $\left(\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$.

Утверждение 4. *При $\lambda = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ эквидистанта опирается на точки пересечения параболы $r_2(t)$ и эволюты $v_2(s)$.*

Эти точки симметричны относительно оси Oy и имеют координаты $\left(-\sqrt{2},\ 2\right)$ и $\left(\sqrt{2},\ 2\right)$.

Литература

1. Бортников А.А. Об эквидистантах экспоненты / Бортников А.А., Стенюхин Л.В. // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения XXXVI : материалы Международной Воронежской весенней математической школы, посвященной памяти С. М. Никольского. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2025. – С. 81–82.

2. Лебедева Ю.А. Оценка кривизны многообразия для прохождения твёрдого тела / Лебедева Ю.А., Стенюхин Л.В. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2023. – № 2. – С. 73-82.

3. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / – М.: Мир, 1977. – 232 с. – (Серия. Математика. Новое в зарубежной науке, № 5).

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ В-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

Ю.Н. Булатов (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
y.bulatov@bk.ru

Пусть $\mathbb{R}^n{=}\{x{=}(x_1,\ldots,x_n)\}$, $\mathbb{R}^n_+{=}\{x:\ x_i>0\}$, $\overline{\mathbb{R}^n_+}{=}\{x:\ x_i{\geqslant}0\}$, $i=\overline{1,n}$, $-\gamma=(-\gamma_1,\ldots,-\gamma_n)$, $-\gamma_i\in(-1,0)$.

B-Гиперболический оператор имеет вид:

$$\square_{-\gamma}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_{B_{-\gamma}},\ \Delta_{B_{-\gamma}}=\sum_{i=1}^{n}B_{-\gamma_i},\ B_{-\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{-\gamma_i}{x_i}\ \frac{\partial}{\partial x_i},\quad(1)$$

Весовая билинейная форма в $\mathbb{R}^n_+$ задана следующим выражением:

$$(u,v)_{-\gamma}=\int_{\mathbb{R}^n_+}u(x)\ v(x)\ x^{-\gamma}dx\,,\ x^{-\gamma}dx=\prod_{i=1}^{n}x_i^{-\gamma_i}dx_i\,,\ 0{<}\gamma_i{<}1.$$

В качестве основного пространства функций рассматриваем подпространство Шварца $S_{ev}=S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$, состоящее из функций быстро убывающих вместе со всеми производными, четных по Киприянову [1, с.21] по каждой координате своего аргумента. Пространство регулярных обобщенных функций обозначается $S'_{ev,-\gamma}$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Определение 1. *Сингулярное распределение*

$$(\delta_{-\gamma}\,,\,\varphi)_{-\gamma}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\{x:\;0\leqslant|x|<\varepsilon\}}\delta_{-\gamma,\varepsilon}(x)\varphi(x)\;x^{-\gamma}dx=\varphi(0)\quad\forall\varphi(x)\in S_{ev}(\overline{\mathbb{R}_n^+}),$$

будем называть $\delta_{-\gamma}$-распределением Дирака—Киприянова, принадлежащее пространству распределений $S'_{ev,-\gamma}$.

Локально интегрируемая функция $\mathcal{E}_{n,-\gamma}(x,t)$ называется фундаментальным решением оператора $\Box_{-\gamma}$, если

$$\Box_{-\gamma}\,\mathcal{E}_{n,-\gamma}(x,t)=\delta_{-\gamma}(|x|)\,\delta(t). \tag{2}$$

Фундаментальное решение будем искать в классе радиальных функций, тогда

$$\big(\Box_{-\gamma}\mathcal{E}_{n,-\gamma}\,,\;\varphi\big)_{-\gamma}=\int_0^T\int_{\mathbb{R}_+^n}\mathcal{E}_{n,-\gamma}(|x|,t)\Box_{-\gamma}\,\varphi(|x|,t)\;x^{-\gamma}\,dx\,dt\;.$$

Произведем сферическое преобразование координат и применим формулу Киприянова—Бельтрами [2], тогда оператор (1) примет вид оператора уравнения колебаний струны с радиальной пространственной переменной

$$\Box_{-\gamma}=|S_1(n)|_{-\gamma}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2(B_\beta)_r\right),\;r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},\;\beta{=}n{-}|\gamma|{-}1,$$

где число $\beta>-1$ и $\big|S_1(n)\big|_{-\gamma}$ — площадь части взвешенной единичной сферы в $\mathbb{R}_+^n$ с центром в начале координат. Соответственно изменится равенство (2):

$$|S_1(n)|_{-\gamma}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\left(B_\beta\right)_r\right]\mathcal{E}_{n,-\gamma}(r,t)=\delta_\beta(r)\,\delta(t).$$

Особое значение приобретает индекс β оператора Бесселя, который может принять значения $A)\;-1<\beta<0,\;\;B)\;\beta{=}0,\;\;C)\;\beta{>}0$. Рассмотрим случай A), т.к. случай B) легко сводится к классической задаче, а случай C) изучен в работе [3].

Теорема 1. *Пусть $-1{<}\beta{<}0$ и $\mu=(\beta+1)/2$. Фундаментальным решением оператора (1) с особенностью в начале координат является следующее распределение из пространства $S'_{ev,-\gamma}$:*

$$\mathcal{E}_{n,-\gamma}(r,t)=\frac{1}{|S_1(n)|_{-\gamma}}\;\frac{\theta(t)}{\Gamma(\mu{+}1)\,a}\frac{2^{-2\mu}\;r^{2\mu}}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^1\frac{(1-\tau)^{\mu-1}}{\sqrt{a^2t^2-\tau\,r^2}}\,d\tau\;.$$

Автор благодарен профессору Л.Н. Ляхову за постановку решаемой в работе задачи и своевременные консультации.

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 200 с.

2. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Диффер. уравн. — 2020. — Т. 56, № 12. —С. 1610–1620.

3. Киприянов И.А. О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями и о принципе Гюйгенса / И.А. Киприянов, Ю.В. Засорин // Диффер. уравн. — 1992. — Т. 28, № 3. — С. 452–462.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИНВЕСТИЦИИ

Е.В. Булинская (Москва, МГУ)
ebulinsk@yandex.ru

Хорошо известно, что для решения задачи, возникающей в реальной жизни, необходимо прежде всего построить ее математическую модель.

Наиболее распространены в последние годы так называемые модели входа-выхода (input-output models), описываемые с помощью набора из 6 элементов $(T, Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L})$, см., например, [1 - 2]. Здесь T — это горизонт планирования, $Z = \{z(t), t \in [0, T]\}$ — входящий процесс (или поток), $Y = \{y(t), t \in [0, T]\}$ — выходящий процесс (поток), $U = \{u(t), t \in [0, T]\}$ — управление (контроль), Ψ — функционал, позволяющий найти состояние X рассматриваемой системы в момент $t \in [0, T]$ как функцию не только времени t, но также входа, выхода и управления, т.е. $X = \Psi(Z, Y, U)$. Подчеркнем, что управлять можно как входящим или выходящим процессом, так и структурой системы и способом ее функционирования, т.е. изменять функционал Ψ.

Последний элемент $\mathcal{L}$ — это мера риска или целевая функция, оценивающая качество функционирования системы. Если используется стоимостной подход, т.е. учитываются издержки, вызванные функционированием, то их необходимо минимизировать, а при выборе в качестве меры риска полученных доходов, их надо максимизировать. В том случае, когда применяется надежностный подход,

---

речь идет о поиске таких управлений, которые обеспечивают максимальную вероятность не выхода системы из строя на горизонте планирования либо максимальное время безотказной работы, см., например, [3].

Отметим также, что если оба процесса Z и Y детерминированные, то говорят, что рассматриваемая система детерминирована, если оба процесса случайны, то система стохастическая, наконец, если один из процессов детерминированный, а другой случайный, то система смешанная.

Стохастические модели возникают во многих прикладных исследованиях, таких как теория запасов и водохранилищ, теория надежности, финансы, страхование, теория очередей, динамика популяций, медицина, биология и другие.

Основное внимание в докладе будет уделено моделям страхования (хотя во многих случаях будет указано, как аналогичные модели возникают и в других приложениях).

Таким образом, в отличие от классической модели Крамера-Лундберга, которая является смешанной (входящий процесс, т.е. премии, детерминирован, а выходящий, страховые выплаты, случаен), мы будем предполагать в большинстве рассмотрений, что оба процесса являются либо обобщенными пуассоновскими процессами, либо обобщенными процессами восстановления, подробно исследованными в работе А.А.Боровкова [4].

В качестве управления (контроля) выступают инвестиции, которые поступают от акционеров изучаемой страховой компании. Различаются 3 случая: инвестиции проводятся в облигации, в акции и в оба типа активов.

Полученные утверждения относятся к выбору оптимальных инвестиций, предельному поведению капитала компании при неограниченном возрастании горизонта планирования, а также устойчивости рассматриваемой системы.

Литература

1. Булинская Е.В. Модели страхования с дискретным временем. / Е.В. Булинская // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1: Математика, Механика — 2023. — № 6, — С. 42–52.

2. Bulinskaya E.V. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences / E.V. Bulinskaya. // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2017. — V. 208, — P. 349–408.

3. Gerber H.U. On the time value of ruin. / H.U. Gerber and E.S.W. Shiu // North American Actuarial Journal. — 1998. — V. 2, № 1, P. 48–72.

4. Боровков А.А. Обобщенные процессы восстановления. / А.А. Боровков. — М. : РАН, 2020. — 455 с.

О ПРИНЦИПЕ КВАЗИИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ФДУ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ж.И. Буранов, Д.Х. Хусанов (Джизак, Джизакский политехнический институт)
juventus88.60.94@mail.ru

Развитие Н.Н. Красовским прямого метода Ляпунова в определении достаточных условий асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения автономного функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) с запаздыванием на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной [1] широко применено в решении соответствующих теоретических и прикладных задач [2]. Применение этого подхода в задаче о притяжении решений ФДУ относится к работе Дж. Хейла [2]. По аналогии с теоремой Ж. Ла-Салля [3] о притяжении решений автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) теорема Дж. Хейла определяется как принцип инвариантности решений ФДУ. Развитие теоремы Ла-Салля для неавтономных ОДУ было представлено как принцип квазиинвариантности [4, 5]. В работах [6, 7] дано развитие указанных результатов для неавтономного ФДУ запаздывающего типа.

В настоящей работе рассмотрена задача о развитии результатов из [6, 7] в направлении исследования притяжения решений неавтономной ФДУ запаздывающего типа на основе уравнений сравнения.

Пусть x есть вектор $n-$мерного действительного пространства R^n с некоторой нормой $|x|$; для некоторого числа $h > 0$ $C[\varphi]$ есть банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad f(t, 0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $f : R \times C[\varphi] \to R^n$ есть непрерывная функция; для непрерывной функции $x : (\alpha, \beta) \to R^n$, $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha \geqslant h$ символом $\dot{x}(t)$ будем обозначать правостороннюю производную; зависимость x_t определяется равенством $x_t(s) = x(t + s)$ $(t \geqslant \alpha,\ -h \leqslant s \leqslant 0)$.

Предполагается, что правая часть (1) $f = f(t,\varphi)$ удовлетворяет условиям предкомпактности ее сдвигов $F = \{f_\tau(t,\varphi) = f(\tau + t,\varphi),\ \tau \geqslant 0\}$ согласно компактно-открытой топологии в соответствующем метризуемом полном пространстве F [6, 7].

Полагается, что можно найти функционал Ляпунова $V = V(t,x,\varphi)$, $V \in C(R^2 \times C[\varphi])$, для которого непрерывная инвариантная производная [8] удовлетворяет соотношению

$$\dot V(t,x,\varphi) \leqslant U(t,V) - W(t,x,\varphi), \qquad (2)$$

где $U \in C(R^2 \to R)$, $W \in C(R^2 \times C[\varphi] \to R^+)$, функция U удовлетворяет условиям существования и единственности решений соответствующего уравнения сравнения [9] $\dot u = U(t,u)$, функция W удовлетворяет условиям, аналогичным условиям относительно $f(t,\varphi)$.

В вышеприведенных предположениях доказаны теоремы о притяжении решений, об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения уравнения (1). Полученные результаты представляют собой развитие соответствующих работ [6, 7].

Литература

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н.Н. Красовский. — М. : Физматгиз, 1959. — 211 с.

2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М. : Мир, 1984. — 421 с.

3. Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. — М. : Мир, 1980. — 300 с.

4. Artstein A. Uniform asymptotic stability via the limiting equations / A. Artstein // J. Differ. Equat. — 1978. — V. 27. — P. 172–189.

5. Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы / А.С. Андреев // Прикладная математика и механика. — 1984. — Т. 48, вып. 2. — С. 225–232.

6. Андреев А.С. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости / А.С. Андреев, Д.Х. Хусанов // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 7. — С. 876–885.

7. Хусанов Д.Х. К конструктивной и качественной теории функционально-дифференциальных уравнений / Д.Х. Хусанов. — Ташкент : Фан, 2002.

8. Ким А.В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения / А.В. Ким. — Екатеринбург: УрО РАН, 1996. — 234 с.

9. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. — М. : Наука, 1987. — 309 с.

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОБЩЕГО ВИДА[1]

В.П. Бурский (МФТИ, Москва; ИПММ, Донецк)
bvp30@mail.ru

Общая идея общей теории граничных задач, восходящая к Дж. фон Нейману, состоит в том, что граничная задача в $L_2(\Omega)$ для уравнения $Lu = f$ с общим линейным дифференциальным оператором L с гладкими коэффициентами в области понимается как задание некоторого расширения оператора, первоначально заданного на пространстве $C_0^\infty(\Omega)$. Эта идея, вовсю применяемая в теории граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, была использована М.Й. Вишиком для построения основ общей теории граничных задач для общих уравнений (без типа). Эти исследования получили продолжение в работах Л.Хермандера, Ю.М. Березанского, А.А. Дезина, автора.

В выступлении будет рассказано об основных положениях, объясняющих понятие линейной граничной задачи для общего дифференциального уравнения в частных производных, будут даны основные определения общей теории граничных задач для таких уравнений, показаны основные условия и утверждения этой теории, рассказано о некоторых приложениях и новых результатах.

Литература

1. Бурский В.П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений / В.П. Бурский. —Киев : Наукова Думка, 2002. — 315 с.

2. Бурский В.П. О граничных свойствах решений дифференциальных уравнений и общих граничных задачах / В.П. Бурский// Труды моск. матем. об-ва. — 2007. —Т. 68, —С. 185–225.

3. Бурский В.П. Некоторые новые методы исследования краевых задачах для общих дифференциальных уравнений в частных производных / В.П. Бурский// Теор. и матем. физика. — 2024. —Т. 218, № 1. —С. 48-–59.

---

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для ФГБНУ ИПММ (тема № FREM-2026-0004).

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРИТИЧЕСКИМ РОСТОМ ПРАВОЙ ЧАСТИ[1]

Д.В. Быстров (Санкт-Петербург, СПбГУ, ПОМИ РАН)
danil.bystrovv@gmail.com

Мы рассматриваем краевую задачу Неймана

$$\begin{cases} -\Delta_p u + u^{p-1} = u^{p^*-1} & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{на } \partial\Omega, \\ u > 0 & \text{в } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{S}^n_R$ — выпуклая область на n-мерной сфере радиуса R, $p \in (1, n)$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$ — оператор p-Лапласа и $p^* = \frac{np}{n-p}$ — предельный показатель вложения пространства $W^1_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* $n \geqslant 5$. *Тогда существует* $\beta > 0$, *такое, что при* $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ *задача (1) имеет решение с наименьшей энергией.*

В отличие от предыдущих результатов (см., например, [1]), на область Ω не накладываются условия гладкости.

Этот результат справедлив также для $\Omega \subset M$, где M — произвольная выпуклая поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Условия на показатель p в теореме 1 являются точными.

Теорема 2. *Пусть* $n \geqslant 2$, $\frac{n+2}{3} < p < n$ *и* $\Omega \subset \mathbb{S}^n_R$ *— полусфера. Тогда существует* $R^* > 0$ *такое, что для любого* $R > R^*$ *задача (1) не имеет решения с наименьшей энергией.*

Литература

1. Демьянов А.В. О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем / А.В. Демьянов, А.И. Назаров // Алгебра и анализ. — 2005. — Т. 17, вып. 5. — С. 105–140.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН) и Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВОДОВ[1]

Д.В. Валовик, А.А. Дюньдяева (Пенза, ПГУ)
dvalovik@mail.ru, andyundyaeva@gmail.com

Теория распространения электромагнитных волн в оптических волноводах, заполненных нелинейной средой, активно развивается многие десятилетия, за это время в этой области было получено немало результатов [1]. Вместе с тем многие интересные и важные явления по-прежнему остаются не в полной мере исследованными. К числу таких относится распространение так называемых *гибридных* TE-TE и TE-TM волн [2]. Такие волны представляют собой сумму двух одночастотных поляризованных TE или TE и TM волн, взаимодействующих в силу нелинейности среды и формирующих единую электромагнитную волну.

В данной работе представлены некоторые результаты в задаче, которые мы назовем задачей$\mathcal{P}$, о распространении монохроматической гибридной TE-TE волны в плоском волноводе толщины h, экранированном с обеих сторон и заполненным пространственно-неоднородной нелинейной средой.

Физическая постановка задачи $\mathcal{P}$ представлена в [2]. Задача $\mathcal{P}$ состоит том, чтобы определить вещественные значения спектрального параметра λ, для которых существуют дважды непрерывно дифференцируемые функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} u_1''(x) = -\big(a_1(x) - \lambda + \alpha_1 u_1^2(x) + \alpha_3 u_2^2(x)\big)u_1(x), \\ u_2''(x) = -\big(a_2(x) - \lambda + \alpha_4 u_1^2(x) + \alpha_2 u_2^2(x)\big)u_2(x), \end{cases} \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} &u_1(0) = 0, && u_2(0) = 0, \\ &u_1'(0) = A_1, && u_2'(0) = A_2, \\ &u_1(h) = 0, && u_2(h) = 0, \end{aligned}$$

при дополнительном условии

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2, \tag{2}$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-71-10036).

где $A > 0$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, α_3, α_3 — заданные вещественные постоянные, A_1, A_2 — вещественные параметры, удовлетворяющие (2), $a_1(x), a_2(x)$ — положительные непрерывные функции.

Таким образом, в сформулированной задаче надо определить λ, но также и один из параметров A_1 или A_2. Мы будем считать, что надо определить пару (λ, A_1), тогда второй параметр A_2 определится из (2) по известному A и найденному A_1.

Для исследования этой задачи будет использован так называемый нестандартный метод возмущений, развитый в работах [2], [3], [4]. Его суть заключается в том, что решения нелинейной задачи ищутся вблизи решений более простой нелинейной задачи (в данном случае это задача $\mathcal{P}$ при $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$).

Одним из достоинств построенного метода возмущений является то, что он позволяет обнаружить *нелинеаризуемые* решения задачи в том случае, если вспомогательная нелинейная задача имеет нелинеаризуемые решения. Нелинеаризуемыми мы называем такие решения нелинейной задачи, которые при стремлении коэффициента нелинейности к нулю не переходят в решения соответствующей линейной задачи. При этом если более простая нелинейная задача зависит от каких-то параметров (в данном случае это α_1 и α_2), то эти параметры обязательно должны быть малы.

В качестве вспомогательной рассмотрим задачу $\mathcal{P}'$, получающуюся из $\mathcal{P}$, если в системе (1) положить $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Получившаяся в результате этого система представляет собой два уравнения, первое из которых содержит только неизвестную функцию u_1, а второе — только функцию u_2. Несмотря на то что задача $\mathcal{P}'$ не распадается на две независимых задачи в силу общего параметра λ и дополнительного условия (2), связывающего значения первых производных искомых функций на границе $x = 0$, ее исследование в некотором смысле проще исследования задачи $\mathcal{P}$.

Задача $\mathcal{P}'$ в случае $a_1(x), a_2(x) \equiv \mathrm{const}$ исследована в работе [5], где доказано, что эта задача имеет нелинеаризуемые решения.

Численное исследование сформулированной задачи удается провести для широкого набора параметров и коэффициентов. Представленный ниже аналитический результат получен в предположении, что $a_1(x) \equiv \mathrm{const}$, а $a_2(x)$ — непрерывная монотонно неубывающая функция.

Теорема 1. *Пусть* $a_1(x) \equiv \mathrm{const} > 0$*, а* $a_2(x)$ *— непрерывная монотонно неубывающая функция и задача* $\mathcal{P}'$ *имеет* n *решений* $\left(\bar{\lambda}_k, \bar{A}_1^{(k)}\right)$*, где* $k = \overline{1, n}$*. Тогда существует постоянная* $\alpha^* > 0$ *такая,* *что для любых* $|\alpha_3| < \alpha^*$, $|\alpha_4| < \alpha^*$ *задача* $\mathcal{P}$ *имеет по крайней мере* n *решений* $\big(\hat{\lambda}_k, \hat{A}_1^{(k)}\big)$, *причем всякая пара* $\big(\hat{\lambda}_k, \hat{A}_1^{(k)}\big)$ *содержится в окрестности точки* $\big(\bar{\lambda}_k, \bar{A}_1^{(k)}\big)$ *и* $\big(\hat{\lambda}_k, \hat{A}_1^{(k)}\big) \to \big(\bar{\lambda}_k, \bar{A}_1^{(k)}\big)$ *при* $\alpha_3, \alpha_4 \to 0$.

Важно отметить следующее: среди n решений задачи $\mathcal{P}'$, о которых идет речь в теореме 1, имеются нелинеаризуемые решения, а это значит, что среди найденных (по этой теореме) решений задачи $\mathcal{P}$ также будут нелинеаризуемые решения. С физической точки зрения такие нелинеаризуемые решения отвечают новым режимам распространения электромагнитных волн в плоском волноводе.

Литература

1. Boardman A.D. Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves / A.D. Boardman , P. Egan, F. Lederer, U. Langbein, D. Mihalache. — North-Holland, Amsterdam London New York Tokyo, 1991, reprinted from Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena, Eds. H.-E. Ponath and G. I. Stegeman.

2. Martynova V. Nonclassical perturbation approach to a nonlinear multiparameter eigenvalue problem arising in electromagnetics / V. Martynova, D. Valovik // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2023. — Vol. 46. — № 1.

3. Dyundyaeva A.A. Transverse electric guided wave propagation in a plane waveguide with kerr nonlinearity and perturbed inhomogeneity in the permittivity function / A.A. Dyundyaeva, S.V. Tikhov, D.V. Valovik // Photonics. — 2023. — Vol. 10. — № 4. — P. 371.

4. Valovik D.V. Mathematical theory of transverse-magnetic guided waves in a plane waveguide filled with nonhomogeneous nonlinear medium / D.V. Valovik, S.V. Tikhov // Nonlinearity. — 2025. — Vol. 38. — № 7. — P. 75035.

5. Валовик Д. Об одной неклассической задаче на собственные значения, имеющей нелинеаризуемые решения / Д. Валовик, В. Мартынова // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59. — № 3. — С. 303.

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В МНОГОГРАННОМ КОНУСЕ[1]

В.Б. Васильев, Д.А. Токарев (Белгород, НИУ "БелГУ")
vbv57@inbox.ru, 1469493@bsuedu.ru

Зададим конус $C_3 \subset \mathbb{R}^3$ следующим неравенством

$$x_3 > \varphi(x_1, x_2),$$

где

$$\varphi(x_1,x_2) = \begin{cases} ax_1 + bx_2, & x_1 > 0, x_2 > 0, \\ -cx_1 + bx_2, & x_1 < 0, x_2 > 0, \\ -cx_1 - dx_2, & x_1 < 0, x_2 < 0, \\ ax_1 - dx_2, & x_1 > 0, x_2 < 0, \end{cases}$$

$a, b, c, d > 0$.

Под эллиптическим однородным уравнением в конусе C_3 понимается уравнение вида

$$(Au)(x) = 0, \qquad x \in C_3, \tag{1}$$

где A – это псевдодифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\cdot\xi} A(\xi)\tilde{u}(\xi)d\xi$$

с символом $A(\xi)$, который удовлетворяет условиям

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1 + |\xi|)^\alpha, \qquad c_1, c_2 > 0,$$

решение u ищется в пространстве Соболева-Слободецкого $H^s(C_3)$ [1], $\tilde{u}$ – преобразование Фурье фугкции u.

Ключевую роль в исследовании разрешимости уравнения (1) играет понятие волновой факторизации символа [1]

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) A_{=}(\xi)$$

с индексом æ $\in \mathbb{R}$, значение которого опрежеляет картину разрешимости.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-21-00688)

Введем операторы

$$P_k = \frac{1}{2}(I + S_k), \qquad Q_k = \frac{1}{2}(I - S_k), \qquad k = 1, 2,$$

где I это тождественный оператор, а S_k – одномерный сингулярный интеграл вида

$$(S_1\tilde{u})(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{i}{\pi} v.p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\eta, \xi_2, \xi_3) d\eta}{\xi_1 - \eta},$$

$$(S_2\tilde{u})(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{i}{\pi} v.p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\xi_1, \eta, \xi_3) d\eta}{\xi_2 - \eta}.$$

Введем оператор

$$(V_\varphi \tilde{u})(\xi) = (P_1 P_2 \tilde{u})(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3, \xi_3) + (Q_1 P_2 \tilde{u})(\xi_1 - c\xi_3, \xi_2 + b\xi_3, \xi_3) +$$

$$+ (Q_1 Q_2 \tilde{u})\xi_1 - c\xi_3, \xi_2 - d\xi_3, \xi_3) + (P_1 Q_2 \tilde{u})(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - d\xi_3, \xi_3),$$

для $u \in S(\mathbb{R}^3)$.

Отметим, что $(V_\varphi \tilde{u})(\xi_1, \xi_2, 0) = \tilde{u}(\xi_1, \xi_2, 0)$, и $V_\varphi^{-1} = V_{-\varphi}$, в [2] был исследован частный случай $a = c$, $b = d$.

Добавим к уравнению (1) интегральное условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2). \tag{2}$$

Тогда имеет место

Теорема. *Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относитлеьно конуса C_3 с индексом æ, таким что $æ - s = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$, тогда краевая задача (1),(2) имеет единственное решение для произвольного $f \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2)$ и это решение в образах Фурье имеет следующий вид*

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)(V_\varphi^{-1} A_{\neq}(\xi_1, \xi_2, 0)\tilde{f}(\xi_1, \xi_2)).$$

Литература

1. Vasil'ev V.B. Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Introduction to the theory of boundary value problems in

non-smooth domains / V.B. Vasil'ev. — Boston; London: Dordrecht, 2000. — 176 c.

2. Vasil'ev V.B. On certain 3-dimensional limit boundary value problems / V.B. Vasil'ev // Lobachevskii J. Math. — 2020. Vol. 41, № 5. — P. 917–925.

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КЛАССОВ БЕСОВА С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕСОВА[1]

А.А. Васильева (Москва, МГУ)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $\overline{r}_j = (r_j, \ldots, r_j) \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, \ldots, s$, $\overline{l} = (l, \ldots, l) \in \mathbb{R}^d$, $2 < q, \sigma < \infty$. Рассматривается задача об оценках колмогоровских поперечников пересечения классов Бесова с доминирующей смешанной гладкостью в пространстве Бесова $d_n(\cap_{j=1}^s SB^{\overline{r}_j}_{p_j,\theta_j}(\mathbb{T}^d), B^{\overline{l}}_{q,\sigma}(\mathbb{T}^d))$.

В [1] было показано, что $B^{\overline{r}}_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$ изоморфно пространству последовательностей со специальным образом заданной нормой. Этот изоморфизм строился с помощью разложения функций по системе всплесков; формула, его задающая, не зависела от $\overline{r}$, p и θ.

Обозначим $\overline{\alpha}_j = (\alpha_j, \ldots, \alpha_j) \in \mathbb{R}^d$, где $\alpha_j = r_j - l$. Предполагаем, что выполнены условия

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s, \quad \alpha_1 - \frac{1}{p_1} > \alpha_2 - \frac{1}{p_2} > \cdots > \alpha_s - \frac{1}{p_s}, \qquad (1)$$

$$\{j \in \overline{1, s} : \, p_j < q\} \neq \varnothing, \; \{j \in \overline{1, s} : \, p_j > 2\} \neq \varnothing, \qquad (2)$$

$$p_j \notin \{2, q\}, \; j = 1, \ldots, s, \qquad (3)$$

$$\frac{\alpha_{i_1} - \alpha_{j_1}}{1/p_{i_1} - 1/p_{j_1}} \neq \frac{\alpha_{i_2} - \alpha_{j_2}}{1/p_{i_2} - 1/p_{j_2}}, \; i_1 > j_1, \; i_2 > j_2, \; (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2). \qquad (4)$$

Обозначим

$$I = \{j \in \overline{1, s} : \, p_j > q\}, \; J = \{j \in \overline{1, s} : \, 2 < p_j < q\},$$

---

[1] Исследование поддержано Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению No 075-15-2025-345.

$$K = \{j \in \overline{1,\, s} :\ p_j < 2\}.$$

Определим числа $\lambda_{i,j}$ для $i \in I$, $j \in J \sqcup K$ и $\tilde{\lambda}_{i,j}$ для $i \in I \sqcup J$, $j \in K$ равенствами

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda_{i,j}}{p_i} + \frac{\lambda_{i,j}}{p_j}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1-\tilde{\lambda}_{i,j}}{p_i} + \frac{\tilde{\lambda}_{i,j}}{p_j}. \tag{5}$$

Числа $i_0 \in I$, $j_0 \in J \sqcup K$ (при $I \neq \varnothing$) и $i_1 \in I \sqcup J$, $j_1 \in K$ (при $K \neq \varnothing$) определяем как

$$\begin{array}{l}(i_0,\, j_0) = \mathrm{argmax}_{i\in I,\, j\in J\sqcup K}\{(1-\lambda_{i,j})\alpha_i + \lambda_{i,j}\alpha_j\},\\ (i_1,\, j_1) = \mathrm{argmax}_{i\in I\sqcup J,\, j\in K}\{(1-\tilde{\lambda}_{i,j})\alpha_i + \tilde{\lambda}_{i,j}\alpha_j\}.\end{array}$$

Определим функции $h_0,\, h_1,\, h_2 : [1,\, q/2] \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$:

$$h_0(t) = \begin{cases} t((1-\lambda_{i_0,j_0})\alpha_{i_0} + \lambda_{i_0,j_0}\alpha_{j_0}), & \text{если } I \neq \varnothing,\\ -\infty, & \text{если } I = \varnothing,\end{cases}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} t\Big((1-\tilde{\lambda}_{i_1,j_1})\alpha_{i_1} + \tilde{\lambda}_{i_1,j_1}\alpha_{j_1} - \frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2}, & \text{если } K \neq \varnothing,\\ -\infty, & \text{если } K = \varnothing,\end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} \max_{j\in J}\varphi_j(t), & \text{если } J \neq \varnothing,\\ -\infty, & \text{если } J = \varnothing,\end{cases}$$

где

$$\varphi_j(t) = t\left(\alpha_j - \frac{1}{2}\cdot\frac{1/p_j - 1/q}{1/2 - 1/q}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1/p_j - 1/q}{1/2 - 1/q}, \quad j = 1,\, \dots,\, s.$$

Положим

$$h = \max\{h_0,\, h_1,\, h_2\}.$$

Тогда h — кусочно-аффинная непрерывная функция с узлами в точках $1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{L-1} < t_L = q/2$.

Пусть строгий минимум функции h достигается в точке t_{l_*}, $1 \leqslant l_* \leqslant L-1$. Определим числа $\hat{\alpha}_i$, $\hat{p}_i$, $\hat{\theta}_i$, $i = 1,\, 2$, следующим образом:

1. если $h|_{[t_{l_*-1},\, t_{l_*}]} = \varphi_{j(l_*)}|_{[t_{l_*-1},\, t_{l_*}]}$, $j(l_*) \in J$, то $\hat{\alpha}_1 = \alpha_{j(l_*)}$, $\hat{p}_1 = p_{j(l_*)}$, $\hat{\theta}_1 = \theta_{j(l_*)}$;
2. если $l_* = 1$, $h|_{[t_0,\, t_1]} = h_1|_{[t_0,\, t_1]}$, то $\hat{\alpha}_1 = (1-\tilde{\lambda}_{i_1,j_1})\alpha_{i_1} + \tilde{\lambda}_{i_1,j_1}\alpha_{j_1}$, $\hat{p}_1 = 2$, $\frac{1}{\hat{\theta}_1} = \frac{1-\tilde{\lambda}_{i_1,j_1}}{\theta_{i_1}} + \frac{\tilde{\lambda}_{i_1,j_1}}{\theta_{j_1}}$ (см. (5));

3. если $h|_{[t_{l_*},\, t_{l_*+1}]} = \varphi_{j(l_*+1)}|_{[t_{l_*},\, t_{l_*+1}]}$, $j(l_*+1) \in J$, то $\hat{\alpha}_2 = \alpha_{j(l_*+1)}$, $\hat{p}_2 = p_{j(l_*+1)}$, $\hat{\theta}_2 = \theta_{j(l_*+1)}$;

4. если $l_* = L-1$, $h|_{[t_{L-1},\, t_L]} = h_0|_{[t_{L-1},\, t_L]}$, то $\hat{\alpha}_2 = (1-\lambda_{i_0,j_0})\alpha_{i_0} + \lambda_{i_0,j_0}\alpha_{j_0}$, $\hat{p}_2 = q$, $\frac{1}{\hat{\theta}_2} = \frac{1-\lambda_{i_0,j_0}}{\theta_{i_0}} + \frac{\lambda_{i_0,j_0}}{\theta_{j_0}}$ (см. (5));

утверждается, что возможны только такие случаи.

Положим

$$\omega'_{p,q} = \frac{1/p - 1/q}{1/2 - 1/q}, \tag{6}$$

$$\alpha_* = \frac{\hat{\alpha}_2\omega'_{\hat{p}_1,q} - \hat{\alpha}_1\omega'_{\hat{p}_2,q}}{2(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1) + \omega'_{\hat{p}_1,q} - \omega'_{\hat{p}_2,q}}, \tag{7}$$

$$\begin{gathered} A_1 = \tfrac{\hat{\alpha}_2\omega'_{\hat{p}_1,q}}{2} - \tfrac{\hat{\alpha}_1\omega'_{\hat{p}_2,q}}{2} + \\ +\Big(\Big(\hat{\alpha}_1 - \tfrac{\omega'_{\hat{p}_1,q}}{2}\Big)\Big(\tfrac{1}{\hat{\theta}_2} - \tfrac{1}{\sigma}\Big) - \Big(\hat{\alpha}_2 - \tfrac{\omega'_{\hat{p}_2,q}}{2}\Big)\Big(\tfrac{1}{\hat{\theta}_1} - \tfrac{1}{\sigma}\Big)\Big), \end{gathered} \tag{8}$$

$$A_2 = (\hat{\alpha}_2\omega'_{\hat{p}_1,q} - \hat{\alpha}_1\omega'_{\hat{p}_2,q})/\sigma, \tag{9}$$

$$B = \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1 - \frac{\omega'_{\hat{p}_2,q}}{2} + \frac{\omega'_{\hat{p}_1,q}}{2}, \tag{10}$$

$$\beta^1_* = A_1/B, \quad \beta^2_* = A_2/B. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $2 < q, \sigma < \infty$, $l \in \mathbb{R}$, $r_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j := r_j - l$, $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, \dots, s$. *Предположим, что выполнены условия (1)–(4). Пусть* $1 \leqslant l_* \leqslant L-1$, t_{l_*} *— точка строгого минимума функции* h, *числа* α_*, β^1_*, β^2_* *определены формулами (6)–(11).*

1. *Пусть* $\omega'_{\hat{p}_1,q} \geqslant \omega'_{\hat{\theta}_1,\sigma}$, $\omega'_{\hat{p}_2,q} \geqslant \omega'_{\hat{\theta}_2,\sigma}$. *Положим* $\beta_* = \beta^1_*$.

2. *Пусть* $\omega'_{\hat{p}_1,q} \leqslant \omega'_{\hat{\theta}_1,\sigma}$, $\omega'_{\hat{p}_2,q} \leqslant \omega'_{\hat{\theta}_2,\sigma}$. *Положим* $\beta_* = \beta^2_*$.

3. *Пусть* $(\omega'_{\hat{p}_1,q} - \omega'_{\hat{\theta}_1,\sigma})(\omega'_{\hat{p}_2,q} - \omega'_{\hat{\theta}_2,\sigma}) < 0$. *Определим число* $\hat{\lambda}$ *равенством* $\omega'_{\hat{p},q} = \omega'_{\hat{\theta},\sigma}$, *где* $\frac{1}{\hat{p}} = \frac{1-\hat{\lambda}}{\hat{p}_1} + \frac{\hat{\lambda}}{\hat{p}_2}$, $\frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1-\hat{\lambda}}{\hat{\theta}_1} + \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\theta}_2}$. *Положим* $\hat{\alpha} = (1-\hat{\lambda})\hat{\alpha}_1 + \hat{\lambda}\hat{\alpha}_2$. *Предположим, что* $\zeta := \hat{\alpha} - \frac{\omega'_{\hat{p},q}}{2} \neq 0$. *Обозначим* $\beta_* = \beta^1_*$ *при* $(\omega'_{\hat{p}_1,q} - \omega'_{\hat{\theta}_1,\sigma})\zeta > 0$, $\beta_* = \beta^2_*$ *при* $(\omega'_{\hat{p}_1,q} - \omega'_{\hat{\theta}_1,\sigma})\zeta < 0$.

Тогда

$$d_n(\cap_{j=1}^{s} SB^{\overline{r}_j}_{p_j,\theta_j}(\mathbb{T}^d),\, B^{\overline{l}}_{q,\sigma}(\mathbb{T}^d)) \underset{3}{\asymp} n^{-\alpha_*}(\log n)^{(d-1)\beta_*}.$$

Литература

1. Базарханов Д.Б. Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I / Д.Б. Базарханов // Труды МИАН. — 2010. — Т. 269. — С. 8–30.

СЛОЕНИЕ ЗЕЙФЕРТА ОСОБЕННОСТЕЙ БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК[1]

В.В. Ведюшкина (Москва, МГУ)
arinir@yandex.ru

Важным результатом в теории интегрируемых гамильтоновых систем оказалась открытая А.Т.Фоменко, С.В.Матвееым и другими связь между изоэнергетическими поверхностями таких систем и граф-многообразиями Вальдхаузена. Оказалось, что эти два класса трехмерных многообразий совпадают. Напомним, что многообразие Вальдхаузена есть трехмерное многообразие, которое может быть разрезано по конечному числу торов в объединение многообразий Зейферта. В свою очередь, многообразие Зейферта это такое трехмерное многообразие, которое разбивается с объединение слоев-окружностей, хорошо примыкающих друг к другу, т.е. так что у каждого слоя есть трубчатая окрестность, послойно гомеоморфная либо прямому произведению двумерного диска на окружность, либо скрученному полноторию. Скрученное полноторие получается из прямого произведения диска на окружность трансверсальным разрезом с последующей склейкой на угол $\frac{2\pi k}{n}$, где k, n – пара взаимно простых натуральных чисел, $k < n$. Пара чисел (n, k) однозначно определяет особый слой расслоения Зейферта – ось скрученного полнотория. А.Т.Фоменко было доказано, что всякая достаточно малая окрестность особого слоя невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы (т.н. 3-атом) имеет структуру расслоения Зейеферта, согласованного с лиувиллевым слоением интегрируемой гамильтоновой системы. При этом все особые слои имеют типы $(2, 1)$ в силу требования боттовости дополнительного интеграла. Таким образом, изоэнергетическая поверхность является склейкой окрестностей

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-71-10087).

особых слоев по граничным регулярным торам Лиувилля. Данную склейку удобно описать графом Риба дополнительного интеграла, снабженного информацией о типе особых слоев (в вершинах графа) и о типе склеек между ними (метки $r, \varepsilon,\ n$). Полученный инвариант в точности описывает структуру граф-многообразия Вальдхаузена.

С другой стороны, широким классом интегрируемых систем являются биллиардные книжки. Напомним, что плоский биллиард, ограниченный дугами софокусных квадрик интегрируем – звенья любой траектории лежат на прямых, касательных к некоторому эллипсу или гиперболе, с теми же фокусами, что и квадрики, образующие границу биллиардного стола. Движение по биллиардной книжке – комплексу, листы которых это плоские области, ограниченные дугами софокусных квадрик – определяется так. Снабдим корешки книжки – вдоль которых произошла склейка биллиардных листов перестановками. Тогда биллиардная частица будет менять лист книжки после удара о корешок согласно перестановке на нём.

А.Т.Фоменко сформулировал гипотезу о моделировании интегрируемыми биллиардами интегрируемых гамильтоновых систем. В частности, верно ли, что с помощью биллиардной книжки можно получить слоение её изоэнергетической поверхности, содержащей наперед заданный 3-атом, базу слоения Лиувилля (граф без меток), инвариант Фоменко-Цишанга. Первые два шага оказались верными, а третий в настоящее время является открытым вопросом.

Класс особенностей биллиардных книжек заведомо шире класса особенностей интегрируемых гамильтоновых систем. При этом интересен вопрос, имеет ли проивзольная особенность слоения Лиувилля интегрируемой биллиардной книжки структуру расслоения Зейферта (согласованную со структурой слоения Лиувилля). И если да, то как во-первых, устроена база этого слоения, а во-вторых, как устроены проекции слоев расслоения Зейферта на биллиардный стол. Более того, можно ли получить типы особых слоёв в слоении Лиувилля, отличных от $(2,1)$?

Теорема 1. *Пусть дан вырожденный 3-атом некоторой интегрируемой гамильтоновой системы, который является расслоением Зейферта с базой некоторого ориентируемого 2-атома S, критический граф K которого содержит вершины произвольной четной степени, а на ребрах отмечены точки, отвечающие особым слоям расслоения Зейферта, имеющие произвольный тип. Тогда для такой трехмерной бифуркации алгоритмически строится биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов A_0', такая* *что её слоение Лиувилля на фокальном слое описывается заданным 3-атомом.*

Слои расслоения Зейеферта для указанной биллиардной книжки устроены тривиально – достаточно рассмотреть дуги софокусных эллипсов и снабдить их подходящими векторами скорости на каждом слое Лиувилля. Однако слои расслоения Зейферта для особенностей, траектории которых могут проходить через фокусы, устроены более сложно. Более того, и сама база слоения Лиувилля принадлежит всего лишь к одной из трех серий.

Теорема 2. *Пусть биллиардная книжка, листы которой ограничены дугами софокусных квадрик, такова, что длины циклов перестановки на фокальной прямой не превосходят двух. Рассмотрим траекторию, проходящую через фокус семейства квадрик. Тогда такая траектория либо лежит на торе, либо лежит на особом слое одного из трех атомов:* X_n, Y_n *и* A^{*n}.

Последняя теорема позволяет утверждать, что инвариант Фоменко-Цишанга биллиардной книжки, ограниченной дугами софокусных квадрик, не является, вообще говоря, произвольным. Изоэнергетическая поверхность разбивается на три куска. В первом из них траектории (или их продолжения) касаются эллипсов. Он имеет глобальную структуру расслоения Зейеферта, слои которого проектируются в дуги софокусных эллипсов (т.е. все метки между седловыми атомами равны бесконечности). Второй кусок аналогичен первому, траектории касаются гипербол. И наконец третий кусок – седловой 3-атом, траектории которого либо проходят через фокусы семейства квадрик, либо нет. Во втором случае он имеет структуру расслоения Зейферта, аналогичную первому или второму куску (первому если особые траектории лежат между фокусами, и второму — иначе). Возникающие в таком инварианте Фоменко-Цишанга метки r равны либо нулю либо бесконечности. При этом в первом случае ограниченность выбора базы позволяет получить более сложную структуру расслоения Зейферта, и следовательно, более богатый набор меток в инварианте Фоменко-Цишанга.

Литература

1. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. — Ижевск. : РХД, 1999.

2. Козлов В.В. Генетическое введение в динамику систем с ударами / В.В. Козлов, Д.В. Трещёв. — М. : Изд-во МГУ, 1991.

3. Ведюшкина В.В. Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем / В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева// Матем. сб. — 2018. — Т.209, № 12. — С. 17–56.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВА ДИФФУЗИИ ДЛЯ ОДНО- И ТРЕХМЕРНЫХ СТРУКТУР

Д.С. Вельдин, С.А. Коробов, А.Д. Лавровская,
В.В. Стадник, А.В. Мартышина, И.В. Гостева
(Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ)
irinavgosteva@gmail.com

Диффузионное пространство областей цитозоля живых клеток можно отождествить со сложной системой тонких трубок, по которым движутся малые молекулы [1], [2]. Данную задачу можно решать в трехмерном пространстве, или, если предположить, что в модели концентрация постоянна в любом поперечном сечении, то можно перейти к одномерной задаче, представив структуру в виде геометрического графа [3]. Это позволит сделать численное решение менее трудоёмким.

При изменении топологии пространства диффузии решения одномерной и трехмерной задач могут не соответствовать друг другу на качественном уровне, поэтому была поставлена задача исследования влияния топологии диффузионного пространства на согласованность решений. Здесь существенными качественными характеристиками мы считаем длительность и скорость переходного процесса до момента насыщения. В модели предполагается, что молекулы являются материальными точками, отсутствуют взаимодействия между молекулами и молекул со стенками, диффузия происходит только за счет броуновского движения. В начальный момент времени молекулы диффузионном пространстве отсутствуют и попадают в в систему через торец $x = 0$ с потоком, заданным гармонической функцией времени в соответствии с биологическим смыслом задачи. Математическая постановка задачи диффузии третьего рода на

отрезке выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u_t = 0.001u_{xx} \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_x|_{x=0} = u|_{x=0} - 5 \cdot (1 + \sin(0.1 \cdot t)) \\ u_x|_{x=1} = 0 \\ x \in [0;1] \end{cases}$$

Соответствующая математическая постановка задачи диффузии третьего рода в трехмерном пространстве:

$$\begin{cases} u_t = 0.001\Delta u \\ u|_{t=0} = 0 \\ \nabla u \cdot \vec{n}|_{x=0} = u|_{x=0} - 5 \cdot (1 + \sin(0.1 \cdot t)) \\ \nabla u \cdot \vec{n}|_{x=1} = 0 \\ x \in [0;1] \end{cases}$$

На рис. 1 изображены геометрические графы (суммарная длина ребер постоянна и равна единице) и соответствующие им трехмерные структуры (объем структур одинаков), рассматриваемые в данной работе.

Для численного решения уравнения диффузии на графах мы использовали разностную схему Дюфорта—Франкела, а для численного моделирования на трехмерных структурах использовали программный продукт для решения уравнений параболического типа «Логос Тепло» (ЛОГОС-Препост 5.3.23).

Сравнение результатов моделирования для одномерных и трехмерных задач позволяет сделать следующие выводы:

— время переходного процесса уменьшается при смене графов и соответствующих им трехмерных структур в том порядке, в котором расположены эти графы на рис. 1, т.е. данная характеристика на качественном уровне ведет себя одинаково при изменении топологии пространства.

— скорость переходного процесса увеличивается при изменении графов также в порядке их расположения как для одномерных, так и для трёхмерных структур.

В результате было обнаружено, что при изменении топологии пространства диффузии для выбранных графов качественные характеристики не изменяются при переходе от трехмерной задачи к

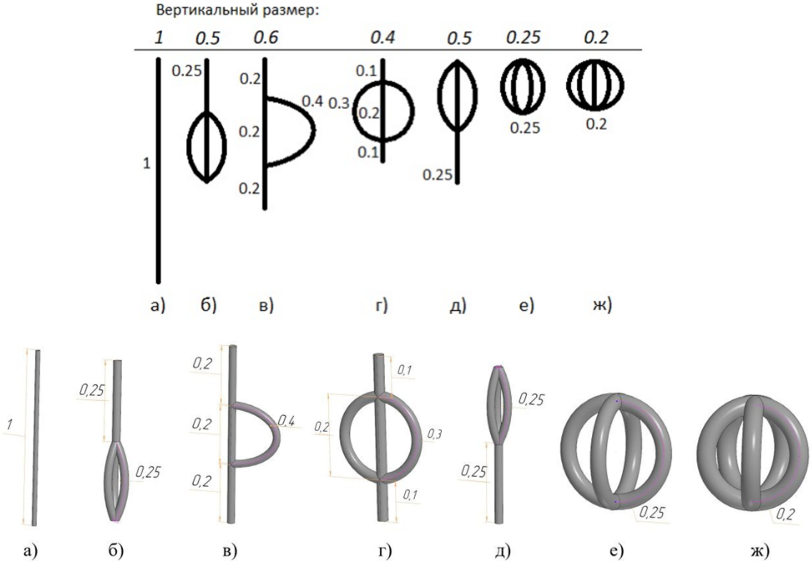


Рис. 1: Геометрические графы (вверху) и соответствующие им трехмерные структуры (внизу), выбранные для исследования в данной работе. Отметим, что графы б, д, е, ж не являются планарными, поскольку длины ребер этих графов одинаковы.

одномерной, следовательно можно решать данную задачу с помощью перехода к графовому представлению без привлечения больших вычислительных мощностей.

Литература

1. Dokukina (Гостева) I.V., Yamashev M.V., Samarina E.A., Tilinova O.M., Grachev E.A. Calcium-dependent insulin resistance in hepatocytes: mathematical model // Journal of Theoretical Biology 2021.

2. Arruda A. P., Pers B. M., Parlakgul G., G’uney E., Inouye K., Hotamisligil G. S. Chronic enrichment of hepatic endoplasmic reticulum-mitochondria contact leads to mitochondrial dysfunction in obesity // Nat. Med., 20(12):1427—1435, 2014.

3. Ошемков А. А., Попеленский Ф. Ю., Тужилин А. А., Фоменко А. Т., Шафаревич А. И. Курс наглядной геометрии и топологии. М.: ЛЕНАНД, изд. 2-е, испр., 352 с., 2016.

ОБ ОДНОЙ ЧИСЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ЛИНЕЙНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В.В. Видякин (Томск, ТГУ)
vasvidik@mail.ru

Под пространствами непрерывных функций имеем в виду пространства непрерывных функций с топологией поточечной сходимости, далее обозначаемые как $C_p(X)$, $C_p(Y)$, где X, Y - тихоновские топологические пространства. Далее повсеместно упоминается подпространство $L_p(X) =$

$$= \{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \in C_pC_p(X) : x_1, ..., x_n \in X, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\},$$

алгебраически порожденное множеством X в линейном пространстве $C_pC_p(X)$. Обозначим $\Lambda X = \{\lambda x \quad | \quad x \in X, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset C_pC_p(X)$. Если задан линейный гомеоморфизм $T : C_p(X) \to C_p(Y)$, то через $T^{\#} : L_p(Y) \to L_p(X)$ обозначается двойственное к T отображение.

Доклад фокусируется на следующих понятиях:

Определение 1. *Носителем Y в $L_p(X)$ при линейном гомеоморфизме $T : C_p(X) \to C_p(Y)$ назовем множество*

$$S = \bigcup_{y \in Y} \left\{ x_k \in X : \quad T^{\#}(y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

Определение 2. *Длиной носителя Y в $L_p(X)$ при линейном гомеоморфизме $T : C_p(X) \to C_p(Y)$ назовем натуральное число*

$$lon(Y, L_p(X), T) = \sup_{y \in Y} \left\{ n \in \mathbb{N} : \quad T^{\#}(y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

Если такого sup *не существет, то считаем $lon(Y, L_p(X), T) = \infty$.*

Очевидно, что если $I : C_p(X) \to C_p(X)$ - тождественное отображение, то $lon(X, L_p(X), I) = 1$. Вычислять величину $lon(Y, L_p(X), T)$ помогает следующее

Предложение 1. *Если $T : C_p(X) \to C_p(Y)$ - линейный гомеоморфизм, тогда*

$$lon\,(Y, L_p\,(X)\,, T) = \sup_{y \in Y} \left\{ n : \quad Tf\,(y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f\,(x_k)\,; \quad f \in C_p\,(X) \right\}$$

На примерах ([1], I.1.7, I.1.8) было показано, что длина носителя не связана напрямую с высотой пространства; кроме того, благодаря им видно, что $lon = 3$ не сохраняет такие свойства, как вес, характер, локальная комапктность, метризуемость и свойство Фреше-Урысона.

Также было показано, что l- эквивалентные пространства, построенные методом Окунева ([2], §11) имеют длину носителя, равную 3. Также из результатов Окунева следует, что многие другие свойства, например такие как экстент, коллективная нормальность и прочие, не сохраняются при $lon = 3$. Также представлены семейства l- эквивалентных пространств с различной длиной носителя при изоморфизмах пространств функций на них.

Ввиду сказанного естественно возникает проблема нахождения топологических свойств, которые сохраняются при длине носителя n, но не сохраняются при длине носителя $n + k$. Очевидно, нахождение в классе l- эквивалентных пространств с заданной длиной носителя является более «жестким» условием эквивалентности, чем просто l- эквивалентность пространств.

Длина носителя обладает следующими свойствами:

Предложение 2. *Пусть* $T : C_p(X) \to C_p(Y)$ *и* $S : C_p(Y) \to C_p(Z)$ *- линейные гомеоморфизмы;* $lon(Z, L_p(X), S \circ T) = k$, $lon(Y, L_p(X), T) = n$, $lon(Z, L_p(Y), S) = m$. *Тогда* $k \leqslant n \cdot m$.

Предложение 3. *Пусть* $T : C_p(X) \to C_p(Y)$ *- линейный гомеоморфизм. Тогда* $lon(Y, L_p(X), T) = lon(X, L_p(Y), T^{-1})$

В перспективе возможно построение некоторого аналога метрики на классе l- эквивалентных пространств, однако для этого необходимо найти признаки, позволяющие утверждать, что длина носителя n минимальна для пары фиксированных пространств, вне зависимости от построенного изоморфизма пространств функций. Началом исследования этого вопроса может служить

Теорема 1. *Пусть* X, Y *- тихоновские топологические пространства,* X *- псевдокомпактное,* $T : C_p(X) \to C_p(Y)$ *- линейный гомеоморфизм. Пусть* $T^{\#}(Y) \subset \Lambda X$. *Тогда* $X \sim Y$.

Литература

1. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. — М. : Изд-во Моск. ун-та. — 1989. — 222 с.

2. Архангельский А.В. Пространства функций и топологические инварианты / А.В. Архангельский, В.В. Ткачук. — М. : Изд-во Моск. ун-та. — 1985. — 88 с.

ПРОСТРАНСТВА СВЯЗНОСТИ

Ю.П. Вирченко (Белгород, БГТУ)
virch@bsuedu.ru

В настоящем сообщении предлагается общий поход к конструированию перколяционных моделей, которые используются при описании ролцессов просачивания газа, жидкости, электрического тока в случайн-неоднородных твердотельных средах, не ограничиваясь при этом такого рода математическими структурами, определяемыми только на бесконечных графах [1]. С математической точки зрения каждая перколяционная модель представляет собой согласованную комбинацию трех математических структур (в смысле Н.Бурбаки), определенных на классах $\mathcal{C}$ подмножеств A из некоторого фиксированного множества Ω (пространства погружения) (см. [2]), а именно, структуры связности множеств из $\mathcal{C}$, топологии на Ω и вероятностного пространства $\langle 2^{\Omega}, \mathfrak{B}, \mathsf{P} \rangle$ с пространством элементарных случайных событий Ω, являющихся всевозможными подмножествами из Ω и минимальной σ-алгеброй $\mathfrak{B}$, которая содержит класс $\mathcal{C}$.

При этом, для создания общего подхода к понятию перколяционной структуры на основе этой тройки структур, необходимо такое определение понятия связанности, в рамках которого была возможна формулировка всех перколяционных моделей, которые приведены в обзоре [2], причем это понятие должно быть определено независимо от имеющейся на Ω топологии, то есть выходило за рамки определения связанности топологических пространств [3] и, в то же время, оно должно быть согласовано с топлогией на Ω в том смысле, что базу топологии можно составить из связанных множеств. В связи с этим, мы предлагаем следующее

Определение 1. *Пусть $\mathcal{C}$ класс подмножеств из Ω, который обладает следующими свойствами:*

1. $\Omega \in \mathcal{C}$;
2. $\varnothing \notin \mathcal{C}$;
3. *Если $A \in \mathcal{C}$ и $B \in \mathcal{C}$ такие, что $A \cap B \neq \varnothing$, то $A \cup B \in \mathcal{C}$;*
4. *Если $A \in \mathcal{C}$, то существует $B \in \mathcal{C}$, $B \neq \Omega$ такое, что $A \cap B \neq \varnothing$.*

Класс $\mathcal{C}$ будем называть структурой связанности на пространстве погружения Ω, а множества A, принадлежащие этому классу, будем называть связанными. Упорядоченную же пару $\langle \Omega, \mathcal{C} \rangle$ будем называть пространством связности.

Связное множество $C \in \mathcal{C}$ назовем разложимым, если оно представимо в виде объединения пары несовпадающих связных множеств A и B, имеющих непустое пересечение. В противном случае, множество C назовем неразложимым. Свойство 3 позволяет сводить определение структуры связности на Ω к определению такого подкласса $\mathcal{C}_0$ в классе $\mathcal{C}$ связных множеств, что каждое множество C из $\mathcal{C}$ можно было представить в виде конечного объединения $C = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ множеств $A_j \in \mathcal{C}_0$, $j = 1 \div n$, для которых $A_j \cap A_{j+1} \neq \varnothing$, $j = 1 \div n-1$. Этот подкласс будем называть базой связности. Выбор этого подкласса $\mathcal{C}_0$ не однозначен и можно построить, согласно Муру-Смиту, сужающиеся направленности по включению $\langle A_n \in \mathcal{C}; n \in \mathbb{N} \rangle$, $A_{n+1} \subset A_n$ таких подклассов, которая, в общем случае, может быть бесконечной. В любом случае, каждый такой подкласс должен содержать в себе все неразложимые множества из $\mathcal{C}$. Пределы этих направленностей могут как принадлежать, так и не принадлежать классу $\mathcal{C}$. Причем эти направленности можно выбирать таким образом, что $A_n = B \cup C_n$, где $B \in \mathcal{C}$ и $C_n \in \mathcal{C}$. В частности, C может быть выбрано неразложимым множеством. Если предел C направленности $\langle C_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ не является одноэлементным, то каждый предел $\lim_{n \to \infty} A_n = B \cup C$ такой направленности состоит из неразложимого множества B и «связи» C, которая имеет с ним непустое пересечение.

Для выделенной фиксированной базы связности конечные последовательности $\langle A_n \in \mathcal{C}_0; n = 1 \div N \rangle$ такие, что $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$, $n = 1 \div N - 1$ будем называть путями в пространстве связности.

Определение 2. *Пусть D — произвольное подмножество в Ω. Это множество будем называть связным относительно структуры связности $\mathcal{C}$, если для любой пары элементов $\{x, y\} \subset D$ найдется такой путь $\langle A_n \in \mathcal{C}_0; n = 1 \div N \rangle$, для которого $x \in A_1$ и $y \in A_N$.*

Таким образом, данное определение связности произвольно выбранного подмножества D по отношению к классу $\mathcal{C}$ не предполагает наличие топологии в пространстве погружения Ω (см. [3]). Более того, в описанной схеме введения понятия связности не использовано никакого предположения о кардинальной характеристике пространства Ω.

Отметим такой частный случай пространства связности $\langle \Omega, \mathcal{C} \rangle$, для которого существует такая база связности $\mathcal{C}_0$, которая содержит предельные множества всех направленностей, составленных из подмножеств из класса $\mathcal{C}$ и все эти предельные множества неразложимы.

В этом случае пара $\langle \Omega, \mathcal{C} \rangle$ представляет собой гиперграф, у которого связями являются неразложимые множества базы $\mathcal{C}_0$.

Покажем, наконец, как описанная конструкция пространства связности может служить основой для построения перколяционных моделей.

Пусть $A \subset \Omega$ — «случайное» множество в пространстве погружения, выбираемое из некоторого класса подмножеств этого пространства. Пусть $\varphi(x, y; A)$ — бинарное отношение связанности пары элементов x и y из Ω, которое является функционалом от A. Тогда, очевидно, что $\varphi(x, x; A)$ (по определению) и $\varphi(x, y; A) = \varphi(y, x; A)$ и имеет место

Теорема 1. *Множество A представимо в виде дизъюнктивного разложения*

$$A = \bigcup_n A_n\,,$$

в котором все компоненты A_n — связанные множества.

Доказательство основано на том, что устанавливается транзитивность отношения φ. Тогда это оно является отношением эквивалентности, что позволяет разбить все элементы множества A на непересекающиеся классы эквивалентности, состоящие из связанных между собой элементов. Классы эквивалентных элементов $x \in \Omega$ представляют собой перколяционные кластеры [1], их наличие в множестве зависит от выбора этого случайного множества A. Таким образом, произвольно выбранная пара элементов из Ω может быть связанной или не связанной, в зависимости от случайного выбора A. Если имеется распределение вероятностей для такого выбора, то на его основе допустимо определение вероятности случайных событий $\{\varphi(x, y; A)\}$, $\{x, y\} \subset \Omega$.

Литература

1. Кестен Г. Теория просачивания для математиков / Г. Кестен. — М. : Мир, 1986. — 392 с.

2. Меньшиков М.В. Теория перколяции и некоторые приложения / М.В. Меньшиков, С.А. Молчанов, А.Ф. Сидоренко // Итоги науки и техники. Сер. теор. вер., мат. стат. и теор. кибер. — т.24. — М.: ВИНИТИ, 1986. — С.53-110.

3. Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. — М. : Мир, 1986. — 752 с.

ИЗ ИСТОРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. Б. Виситаева (Грозный, ФГБОУ ВО «ЧГУ
им. А. А. Кадырова»)
esm276932@gmail.com

Есть сведения, которые указывают на попытки греческих ученых построить систему геометрии еще с V столетия до н. э., но среди всех исследований античности наиболее значимым, как известно, является система геометрии, изложенная греческим математиком Евклидом под названием «Начала». «Начала» Евклида в течение двух тысячелетий были основным источником, по которому изучали геометрию, охватывают они в целом, и весь объем курса геометрии изучаемого в школе. Евклид осуществил дальнейшее развитие аксиоматического метода в геометрии, и начинает изложение геометрии с перечисления основных предложений, на которые опирается вся система науки, определений (которыми объясняется смысл приводимого текста), аксиом и постулатов (в которых устанавливаются соотношения, связывающие основные понятия геометрии и предложения, принимаемые без доказательства).

Чтобы «задать геометрию» нужно описать в ней два класса объектов: точки и прямые, а также как эти два класса взаимодействуют [3]. Рассмотрим евклидову плоскость R^2. «Точки» этой геометрии — это обычные точки плоскости, «прямые» — обычные прямые на плоскости. К примеру, два определения из «Начал» Евклида:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.

В дальнейшем в «Началах» изложены аксиомы, теоремы, каждая из которых выводится из ранее установленных предложений, другими словами сопровождается доказательством [4]. На протяжении двух тысячелетий ученые также трудились над усовершенствованием «Начал», хотя их попытки доказать V постулат или заменить его очевидным предложением были безуспешны.

Первым опубликовал в печати об открытии неевклидовой геометрии будущий профессор и ректор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792–1856 гг.). О своем открытии он сообщил 200 лет тому назад (24 февраля (по новому стилю) 1826 г.) в докладе физико-математическому факультету родного вуза. Три года спустя он начинает издавать большие работы на русском языке, посвященные своему открытию, также реферативное содержание

этих работ переводит на французский и немецкий языки [2]. Геометрия Лобачевского — геометрическая теория, основанная на тех же основных посылках, что и обычная геометрия, за исключением V постулата. Заменяется он в геометрии Лобачевского на аксиому о параллельных Лобачевского: *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.*

Через несколько лет, в 1832 году появилась в печати работа венгерского математика Яноша Бояйи, который независимо от Н. И. Лобачевского также пришел к открытию неевклидовой геометрии.

На первых порах работы творцов неевклидовой геометрии были непоняты. И только начиная с второй половины XIX столетия исследования крупнейших ученых того времени показали, что неевклидовая геометрия Лобачевского-Бояйи является системой логически столь же безупречной, как и система Евклида [2].

Отметим, что сферическая геометрия была известна задолго, до того, как Евклид систематизировал известные до его времени сведения в знаменитое наследие «Начала», только термин «неевклидовая геометрия» появился в XIX веке, после открытия, так названной самим Н. И. Лобачевским «воображаемой геометрии».

В том же XIX веке, немецкий математик Бернгард Риман (1826–1866 гг.) построил эллиптическую геометрию, в которой не существует параллельных прямых (здесь любые прямые пересекаются в одной точке), все прямые в этой системе пересекаются. В 1854 г. Б. Риман прочел свою вступительную лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» в маленьком городе Германии — Геттингене. Среди слушателей был и великий немецкий математик, учитель Б. Римана Карл Гаусс [1].

В сферической геометрии прямые (большие круги) пересекаются в двух точках. В эллиптической геометрии эти две точки противоположны друг другу и являются представителями одной и той же точки. Иначе, в двумерной геометрии Римана любые две «прямые» имеют не две, как в сферической геометрии, а только одну точку пересечения.

В этих геометрических системах выполняются первые четыре аксиомы Евклида, особо выделим из них одно сходство (две точки определяют одну прямую); несоответствия начинаются с пятого постулата евклидовой геометрии. В евклидовой геометрии, как известно, через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной (V постулат); в геометрии Лобачевского-Бояйи, таких прямых бесконечное множество. В эллиптической геометрии Римана (как и в сферической геометрии) нет параллельных прямых, все прямые пересекаются, отметим, в целом, сферическая и эллиптическая геометрии представляют собой две модели одной и той же геометрии.

В каждой из этих геометрических систем можно рассмотреть треугольники. В евклидовой геометрии, как известно из школьного курса этой геометрии, сумма углов любого треугольника равна π. В геометрии Лобачевского-Бояйи сумма углов всякого треугольника не только меньше π, но и может быть сколь угодно близкой к нулю (разница между 180° и суммой углов треугольника) ABC в геометрии её автор назвал дефектом этого треугольника. В сферической геометрии сумма углов больше π, но меньше 3π; поэтому закономерно, что в этой геометрии могут быть два или три прямых угла, могут быть два тупых угла и т. д.

Выразим площадь треугольника в плоскости Н. И. Лобачевского. Разность $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, где α, β, γ — углы треугольника, пропорциональна его площади: $S = k^2\delta$. Встречается и другая запись, в этой геометрии площадь треугольника связана с его дефектом: $S_{ABC} = k \cdot D_{ABC}$, где S и D означают площадь и дефект треугольника, а число k зависит от выбора единиц измерения площадей и углов.

В эллиптической геометрии площадь треугольника пропорциональна его дефекту: $S_{ABC} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, где α, β, γ — углы эллиптического треугольника.

Как видим, XIX век оказался судьбоносным периодом в истории развития геометрических систем, в особенности неевклидовых геометрий: гиперболической геометрии Лобачевского-Бояйи и эллиптической «римановой» геометрии.

Следует отметить, используя опыт предыдущих столетий, в XXI веке появились и другие геометрии, к примеру, вычислительная геометрия, которая активно используется в актуальном направлении современности, как использование искусственного интеллекта (artificial intelligence) в различных сферах (в быту, промышленности, науке и т. д.).

Литература

1. Стройк Д. Я. Очерк истории дифференциальной геометрии до XX века / Д. Я. Стройк // пер. с англ. М. Г. Шестопал ; под ред. Э. Кольмана. — М. — Л.: ОГИЗ, 1941. — 80 с.

2. Фетисов А. И. Очерки по евклидовой и неевклидовой геометрии. / А. И. Фетисов — М.: Просвещение, 1965. — 234 с.

3. Фоменко А. Т. Классическая дифференциальная геометрия. / А. Т. Фоменко // Лекции ученых МГУ. — М.: МГУ, 150 с.

4. Начала Евклида / Пер. с греч. и коммент. Д. Д. Мордухай-лтовского; При ред. участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. — М. — Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., Т 1. 1948, Т 2. 1949, Т 3. 1950.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ БЕГУЩИХ БЕРЕГОВЫХ ВОЛН НАД РОВНЫМ НАКЛОННЫМ ДНОМ И ИХ СВЯЗЬ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ БИЛЛИАРДОМ С ПОЛУЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ [1]

М.М. Вотякова (Москва, МГУ, ИПМех РАН, МФТИ)
Votiakova.mm@phystech.edu

Под береговыми волнами мы понимаем периодические или близкие к периодическим по времени гравитационные волны на воде в бассейне глубины $D(x) = \gamma x_1$, $x = (x_1, x_2)$, локализованные в окрестности береговой линии $\Gamma^0 = \{D(x) = 0\}$. Построены отвечающие береговым волнам асимптотические решения системы нелинейных уравнений мелкой воды в виде параметрически заданных функций, определяемых через асимптотики линеаризованной системы (см. [1,2]), которые в свою очередь связаны с асимптотическими собственными функциями оператора $\hat{L} = -\nabla g D(x) \nabla$. Область определения оператора — гладкие функции $\xi(x)$ в области $\Omega = \{x : D(x) > 0\}$ с конечной энергией: $|\xi|_{x \in \Gamma^0} < \infty$. Также обсуждается связь построенных асимптотик с классическими (почти интегрируемыми) «биллиардами с полужесткими стенками» (см. [3]).

Литература

1. Dobrokhotov, S. Y., Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently Sloping Beach / Dobrokhotov S. Y., Minenkov, D. S. , Nazaikinskii, V. E. // Russ. J. Math. Phys., 2022. — V. 29 - —P. 28-36.

2. Dobrokhotov, S. Y., Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently Sloping Beach / Dobrokhotov S. Y., Minenkov, D. S. , Votiakova, M. M. // Russ. J. Math. Phys., 2024. — V. 31(1) — P. 79-93.

---

[1] Работа поддержана грантом РНФ № 25-71-10087

3. Bolotin, S., Another billiard problem / Bolotin, S., Treschev, D. // Russ. J. Math. Phys., 2024. — V. 31(1) — P. 50-59.

ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ БИЛЛИАРДА С ПОТЕНЦИАЛОМ КУЛОНА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ КОЛЬЦЕ

Галкин С.А. (Москва, МГУ)
savva.galkin@math.msu.ru

Рассматривается биллиардная система без трения с абсолютно упругим отражением внутри кольца, образованного двумя софокусными эллипсами, под действием кулоновских потенциалов, сосредоточенных в фокусах эллипсов F_1 и F_2, с некоторыми зарядами, равными γ_1 и γ_2 соответственно. Благодаря результатам В. В. Козлова известно, что такой биллиард является интегрируемым по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Автором найдена формула дополнительного первого интеграла системы, выписаны формулы разделяющихся переменных.

Доклад посвящен исследованию топологии слоения Лиувилля этой системы для трех случаев: $\gamma_1 < 0, \gamma_2 = 0$ (случай Кеплера); $\gamma_1 > 0, \gamma_2 = 0$; $\gamma_1 = \gamma_2$. Для них описаны области возможного движения, построены бифуркационные диаграммы, вычислены инварианты Фоменко и Фоменко-Цишанга.

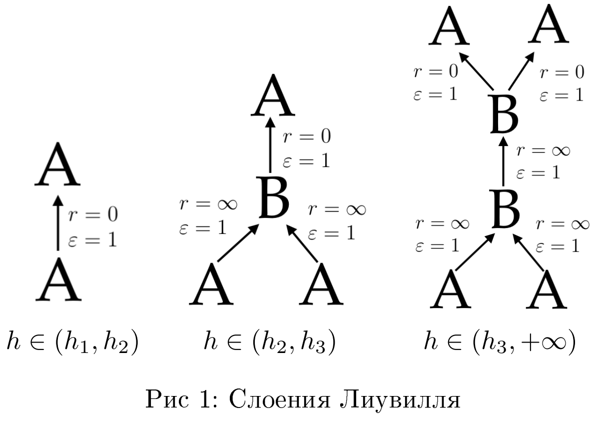


Рис 1: Слоения Лиувилля

Теорема 1. *Пусть $h > h_1$ — неособый уровень энергии биллиарда с потенциалом $V = \dfrac{\gamma_1}{r_1}$, $\gamma_1 < 0$, тогда слоение Лиувилля на изоэнергетическом подмногообразии фазового пространства Q_h^3 описывается одним из следующих инвариантов Фоменко-Цишанга.*

Для случаев $V = \dfrac{\gamma_1}{r_1}$, $\gamma_1 > 0$ и $V = \dfrac{\gamma}{r_1} + \dfrac{\gamma}{r_2}$ были доказаны аналогичные теоремы.

Литература

1. Болсинов А. В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, Классификация. Том 1 / А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко Ижевск.: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. — 448 с.

2. Козлов, В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде / В. В. Козлов // Прикладная математика и механика — 1995. — Т. 59, вып. 1 — С. 3–9.

ОЦЕНКИ НА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ЧЕРНОВСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ[1]

О.Е. Галкин, И.Д. Ремизов (Нижний Новгород, НИУ ВШЭ)

ivremizov@yandex.ru

Экспонента конечной матрицы и линейного ограниченного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве может быть задана стандартным степенным рядом для экспоненты, сходящимся в обычной норме операторов — совершенно аналогично нахождению экспоненты действительного числа. Если оператор замкнут, но неограничен, то он определён не всюду, и ряд по его степеням — весьма неудобный объект, непригодный для определения экспоненты.

Однако, разумный аналог экспоненты для неограниченного оператора существует; соответствующий объект называется сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов (сокращенное название этого объекта — C_0-полугруппа). В отличие от степенного ряда, определение C_0-полугруппы не даёт никакого метода вычисления экспоненты даже приближённо. Тем не менее, такие методы существуют, но они требуют вычисления резольвенты оператора, что часто является сложной задачей. Однако, если известна так называемая операторнозначная функция Чернова для оператора A,

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-71-30008).

то экспонента от A может быть выражена как предел произведения некоторых ограниченных операторов, построенных по функции Чернова с числом сомножителей, стремящимся к бесконечности. Теорема Чернова представляет собой бесконечномерный вариант теоремы о «втором замечательном пределе» из курса элементарного анализа.

Докладчикам удалось доказать приблизительно следующее: если функция Чернова имеет тот же полином Тейлора порядка k, что и полугруппа, и мало отклоняется от её полинома Тейлора, то черновские приближения полугруппы, построенные по этой функции Чернова, имеют скорость сходимости не хуже, чем $1/n^k$, где n — номер приближения. Отметим, что даже одномерный аналог этого результата нетривиален — когда экспонента вычисляется не от оператора, а от действительного числа.

В докладе будет представлено элементарное введение в тему, рассмотрены приложения и сформулирована теорема об оценках скорости сходимости приближений Чернова, которая была анонсирована в [1] и опубликована с полным доказательством в [2].

Литература

1. Галкин О.Е., Ремизов И.Д. Скорость сходимости черновских аппроксимаций операторных C_0-полугрупп / О.Е. Галкин, И.Д. Ремизов // Матем. заметки — 2022. — Т. 111, № 2. — С. 297-299

2. Galkin O.E., Remizov I.D. Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators. / O.E. Galkin, I.D. Remizov //Israel Journal of Mathematics — 2025. — Т. 265, № 2. — С. 929-943

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СМО СО СКАЧКООБРАЗНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Н.И. Головко, О.В. Бондрова
(Владивосток, ВФРТА, ДВФУ)
golovko.ni.2024@yandex.ru, bondrova.ov@dvfu.ru

В настоящей работе рассматривается система массового обслуживания (СМО) с одним прибором, бесконечным накопителем и экспоненциальным обслуживанием с параметром μ. На вход СМО поступает входной поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ является скачкообразным процессом, изменяющимся на отрезке $[a, b]$ с

интервалами постоянства T, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α. Предполагаем, что выполняется условие отсутствия перегрузок $b < \mu$.

Интенсивность $\lambda(t)$ имеет в точках разрыва t_0 справа условную плотность распределения $\varphi(x \,|\, y) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx \,|\, \lambda(t_0 - 0) = y\}/dx, x \in [a; b]$. В настоящей работе приводится анализ характеристик рассматриваемой СМО в случае, когда значения процесса $\lambda(t)$ в точках разрыва t_0 слева и справа — независимы, т.е. выполняется $\varphi(x \,|\, y) \equiv \varphi(x) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx\}/dx$.

Обозначим интенсивность входного потока в нестационарном режиме через $\lambda(t)$, в стационарном через $\hat{\lambda}$, $Q_k(t, x)dx = \mathsf{P}\{\nu(t) = k, x \leqslant \lambda(t) < x + dx\}$, где $\nu(t)$ — число заявок в СМО в момент t, $q_k(x)dx = \mathsf{P}\{\hat{\nu} = k, x \leqslant \hat{\lambda} < x + dx\}$, где $\hat{\nu}$ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $f(x)dx = \mathsf{P}\{x \leqslant \hat{\lambda} < x + dx\}$, $f(x)$ — стационарная плотности интенсивности входного потока, $x \in [a, b]$.

Интегралы $\int_a^b Q_k(t, x)dx = P_k(t)$, $\int_a^b q_k(x)dx = p_k$, $k \geqslant 0$, представляют собой нестационарное и стационарное распределение числа заявок соответственно. Введем производящую функцию $\mathrm{R}(t, x, z) = \sum\limits_{k \geqslant 0} z^k \mathrm{Q}_k(t, x), z \in \mathbb{C}$.

В [1] показано, что производящая функция $\mathrm{R}(t, x, z)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\mathrm{R}(t, x, z)(xz^2 - (x + \mu + \alpha)z + \mu) + \alpha z \varphi(x) \int\limits_a^b \mathrm{R}(t, y, z)\, dy =$$

$$= z\mathrm{R}'_t(t, x, z) + (1 - z)\mu \mathrm{Q}_0(t, x), \tag{1}$$

с заданными начальными условиями

$$\mathrm{R}(0, x, z) = \sum_{k \geqslant 0} z^k \mathrm{Q}_k(0, x),\ z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

В работе разработан численный метод решения задачи Коши (1)–(2), который заключается в применении метода Эйлера и формул Лорана для вычисления $Q_k(t, x), 1 \leqslant k \leqslant n_0$, на каждом шаге метода Эйлера. Разработанный метод назван методом Эйлера — Лорана для численного анализа рассмотренной СМО.

С помощью метода Эйлера — Лорана проведен численный анализ и вычислены характеристики $Q_k(t, x), q_k(x), 1 \leqslant k \leqslant n_0$. Характеристики $q_k(x)$ получены в результате стабилизации характеристик

$Q_k(t, x)$. В работе [2] показано существование и единственность стационарного режима СМО по числу заявок и что для случайного процесса $\lambda(t)$ существует стационарный режим, причем $f(x) = \varphi(x)$.

Проведен численный анализ вероятностных характеристик числа заявок с целью наблюдения за установлением стационарного режима в зависимости от значений входных параметров СМО, обоснования наблюдаемых свойств стационарных характеристик.

На рис. 1–4 показаны примеры численного анализа.

Литература

1. Бондрова О.В. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока / *Бондрова О.В., Крылова Д.С., Головко Н.И., Жук Т.А.* // Воронеж: — Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика . 2015. № 4. С. 89-100.

2. Головко Н.И. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / *Головко Н.И., Каретник В.О., Танин В.Е., Сафонюк И.И.* // Сиб. журн. индустр. мат. 2008. Т. XI. № 2(34). С. 50-64.

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЗАВЕРШЕННОЙ РАБОТЫ В СМО С ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Н.И. Головко, Е.С. Фролова
(Владивосток, ВФРТА, МГУ им. адм. Г.И. Невельского)
golovko.ni.2024@yandex.ru, eu.frolova@yandex.ru

Рассматривается система массового обслуживания (СМО) с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором. Время обслуживания заявок η является случайной величиной с функцией распределения $B(\tau)$. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$ и коэффициентом диффузии $b > 0$. Случайный процесс $\lambda(t)$ принимает значения на промежутке $[\alpha, \beta]$ с упругими границами.

Обозначим через $\lambda(t)$ интенсивность входного потока в нестационарном режиме, через $\hat{\lambda}$ – в стационарном, через $f(x)dx = \mathsf{P}\{x \leqslant \hat{\lambda} < x + dx\}$ – плотность распределения случайной величины $\hat{\lambda}$, т.е. стационарной интенсивности входного потока, $x \in [\alpha, \beta]$.

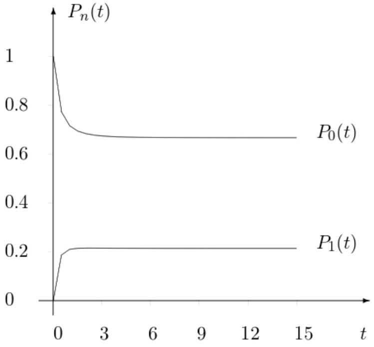


Рис. 1. *Зависимость* $P_0(t)$ *от* t

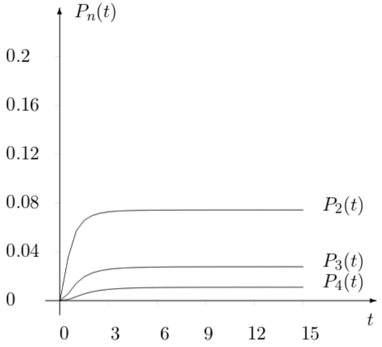


Рис. 2. *Зависимость* $P_n(t)$ *от* t

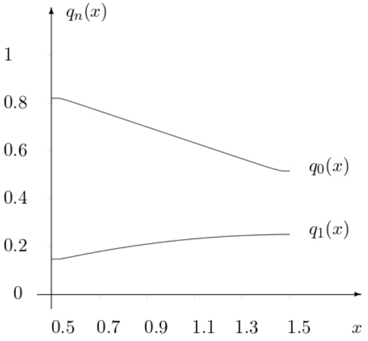


Рис. 3. *Зависимость* $q_n(x)$ *от* x

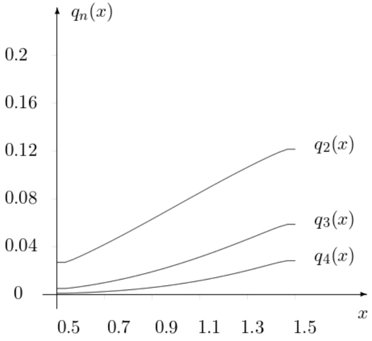


Рис. 4. *Зависимость* $q_n(x)$ *от* x

В работе показано, что для случайного процесса $\lambda(t)$ существует стационарный режим, причем $f(x) = 1/(\beta - \alpha)$.

Аналогичным образом введем обозначения $q_k(x)dx = \mathsf{P}\{\hat{\nu} = k, x \leqslant \hat{\lambda} < x + dx\}$, где $\hat{\nu}$ – число заявок в СМО в стационарном режиме. Функции $q_k(x), k \geqslant 0$, представляют собой стационарные характеристики числа заявок, $x \in [\alpha, \beta]$.

В момент времени t незавершенная работа $U(t)$ представляет собой время, необходимое СМО для освобождения от всех заявок. В момент прихода заявки незавершенная работа равна времени ожидания заявки начала обслуживания.

Обозначим через $\mathbf{h}(\omega, x)$ – совместное стационарное распределение незавершенной работы $\hat{U}$ и интенсивности входного потока $\hat{\lambda}$ в стационарном режиме, причем $\mathbf{h}(\omega, x)$ по ω есть функция распределения случайной величины $\hat{U}$, по x – плотность распределения случайной величины $\hat{\lambda}$:

$$\mathbf{h}(\omega, x) = \mathsf{P}\{\hat{U} \leqslant \omega, x \leqslant \hat{\lambda} < x + dx\}/dx,$$

В [1] получены уравнения относительно $\mathbf{h}(\omega, x)$:

1) интегро-дифференциальное уравнение:

$$-x\mathbf{h}(\omega, x) + x\int_0^\omega B(\omega - s)\frac{\partial \mathbf{h}(s, x)}{\partial s}ds + \frac{\partial \mathbf{h}(\omega, x)}{\partial \omega} +$$

$$+\frac{b}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{h}(\omega, x)}{\partial x^2} = 0, \omega > 0, x \in (\alpha, \beta), \qquad (1)$$

2) одностороннее краевое условие по ω :

$$\mathbf{h}(0^+, x) = q_0(x), \qquad (2)$$

3) краевые условия по x:

$$\mathbf{h}'_x(\omega, \alpha) = 0, \mathbf{h}'_x(\omega, \beta) = 0. \qquad (3)$$

Считаем, что выполняется условие

$$\beta < \mu. \qquad (4)$$

В работе рассматривается решение краевой задачи (1)-(3) с применением преобразований Лапласа и Лапласа – Стилтьеса. Обозначим через $\mathbf{h}^*(r, x)$,$B^*(r)$ преобразования Лапласа

$$\mathbf{h}^*(r, x) = \int_{0^-}^\infty e^{-r\omega}\mathbf{h}(\omega, x)\, d\omega, B^*(r) = \int_{0^-}^\infty e^{-r\omega}B(\omega)\, d\omega,$$

через $\mathbf{h}_c(r, x)$,$B_c(r)$ преобразования Лапласа – Стилтьеса

$$\mathbf{h}_c(r, x) = \int_{0^-}^\infty e^{-r\omega}h(\omega, x)\, d\omega, \quad B_c(r) = \int_{0^-}^\infty e^{-r\omega}B'(\omega)\, d\omega, r \in \mathbf{C}.$$

С применением преобразований Лапласа и Лапласа – Стилтьеса показано, что краевая задача (1)-(3) имеет единственное решение, причем условие (4) является достаточным условием существования и единственности решения краевой задачи (1)-(3).

Литература

1. Фролова, Е. С. Незавершенная работа в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока с нулевым коэффициентом сноса / Е. С. Фролова, Т. А. Жук, Н. И. Головко // Математические заметки СВФУ. — 2019. — Т. 26, № 1. — С. 32–45.

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИВЕРГЕНЦИЯ-РОТОР С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

А.В. Горшков (Москва, МГУ)
alexey.gorshkov.msu@gmail.com

Представленные результаты являются продолжением работы [1] с обобщением на случай несоленоидальных полей.

В 2D внешней области $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus G$ рассматривается задача Дирихле для следующей системы:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}), \tag{2}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{3}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty, \ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ — дополнение к односвязной области G с липшицевой границей, $\partial\Omega$ — внутренняя граница Ω, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ - 2D векторное поле, $\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$ — ротор, $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2$ — дивергенция, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ - заданное граничное условие Дирихле на внутренней границе $\partial\Omega$, $\mathbf{v}_\infty \in \mathbb{R}^2$ — фиксированный вектор.

L_2-оценки решения этой задачи вызывают определенные трудности т.к. $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$ может иметь бесконечную норму ввиду наличия нетривиальных гармонических полей, которые убывают на бесконечности как $1/|\mathbf{x}|$. Нулевая циркуляция и нулевой поток на бесконечности устраняют такие поля, позволяя получать L_2-оценки решений $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$. Более подробное описание таких полей можно найти в [1].

Исследуемая задача является некорректной, и для существования решения требуется выполнение определенных ограничений на w и ρ. Куартапэлли и Уальс-Гриз в работе [2] вывели *условия ортогональности* для завихренности соленоидальных полей (с $\rho \equiv 0$) в ограниченных областях, которые обеспечивали разрешимость задачи дивергенция-ротор с нулевым граничным условием. Аналогичная трехмерная задача исследовалась в [3].

Здесь будет представлено условие для разрешимости внешней задачи дивергенция-ротор для несоленоидальных полей для течений с бесконечной энергией и заданным граничным условием.

Определим весовое пространство

$$L_{2,N}(\Omega) = \{f(x) : \|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|^2(1+|x|^2)^N \mathrm{d}x < \infty\}.$$

Теорема 1. *Пусть существует отображение Римана* Φ *из* Ω *в* $B_{r_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ |\mathbf{x}| > r_0\}$, $r_0 > 0$, *такое, что* $\Phi^{-1}(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right)$, *и* $\left(\Phi^{-1}\right)'(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$, *и для* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *выполнены интегральные условия:*

$$\int_\Omega \frac{w(\mathbf{x}) + i\rho(\mathbf{x})}{\Phi(x_1+ix_2)^k}\mathrm{d}\mathbf{x} + \oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{l} + i(\mathbf{g}(\mathbf{x}),\mathbf{n})dl}{\Phi(x_1+ix_2)^k} =$$
$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{v}_\infty \cdot d\mathbf{l} + i(\mathbf{v}_\infty,\mathbf{n})dl}{\Phi(x_1+ix_2)^k}.$$

Тогда верны следующие утверждения:

- *Если* $\rho, w \in L_2(\Omega)$, *то существует единственное решение* $\mathbf{v}$ *задачи (1)-(4) и*

$$\|\nabla\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\left(\|\rho(\mathbf{x})\|_{L_2(\Omega)} + \|w(\mathbf{x})\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right).$$

- *Если* $\rho, w \in L_{2,N}(\Omega)$ *с* $N > 1$, *то*

$$\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\left(\|\rho\|_{L_{2,N}(\Omega)} + \|w\|_{L_{2,N}(\Omega)} + \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|_{H^{1/2}(\partial G)}\right).$$

- *Если* $\rho, w \in L_{2,N}(\Omega)$ *с* $N > 1$, $\nabla w \in L_2(\Omega)$ *и* $\mathbf{g} = 0$, *то*

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C\left(\|\rho\|_{L_{2,N}(\Omega)} + \|w\|_{L_{2,N}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{4}}_{L_2(\Omega)} \times$$
$$\|w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(\Omega)}\|\nabla w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{v}_\infty\|_{\mathbb{R}^2}.$$

Литература

1. Горшков А.В. Об однозначной разрешимости задачи дивергенция-ротор в неограниченных областях и энергетических оценках решений / А.В. Горшков // Теор. и мат. физ. — 2024. — Т. 221, № 2. — С. 240–254.

2. Quartapelle L. Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flows / L. Quartapelle, F. Valz-Gris // Internat. J. Numer. Methods Fluids — 1981. — Т. 1, № 2. — С. 129–144.

3. Kirchhart M. Div-curl problems and -regular stream functions in 3D Lipschitz domains / M. Kirchhart, E. Schulz // Math. Methods Appl. Sci. — 2021. — Т. 45, № 3. — С. 1097-1117.

ПРЕДЕЛЫ ПОДМНОЖЕСТВ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д.А. Гришмановский (Санкт-Петербург, РГПУ)
grishmanovski7@mail.ru

В статье [1] по теории гарантированного поиска один из авторов ввёл понятие предела для семейства зависящих от вещественного параметра подмножеств топологического пространства. Оказывается, что данная конструкция естественным образом обобщается и может изучаться независимо от теории гарантированного поиска — это общетопологическое понятие.

Через 2^X мы будем обозначать множество всех подмножеств множества X. Пусть $(T, \mathcal{T}_T)$ и $(X, \mathcal{T}_X)$ — топологические пространства. Рассмотрим отображение $M\colon T \longrightarrow 2^X$. Удобнее воспринимать M как семейство подмножеств в X, заиндексированных точками топологического пространства T. Через U_x будем обозначать окрестность U точки x.

Определение. Пусть $t_0 \in T$, тогда нижним пределом M в точке t_0 называется следующее множество:

$$\underline{\lim}\, M(t_0) = \{x \in X \mid \forall U_x \in \mathcal{T}_X\ \exists V_{t_0} \in \mathcal{T}_T\ \forall t \in V_{t_0}\colon M(t) \cap U_x \neq \varnothing\}.$$

Соответственно верхним пределом M в t_0 называется множество

$$\overline{\lim}\, M(t_0) = \{x \in X \mid \forall U_x \in \mathcal{T}_X\ \forall V_{t_0} \in \mathcal{T}_T\ \exists t \in V_{t_0}\colon M(t) \cap U_x \neq \varnothing\}.$$

Таким образом, в случае нижнего предела определяется новое семейство подмножеств $\underline{\lim}\, M\colon T \longrightarrow 2^X$, где $t \mapsto \underline{\lim}\, M(t)$. Аналогичная ситуация с верхним пределом, дающим семейство $\overline{\lim}\, M$.

Получается, что конструкция нижнего/верхнего предела является оператором на множестве отображений $T \longrightarrow 2^X$.

В отличие от классического определения предела последовательности/функции из математического анализа, данные пределы всегда корректно определены в каждой точке t (иногда предел может быть пустым множеством). При этом, если рассматривать вместо функции $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ соответствующее ей семейство одноточечных множеств $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$, где $x \mapsto \{f(x)\}$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ тогда и только тогда, когда $\underline{\lim}\, F(x_0) = \{y_0\}$; предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует тогда и только тогда, когда $\underline{\lim}\, F(x_0) = \varnothing$.

Рассмотрим два семейства множеств $N, M\colon T \longrightarrow 2^X$. Для сокращения записи того факта, что для любого $t \in T$ выполняется $N(t) \subset M(t)$ (или $N(t) = M(t)$), условимся писать $N \subset M$ (соответственно $N = M$).

Непосредственно из определения следует, что верны включения $\underline{\lim}\, M(t_0) \subset \operatorname{Cl} M(t_0) \subset \overline{\lim}\, M(t_0)$, где через Cl обозначается оператор замыкания множеств. Если же верны включения в обратную сторону и, как следствие, равенства $\underline{\lim}\, M(t_0) = \operatorname{Cl} M(t_0) = \overline{\lim}\, M(t_0)$, то мы говорим, что для семейства M в точке t_0 определён предел $\lim M(t_0)$ (развернутый вариант обозначения — $\lim\limits_{t\to t_0} M(t)$).

Введённое только что понятие предела схоже с определением предела по Пенлеве-Куратовскому [2]. Существенное отличие состоит в том, что в нашем случае множеством индексов t выступает топологическое пространство T, а в другом — натуральные числа $\mathbb{N}$ (в некоторых вариантах используется направленность $(I, \leqslant)$).

Лекго доказывается, что каждое из множеств $\underline{\lim}\, M(t), \overline{\lim}\, M(t)$ является замкнутым, а также равенства $\underline{\lim}\, M = \underline{\lim}\, \operatorname{Cl} M$, $\overline{\lim}\, M = \overline{\lim}\, \operatorname{Cl} M$. В связи с этим замечанием всюду далее мы будем рассматривать семейства множеств M, в которых каждое из подмножеств $M(t)$ замкнуто.

Так как нижний предел это оператор, можно определить семейство множеств $\underline{\lim}^n M$ как $\underline{\lim}(\underline{\lim}^{n-1} M)$, полагая $\underline{\lim}^0 M(t) = M(t)$ и $\underline{\lim}^1 M(t) = \underline{\lim}\, M(t)$. Аналогично с $\overline{\lim}^n M$. Имеет место цепочка включений:

$$\underline{\lim}^\infty M \subset \ldots \subset \underline{\lim}^{n+1} M \subset \underline{\lim}^n M \subset \ldots \subset \underline{\lim}^0 M =$$
$$= \overline{\lim}^0 M \subset \ldots \subset \overline{\lim}^n M \subset \overline{\lim}^{n+1} M \subset \ldots \subset \overline{\lim}^\infty M,$$

где $\underline{\lim}^{\infty} M(t) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \underline{\lim}^{n} M(t)$ и $\overline{\lim}^{\infty} M(t) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\lim}^{n} M(t)$. Если в точке t_0 существует предел $\lim M(t_0)$, то все элементы этой цепочке будут равны. Оказывается, что можно привести пример семейства множеств M, для которого все элементы упомянутой бесконечной цепочки включений различны.

Литература

1. Гришмановский Д.А. Поиск и исследованная им область пространства / Д.А. Гришмановский, В.В. Крылов // Современные проблемы математики и математического образования: Сборник научных статей Международной научной конференции, Санкт-Петербург, 18–20 апреля 2023 года. — Санкт-Петербург: Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, 2023. — С. 333-338.

2. Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966. — С. 343-348.

О РАЗЛОЖЕНИЕ ЧЕТНЫХ ОДНОРОДНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ПО К-ГАРМОНИЧЕСКИМ МНОГОЧЛЕНАМ

Е.А. Грязнева (ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского)
gryaznevaea@mail.ru

Пусть $-\gamma = -\gamma_1, ..., -\gamma_n$ - мультииндекс, координаты которого $-1 < -\gamma_i < 0)$. Сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^{n} B_{-\gamma_i}, \; B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0\}. \quad (1)$$

называется оператором Киприянова (введен в работе [1]). Функцию $u = u(x)$ в области $\Omega^+ \subset \overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \geqslant 0\}$ будем называть К-гармонической, если в каждой точке этой области выполняется равенство $\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0$.

В теории классических сферических функций основной и фундаментальной теоремой является утверждение о том, что «сферическая функция m-той степени, то есть след на единичной сфере многочлена m-ой степени, есть также след на сфере гармонического полинома той же степени» (см. [2]). Это утверждение вытекает из

теоремы Гасса о представлении произвольного однородного многочлена в виде суммы многочленов, сужение которых на единичную сферу есть гармонический многочлен (см. монографию [3]).

В этих тезисах представлены результаты исследования варианта основной теоремы К-сферических многочленов, главную роль в которой играет представление типа представления Гаусса однородных многочленов. Эти исследования используют подходы и методы доказательства теоремы Гаусса приведенной в монографии С.Л. Соболева [3].

Приведем некоторые формулы, имеющие самостоятельный интерес. Пусть $\psi = \psi(x)$ произвольный однородный многочлен, четный по каждой переменной x_i. Учитывая формулу Эйлера

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = m\psi(x)$$

для однородных порядка m функций $\psi(x)$, получено следующе равенство

$$\Delta_{B_{-\gamma}} \left[\left(\tfrac{|x|}{2}\right)^{2j} \psi(x) \right] = j \left(j+k+\tfrac{n-|\gamma|}{2}-1 \right) \left(\tfrac{|x|}{2}\right)^{2i-2} \psi(x) + \\ + \left(\tfrac{|x|}{2}\right)^{2i} \Delta_{B_{-\gamma}} \psi(x).$$

Справедлив следующий вариант теоремы Гаусса.

Теорема *Любой однородный многочлен $\psi(x)$ степени m может быть представлен единственным образом в виде*

$$\psi(x) = \textstyle\sum_{s=0}^{[m/2]} \left(\tfrac{|x|}{2}\right)^{2i} \mathcal{K}_{m-2s}^{\gamma}(x),$$

где $\mathcal{K}_{m-2s}^{\gamma}(x)$-гармонические многочлены степени $m-2s, s=0,1,...$ соответственно.

K-гармонические многочлены $\mathcal{K}_{m-2s}^{\gamma}(x)$ задаются следующими формулами:

$$\mathcal{K}_{m-2s}^{\gamma}(x) = \frac{m-2s+\frac{n-|\gamma|}{2}-1}{s!\Gamma\left(m+\frac{n-|\gamma|}{2}-s\right)} \sum_{j \geqslant 0} (-1)^i \frac{\Gamma\left(m-i-2s+\frac{n-|\gamma|}{2}-1\right)}{\Gamma(i+1)} \left(\tfrac{|x|}{2}\right)^i \Delta_{B_{-\gamma}}^{i+s} \psi$$

Отметим, что во всех приведенных формулах число $n-|\gamma|$ ведет себя как размерность пространства точек, но может быть дробным. В работе [4] эта размерность называется псевдоевклидовой, т.к. при целом положительном $|\gamma|$ оказывается размерностью евклидова пространства.

В заключении автор благодарит профессора Л.Н. Ляхова за постановку задачи и консультации.

Литература

1. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова-Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле

для B-гарманического уравнения / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Дифференциальные уравнения.– 2020.– № 12.– С.1610–1620.

2.Никольский С.М. Обобщение основной теоремы в теории сферических функций / С.М. Никольский // СМФН.– 2007.– Т.25.– С. 102–105.

3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. — М. : Наука, 1988. — 256 с.

4. Ляхов Л.Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, – № 4. – С. 517–528.

О РАЗЛОЖЕНИЯХ СЛАБО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА МОНОТОННЫЕ КОМПОНЕНТЫ[1]

Н.А. Гусев (Москва, МФТИ)
ngusev@phystech.su

Хорошо известно, что любую функцию ограниченной вариации $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ можно записать в виде суммы двух монотонных функций, f_1 и f_2, называемых *монотонными компонентами* f. Кроме того, если f абсолютно непрерывна, то её монотонные компоненты также можно выбрать абсолютно непрерывными.

Для функций многих переменных аналогичное разложение было получено Бьянкини и Тонон [1], которые доказали, что функция $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации может быть записана в виде не более чем счётной суммы монотонных компонент. В настоящей работе показано, что если функция ограниченной вариации f принадлежит пространству Соболева $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, то и её монотонные компоненты можно выбрать принадлежащими $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Для удобства будем использовать следующее функциональное пространство (как в [2]):

$$\mathrm{FV}(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^{1^*}(\mathbb{R}^d) : V(f) < +\infty\}, \quad 1^* := \begin{cases} \frac{d}{d-1}, & d > 1 \\ \infty, & d = 1, \end{cases}$$

где $V(f) = V(f, \mathbb{R}^d)$ — полная вариация функции f.

---

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00315.

Легко видеть, что $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{FV}(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ и оба вложения — строгие. Пространство $\mathrm{FV}(\mathbb{R}^d)$ снабдим нормой $\|f\| := V(f)$, относительно которой $\mathrm{FV}(\mathbb{R}^d)$ является банаховым пространством, поскольку $\|f\|_{1^*} \leqslant V(f)$ по теореме вложения для пространства BV. Заметим, что если $f \in \mathrm{FV}(\mathbb{R}^d)$, то множества $\{f > t\}$ и $\{f < -t\}$ имеют конечную меру Лебега для любого $t > 0$.

Напомним, что множество с конечным периметром $E \subset \mathbb{R}^d$ называется *неразложимым* [3], если его нельзя представить в виде $E = A \sqcup B$, где измеримые множества A и B имеют строго положительные меры, причём $P(E) = P(A) + P(B)$.

Определение. *Функция* $f \in \mathrm{FV}(\mathbb{R}^d)$ *называется* монотонной *если множества* $\{f > t\}$ *и* $\{f < t\}$ *являются неразложимыми для п.в.* $t \in \mathbb{R}$.

Наш основной результат состоит в следующем:

Теорема. *Для любой функции* $f \in \mathrm{FV}(\mathbb{R}^d)$ *существует не более чем счётное семейство* $\{f_i\}_{i \in I} \subset \mathrm{FV}(\mathbb{R}^d)$ *монотонных функций такое, что*

(i) $f = \sum_i f_i$ *(ряд сходится локально в* L^{1^*}*);*

(ii) $|Df| = \sum_i |Df_i|$*;*

Если, кроме того, $Df \ll \mathcal{L}^d$*, то функции* f_i *могут быть выбраны таким образом, что также*

(iii) $Df_i \ll \mathcal{L}^d$*;*

(iv) при $i \neq j$ *выполнено* $|Df_i| \perp |Df_j|$;

(v) для каждого $i \in I$ *множество* $\{|f_i| > 0\}$ *имеет конечную меру и либо* $0 \leqslant f_i \leqslant 1$ *п.в., либо* $-1 \leqslant f_i \leqslant 1$ *п.в.*

Для липшицевых функций с компактным носителем такой результат анонсировался (без доказательства) в работе [1], где он был обобщён на случай функций ограниченной вариации (без свойств (iii) и (iv), которые в общем случае не имеют места для таких функций). Более простое доказательство (но только для функций ограниченной вариации) приведено в [2].

Доклад основан на совместной работе [4] с М.В. Коробковым.

Литература

1. Bianchini S. A decomposition theorem for BV functions. / S. Bianchini, D.Tonon // Communications on Pure and Applied Analysis. — 2011. — 10(6) — P. 1549–1566.

2. Bonicatto P. On the structure of divergence-free measures on $\mathbb{R}^2$. / P. Bonicatto, N. A. Gusev // Advances in Calculus of Variations. — 2021. — 15(4) — P. 879–911.

3. Ambrosio L. Connected components of sets of finite perimeter and applications to image processing. / L. Ambrosio , V. Caselles, S. Masnou, J.-M. Morel // 2001. — J. Eur. Math. Soc. — 3, No. 1 — P. 39–92.

4. Gusev N.A. Decomposition of weakly differentiable functions into monotone parts. / Gusev N.A., M.V. Korobkov // J. Math. Sci. — 2025. — 294(2) — P. 124–135.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Джангибеков, Г.М. Козиев, Н.Г. Валиев
(Душанбе, ИМ НАН Таджикистана, МУТПТ)
gulkhoja@list.ru, gulnazar88@mail.ru, najibvaliev@mail.ru

В работах [1]–[3] доказано, что если символ многомерного сингулярного интегрального оператора по всему пространству E_n нигде не обращается в нуль, то для скалярного уравнения с таким оператором имеет место теория Фредгольма. Как было показано [4], существуют двумерные сингулярные системы, имеющие отличный от нуля индекс.

Последующие результаты из работах [5]–[13], подтвердили указанный факт для систем двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной односвязной области. Во всех упомянутых выше работах комплекснозначные составляющие ω_1 и ω_2 вектора искомой функции $\omega = \left(\begin{smallmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{smallmatrix}\right)$ связаны между собой формулой $\omega_2 = \overline{\omega_1}$, где черта над функцией означает комплексное сопряжение. Естественно, встает вопрос об освобождении от этого ограничения. Целью данной заметки является изучение банаховой алгебры $\mathfrak{R}$, порожденной некоторыми двумерными сингулярными матричными интегральными операторами по ограниченной области. На основе этого получены необходимые и достаточные условия нетеровости операторов из этой алгебры и вычислен индекс, который может быть отличным от нуля.

В пространствах $L_p^2(\mathcal{D}), 1 < p < \infty$, вектор-функций с двумя составляющими, суммируемых со степенью p, в круге $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим матричный сингуляр-

---

ный оператор вида

$$\begin{aligned}\mathcal{A} =&aE + b\cdot diag(\overline{S},\, S) + cB + d\overline{B} + e\cdot diag(SB,\, \overline{SB}) + \\ &+h\cdot diag(\overline{SB},\, SB) + \delta\cdot diag(B\overline{S},\, \overline{B}S) + \nu\cdot diag(SB\overline{S},\, \overline{SB}S) + T, (1)\end{aligned}$$

где $S, B, \overline{B}$ – двумерные интегральные операторы, определяемые по формулам:

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta, \qquad z \in \overline{\mathcal{D}},$$

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{(1 - z\overline{\zeta})^2} ds_\zeta,\ (\overline{B}f)(z) = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} ds_\zeta,$$

$a, b, c, d, e, h, \delta, \nu$ – непрерывные комплекснозначные матрицы-функции, имеющие вид:

$$a = diag(a_{11},\, a_{22}),\, b = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix},\, c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},\, d = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

$$e = diag(e_{11},\, e_{22}),\, h = \begin{pmatrix} 0 & h_{12} \\ h_{21} & 0 \end{pmatrix},\, \delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix},\, \nu = diag(\nu_{11},\, \nu_{22}).$$

В развернутом виде матрица $\mathcal{A} = (A_{ij})$ $(i, j = 1, 2)$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a_{11}I + c_{11}B + d_{11}\overline{B} + e_{11}SB + \delta_{11}B\overline{S} + \nu_{11}SB\overline{S},\\
A_{12} &= b_{12}S + c_{12}B + d_{12}\overline{B} + h_{12}SB + \delta_{12}\overline{B}S,\\
A_{21} &= b_{21}\overline{S} + c_{21}B + d_{21}\overline{B} + h_{21}\overline{SB} + \delta_{21}B\overline{S},\\
A_{22} &= a_{22}I + c_{22}B + d_{22}\overline{B} + e_{22}\overline{SB} + \delta_{22}\overline{B}S + \nu_{22}\overline{SB}S.
\end{aligned}$$

Интегральное уравнение с оператором $\mathcal{A}$ можно записать в виде одного уравнения

$$(\mathcal{A}\omega)(z) + (T\omega)(z) = g(z), \tag{3}$$

где векторы столбцы ω и g с комплекснозначными составляющими $\left(\begin{smallmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix}g_1\\ g_2\end{smallmatrix}\right)$ соответственно заданы и ищутся в $L_p^2(\mathcal{D})$, $1 < p < \infty$, T – вполне непрерывный оператор.

Отметим, что оператор $\mathcal{A}$ в случае $c \equiv d \equiv e \equiv h \equiv \delta \equiv \nu \equiv 0$ изучался ранее в работе [14].

В пространстве $L_p(\mathcal{D}), 1 < p < \infty$, рассмотрим матричный интегральный оператор $\mathcal{A} + T$ вида (1), где T – вполне непрерывный оператор. Очевидно, что такой оператор ограничен в $L_p(\mathcal{D}), 1 < p < \infty$. Множество $\mathcal{R}$ таких операторов представляет собой алгебру.

Имеет место

Теорема 1. *Множество матричных сингулярных операторов $\mathcal{R}$ вида (1) является алгеброй.*

Теорема 2. *Для того чтобы произвольный оператор $\mathcal{A}$ из алгебры $\mathcal{R}$ был нетеровым в пространстве $L_p^2(\mathcal{D}), 1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det a(z) + \det b(z) \neq 0 \text{ при } z \in \overline{\mathcal{D}}; \tag{4}$$

$$\det \Delta_1(t) \neq 0, \ det\Delta_2(t) \neq 0 \text{ при } t \in \Gamma. \tag{5}$$

При выполнении этих условий индекс оператора равен

$$\varkappa = -\frac{1}{2\pi}[arg\Delta_1(t)\overline{\Delta_2(t)}]_\Gamma,$$

где

$$\Delta_1(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) + c_{11}(t) & e_{11}(t) & c_{21}(t) \\ \delta_{11}(t) & a_{11}(t) + \nu_{11}(t) & b_{21}(t) + \delta_{21}(t) \\ c_{12}(t) & b_{12}(t) + h_{12}(t) & a_{22}(t) + c_{22}(t) \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) + d_{11}(t) & d_{21}(t) & b_{21}(t) + h_{21}(t) \\ d_{12}(t) & a_{22}(t) + d_{22}(t) & e_{22}(t) \\ b_{12}(t) + \delta_{12}(t) & \delta_{22}(t) & a_{22}(t) + \nu_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения. / С.Г. Михлин. – Успехи матем.наук — 1948, №3 — с.29–112.

2. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. / С.Г. Михлин. –М.: Физматгиз — 1962 — 254с.

3. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. / С.Г. Михлин. – М.: ВШ — 1977 — 625с.

4. Вольперт А.И. Об индексе краевых задач для системы гармонических функций с тремя независимыми переменными. / А.И. Вольперт. – ДАН СССР — 1960 — т.133. №1 — с.13–15.

5. Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области. / А.Д. Джураев – ДАН СССР — т.197, №46, 1971 — с.1251–1254.

6. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений. / А.Д. Джураев – М.: Наука —1987 — 415 с.

7. Комяк И.И. Условия неотеровости и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области. / И.И. Комяк – Дифференц. уравнения —1980, т.16, №2 —с.328–343. 1991, №1 —с.19–28.

8. Джангибеков Г. Формула обращения одного двумерного сингулярного уравнения. / Г. Джангибеков – ДАН Тадж ССР — 1984, т.27, №5 —с.243–248.

9. Бильман Б.М. Об условиях нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области. / Б.М. Бильман, Г. Джангибеков – ДАН СССР — т.288, №4 — 1986 — с.792–797.

10. Бойматов К.Х. Об одном сингулярном интегральном операторе. / К.Х. Бойматов, Г. Джангибеков – Успехи математических наук — т.43, вып.3(261), 1988 — с.171–172.

11. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. / Г. Джангибеков – Изв.вузов. Математика — 1991, №1 — с.19–28.

12. Джангибеков Г. К теории двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем дифференциальных уравнений. / Г. Джангибеков, Г.М. Козиев – Чебышевский сборник — 2024 — т.25, вып.5 — с.74–89.

13. Джангибеков Г. Избранные научные труды по теории разрешимости сингулярных операторов. / Г. Джангибеков. Душанбе, 2019, 233 с.

14. Джангибеков Г. О нетеровости и индексе одного матричного сингулярного интегрального опeратра по ограниченной области. / Г. Джангибеков, Г.М. Козиев, Н.Г.Валиев – Доклады НАН Таджикистан —2025, т68, №4, с.309–318.

О БИЛЛИАРДЕ В ЭЛЛИПСЕ

Г.О. Джилавян, Л.В. Стенюхин (Воронеж, ВГУ)
stenyuhin@mail.ru, genautka49@gmail.com

Зададим биллиард в эллипсе с уравнением

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad a > b > 0$$

с учетом того, что материальная точка совершает движение без трения и удары о границу являются абсолютно упругими, то есть величина $H = v_x^2 + v_y^2$, где v_x, v_y — компоненты скорости траектории, — сохраняется, а также совершаются согласно закону: угол падения равен углу отражения относительно касательной, которая проведена к точке удара. Область внутри эллипса и его границу обозначим G.

Для описания всевозможных траекторий биллиарда будем рассматривать пространство $M = \big\{(x, y, v_x, v_y) \bigm| (x, y) \in G\big\}$, но с веденным на нем отношением эквивалентности. Будем считать две траектории (x_1, y_1, v_x, v_y) и (x_2, y_2, w_x, w_y) эквивалентными, если выполняются условия:

$$\begin{cases} (x_2, y_2) = (x_1, y_1) = m_0 \in \partial G, \\ v_x^2 + v_y^2 = w_x^2 + w_y^2, \\ (v_x - w_x,\ v_y - w_y) \perp \vec{l} \in T_{m_0}\partial G. \end{cases}$$

Теорема 1. *Для траекторий, которые не проходят через фокусы эллипса, существует такой параметр λ, что линии траекторий касаются кривой $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$ до и после отражений от ∂G, и, в общем, этот параметр имеет вид:*

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = a \\ \lambda = b \\ \lambda = \dfrac{v_x^2 b + v_y^2 a - (x v_y - y v_x)^2}{H}, \quad H = v_x^2 + v_y^2 \end{array} \right.$$

Замечание 1. *Случаи $\lambda = a$ и $\lambda = b$ являются вырожденными и соответствуют движению вдоль осей эллипса a и b. Если $\lambda \in (0, b)$ — кривая является софокусным эллипсом; $\lambda \in (b, a)$ — кривая является софокусной гиперболой.*

Также отметим, что H и $\Lambda = \dfrac{v_x^2 b + v_y^2 a - (xv_y - yv_x)^2}{H}$ являются функционально независимыми почти всюду, а также остаются постоянными величинами для каждой траектории, то есть являются интегралами системы.

Таким образом, на пространстве M можно рассмотреть совместные линии уровня при $H = h$ и $\Lambda = \lambda$. Без потери общности будем считать $H = 1$.

Утверждение 1. *Совместные линии уровня на M при $H = 1$ и $\Lambda = \lambda$, образуют:*

- *несвязное объединение двух торов T^2, при $\lambda \in (0, b)$*
- *окружность S^1, при $\lambda = a$*

Литература

1. Каток А.Б. Введение в современную теорию динамических систем / А.Б. Каток, Б. Хасселблат ; ред. А.М. Архипов, О.А. Васильева, А.С. Городецкий. — М. : Факториал, 1999. — 768 с. — С. 345–354.

2. Фоменко А.Т. «Интегрируемые гамильтоновы системы: геометрия, топология, классификация» / А.Т. Фоменко, А.В. Болсинов. — М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. — 448 с.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ, ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА-ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА

К.Р. Джумагулов (Кыргызская Республика, Бишкек,
Инновационный колледж АУЦА)
kubatdjumagulov@gmail.com

Для приложений физики отдельный интерес представляют задачи поиска причин по известным следствиям. В математической трактовке подобные задачи именуются как обратные. Исследования обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, которыми, зачастую, и описывают модели реальных процессов жизнедеятельности и явлений физики, на сегодняшний день весьма актуальны. [1,3,4] При изучении этих задач вырождаются условно-корректные системы интегральных уравнений Воль-

---

терра или Фредгольма первого и третьего родов. Поскольку получение аналитических решений подобных задач бывает крайне сложным в силу понятия корректности поставленных задач по Адамару, поэтому приходится прибегнуть к регуляризационным методам, которые также модифицируются под каждый определенный случай поставленных задач. [2,4,5] В данной работе исследуется многомерная граничная обратно-нелокальная задача типа Гурса [3] в неограниченной области с дифференциальным оператором третьего порядка гиперболического типа. Решение данной задачи достигается модифицированными методами вспомогательной функции и системной регуляризации. В частности, аналогичные задачи, встречаются при изучении движения жидкости в трещиноватых породах, а также при исследовании задач влагопереноса [6] и др.

Пусть задана обратно-нелокальная задача:

$$u_{txy} + bu_{tx} + \lambda u + \Phi(u_y) = f(x, y, t), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(x, y, 0) = 0, \forall (x, y, t) \in \overline{\Omega}, \\ u(x, 0, t) = (Jz)(x, t), \forall (x, t) \in D = [0, X] \times [0, T], \\ Jz\big|_{t=0} = 0,\ Jz\big|_{x=0} = 0, (u(0, 0, 0) = 0), \\ \sum\limits_{j=1}^{3} c_j [u_y\big|_{y=y_j} + bu\big|_{y=y_j}] = g(x, t), \forall (x, t) \in D, (y_j \in (0, \infty)), \\ g\big|_{t=0} = 0; g\big|_{x=0} = 0, (g(0, 0) = 0), \\ \Omega = (0, X) \times (0, \infty) \times (0, T), D_1 = [0, X] \times [0, \infty), \end{cases} \tag{2}$$

$$Jz \equiv p(t)z + \int\limits_0^t N(t, s)z(x, s)d\tau ds + \mu \int\limits_0^T \int\limits_0^X K(x, t, \tau, s)z(\tau, s)d\tau ds \tag{3}$$

со следующими известными данными: λ, b, Φ, f, g, причем

$$\begin{cases} |\lambda| < 1; 1 < b; (\lambda, b, c_j = const), \\ C^{1,1}(D) \ni g(x, t); |g_{tx}^{(i)}| \leqslant \beta_1, \forall (x, t) \in D, i = (\overline{0, 2}), \\ C(R) \ni \Phi(l_1) \cap Lip(l_1|L_\Phi), (0 < L_\Phi); ||\Phi||_{C(R)} \leqslant \beta_2, \\ C(\overline{\Omega}) \ni f(.) : \sum\limits_{j=1}^{3} c_j e^{-by_j} = C_1 \neq 0, \end{cases} \tag{4}$$

где также относительно данных μ, p, N, K выполняются условия:

$$\left\{\begin{array}{l} (0,1) \ni \mu = const; K(x,t,\tau,s) \in C^{1,1,0,1}(D_3), \\ K(.)\big|_{s=T} \equiv 0; K(.)\big|_{t=0} \equiv 0; K_s(.) \equiv K_0(.), \\ K_0(.)|_{t=0 \text{ и } t=T} \equiv 0, \\ C^1[0,T] \ni p(t) \geqslant 0, (\text{а точнее} : p|_{t=0 \text{ и } t=T} = 0), \\ C^{1,1}(D_4) \ni N(t,s); N(t,t) \equiv h(t) \geqslant \alpha_0 > 0, \\ N_s(t,s) \equiv N_0(t,s), (N_0\big|_{t=T} \equiv 0), \\ \sup\limits_{D_3}|K_0| \leqslant \overline{K}_0; \sup\limits_{D_4}|N_0| \leqslant \overline{N}_0; (0 < \overline{K}_0, \overline{N}_0 = const), \\ D_3 = D \times \{(\tau,s) : 0 \leqslant \tau \leqslant X; 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}, \\ D_4 = \{(t,s); 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}, \end{array}\right. \tag{5}$$

причем для простоты

$$z(x,0) = 0, z(x,T) = 0, \forall x \in [0,X]. \tag{6}$$

При этих условиях требуется доказать, что многомерная обратная задача (1)—(2) регуляризируема в пространстве Банаха с соответствующей нормой:

$$\left\{\begin{array}{l} W_C(\overline{\Omega}) \ni U = (u,z), \\ ||U||_{W_C} = ||u||_{C^{1,1,1}(\overline{\Omega}))} + ||z||_{C(D)}. \end{array}\right. \tag{7}$$

На основе модификации метода вспомогательной функции, исходная задача трансформируется к системе уравнений, где содержатся условно-корректные интегральные уравнения Вольтерра-Фредгольма третьего рода и уравнения Вольтерра первого рода. Далее, применяя метод системной регуляризации [4] доказывается однозначная разрешимость исходной задачи в $W_C(\overline{\Omega})$ с нормой пространства (7). В итоге получим теорему:

Теорема 1. *При выполнении условий (3)—(6) исходная обратная задача (1)—(2) регуляризируема однозначным образом в* $W_C(\overline{\Omega})$.

Литература

1. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений / Ю.Е. Аниконов. — Новосибирск. : Наука, 1978. — 118 с.

2. Лаврентьев М.М. О регуляризации операторных уравнений типа Вольтерра / М.М. Лаврентьев //Проблемы математической физики и вычислительной математики. — М.,1977. —С. 199–205.

3. Лаврентьев М.М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. / М.М. Лаврентьев , В.Г. Васильев , В.Г. Романов. —Изд-во: Наука, Сиб. Отделение, Новосибирск., 1969. —67с.

4. Омуров Т.Д. Обратные задачи в приложениях математической физики / Т.Д. Омуров, А.О. Рыспаев, М.Т. Омуров. – Бишкек. :КНУ им. Ж. Баласагына,2014. — 192 с.

5. Омуров Т.Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего родов / Т.Д. Омуров. – Бишкек. :Илим,2003. — 162 с.

6. Шхануков М.А. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах / М.А. Шхануков. //Дифференц. уравнения. — 1982. —Т.18, № 4. —С. 689–699.

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПАРАМЕТРОМ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

С.Ю. Доброхотов (Москва, Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН)
s.dobrokhotov@gmail.com

Адиабатическое приближение (метод Борна-Оппенгеймера) применяется в задачах математической физики с малым параметром, в которых символ соответствующего оператора, вычисленный с учетом его наличия, представляет собой опять оператор параметрически зависящим от «замороженных» производных (этот параметр содержащий) и им соответствующих «медленных» переменных. Простейший пример – это векторные уравнения, в которых символ – это матричнозначная функция. Мы показываем, как с помощью конструктивного алгоритма, основанного на достаточно элементарных формулах из операторного исчисления Фейнмана-Маслова, исходные векторные и адиабатические задачи можно свести к более простым часто скалярным задачам, к которым можно эффективно применять коротковолновые асимптотические подходы.

О СВЯЗИ ЦЕПНОГО ПРАВИЛА И РЕНОРМАЛИЗАЦИИ[1]

Р.В. Дрибас (Долгопрудный, МФТИ)
dribas.rv@phystech.edu

Пусть $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — векторное поле с компактным носителем. Пусть $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$, где $p \in [1, \infty]$, и $\operatorname{div} v = 0$ (в слабом смысле). Для $T > 0$, $\rho_0 \in L^q(\mathbb{R}^d)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ и $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим задачу Коши для уравнения непрерывности

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = g(x), \\ \rho|_{t=0} = \rho_0, \end{cases} \tag{1}$$

где решение ρ ищется в классе $L^\infty([0, T]; L^q(\mathbb{R}^d))$.

Определение 1. *Функция $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ называется* допустимой, *если $\beta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $\beta(0) = 0$.*

Определение 2. *Решение $\rho \in L^\infty([0, T]; L^q(\mathbb{R}^d))$ задачи (1) назовём* ренормализованным, *если для любой допустимой функции $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ функция $\beta(\rho)$ является решением задачи Коши*

$$\begin{cases} \partial_t \beta(\rho) + \operatorname{div}(\beta(\rho) v) = \beta'(\rho) g(x), \\ \beta(\rho)|_{t=0} = \beta(\rho_0). \end{cases} \tag{2}$$

Определение 3. *Если любое решение ρ из класса $L^\infty([0, T]; L^q(\mathbb{R}^d))$ является ренормализованным, то будем говорить, что для v есть* ренормализация.

Хорошо известено следующее свойство (см. [4]):

Утверждение 1. *Если любое решение ρ задачи Коши (1) является ренормализованным, то решение задачи Коши (1) единственно.*

Определение 4. *Для v выполнено* цепное правило, *если для любой допустимой функции $\beta \in C^1$, для любой $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ и для любой $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$*

$$\operatorname{div}(\rho v) = g \ \textit{влечёт} \ \operatorname{div}(\beta(\rho) v) = \beta'(\rho) g. \tag{3}$$

В работе [1] показано, что цепное правило с $g \equiv 0$ не влечёт ренормализацию. Оказывается, что это верно и в общем случае:

Теорема 1. *Из цепного правила не слудует ренормализация.*

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00315).

Доклад основан на совместной работе с Н.А. Гусевым.

Литература

1. Gusev N.A., Korobkov M.V. The Nelson conjecture and chain rule property / N.A. Gusev, M.V. Korobkov // URL: - https://arxiv.org/abs/2411.09338

2. Alberti G., Bianchini S., Crippa G. A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions / G. Alberti, S. Bianchini, G. Crippa // J. Eur. Math. Soc. — 2011. — V. 16(2) — P. 201–234

3. Alberti G., Bianchini S., Crippa G. Structure of level sets and Sard-type properties of Lipschitz maps / G. Alberti, S. Bianchini, G. Crippa // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 2013. — V. XII № 4 — P. 863–902

4. DiPerna, R.J., Lions, P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R.J. DiPerna, P.L. Lions // Invent Math —1989. — V.98 — P.511–547

ВЕЩЕСТВЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ КОМПОЗИЦИИ[1]

Е.С. Дубцов (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН)
dubtsov@pdmi.ras.ru

Пусть $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ — пространство всех голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ обозначает класс всех голоморфных отображений из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$. Для заданного отображения $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ оператор композиции C_φ задается формулой

$$C_\varphi f = f \circ \varphi$$

при $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$. Ясно, что оператор C_φ отображает пространство $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ в себя.

Для $0 < p < \infty$ пространство Харди $H^p(\mathbb{D})$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ таких, что

$$\|f\|^p_{H^p} = \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p \, dm(\zeta) < \infty,$$

где m обозначает нормированную меру Лебега на единичной окружности $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$.

---

[1] Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00087, https://rscf.ru/project/24-11-00087/.

Для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ типичная задача — найти связи между свойствами оператора C_φ и функционально-теоретическими свойствами отображения φ. Свойства оператора C_φ на пространствах Харди представляют особый интерес. В силу классического принципа субординации Литтлвуда оператор C_φ ограничен на $H^p(\mathbb{D})$, $p > 0$, для любого символа $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$. Различные аспекты теории операторов композиции на пространствах $H^p(\mathbb{D})$ и на иных пространствах функций одной и нескольких комплексных переменных обсуждаются в монографиях [3] и [6].

В более общей ситуации изучаются подобные вопросы для линейных комбинаций операторов C_{φ_j}, $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Постановка задачи. Настоящий доклад мотивирован следующей проблемой о разностях операторов композиции:

Проблема. *Для $p > 0$ найти описание отображений $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ таких, что оператор $C_\varphi - C_\psi$ компактен на пространстве $H^p(\mathbb{D})$.*

Для $p = 2$ искомое описание было недавно найдено в работе [2]. Более явное решение для $p = 2$ было затем дано в [1]. Более того, в [5] показано, что решение сформулированной проблемы не зависит от параметра p при $1 \leqslant p < \infty$. Наконец, Цой и др. [1] сформулировали следующую гипотезу.

Гипотеза [1, гипотеза 4.3]. *Компактность разности $C_\varphi - C_\psi$ на пространстве $H^p(\mathbb{D})$ не зависит от параметра $p \in (0, \infty)$.*

Основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, $j = 1, 2, \ldots, N$, и T обозначает некоторую линейную комбинацию операторов композиции C_{φ_j}. Компактность оператора $T : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$ не зависит от параметра p при $0 < p < \infty$.*

В частности, показано, что сформулированная выше гипотеза верна:

Следствие 1. *Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$. Компактность оператора $C_\varphi - C_\psi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$ не зависит от параметра p, $0 < p < \infty$.*

О доказательстве теоремы 1. Рассуждения основаны на вещественной интерполяции квазибанаховых пространств. Напомним некоторые основные понятия. Пусть (A_0, A_1) — совместимая пара квазибанаховых пространств. Интерполяционное пространство $(A_0, A_1)_{\theta,q}$, $0 < \theta < 1$, $0 < q \leqslant \infty$, задается равенством

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \{f \in A_0 + A_1 : \|f\|_{\theta,q} < \infty\},$$

где

$$\|f\|^q_{\theta,q} = \int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,f)\right)^q \, \frac{dt}{t}$$

и

$$\begin{aligned} K(t,f) &= K(t,f;A_0,A_1) \\ &= \inf\{\|f_0\|_{A_0} + t\|f_1\|_{A_1} : f = f_0 + f_1,\ f_0 \in A_0,\ f_1 \in A_1\} \end{aligned}$$

обозначает K-функционал. Ключевой инструмент доказательства теоремы 1 — следующая односторонняя теорема компактности в квазибанаховом случае, см. [4], где приведены дальнейшие детали.

Теорема 2. *Предположим, что* $T : H^{p_j}(\mathbb{D}) \to H^{p_j}(\mathbb{D})$, $0 < p_j < \infty$, $j = 0, 1$, *— это ограниченный линейный оператор такой, что оператор* $T : H^{p_1}(\mathbb{D}) \to H^{p_1}(\mathbb{D})$ *компактен. Тогда оператор*

$$T : (H^{p_0}(\mathbb{D}), H^{p_1}(\mathbb{D}))_{\theta,q} \to (H^{p_0}(\mathbb{D}), H^{p_1}(\mathbb{D}))_{\theta,q}$$

компактен для всех допустимых параметров θ *и* q.

Литература

1. Choe B.R. Compact difference of composition operators on the Hardy spaces / B.R. Choe, K. Choi, H. Koo, I. Park // Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B — 2022. — V. 9, — P. 733–756.

2. Choe B.R. Difference of weighted composition operators / B.R. Choe, K. Choi, H. Koo, J. Yang // J. Funct. Anal. — 2020. — V. 278, № 5.— 108401, 38.

3. Cowen C.C. Composition operators on spaces of analytic functions / C.C. Cowen, B.D. MacCluer. — Boca Raton, FL : CRC Press, 1995. — 388 pp.

4. Doubtsov E. Compact linear combinations of composition operators on Hardy spaces / E. Doubtsov, D.V. Rutsky // Arch. Math. (Basel) — 2025. — V. 124, № 2. — P. 157–163.

5. Nieminen P.J. On compactness of the difference of composition operators / Compact linear combinations of composition operators on Hardy spaces / P.J. Nieminen, E. Saksman // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — V. 298, № 2. — P. 501–522.

6. Shapiro J.H. Composition operators and classical function theory / J.H. Shapiro. — New York : Springer-Verlag, 1993. — 223 pp.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

А.Ю. Егорова (Рязань, РГРТУ имени В. Ф. Уткина)
ayu_egorova@mail.ru

Начально-краевые задачи для параболических уравнений второго порядка в пространствах Зигмунда рассматривались в [1], [2]. В случае параболических систем второго порядка гладкость классического решения первой краевой задачи в анизотропных пространствах Зигмунда с постоянными коэффициентами установлена в [3]. В данной работе рассматривается первая начально-краевая задача для параболической по Петровскому системы второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Зигмунда, в пространствах $H_m(\bar{\Omega})$, $m \geqslant 3$.

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается равномерно параболический по Петровскому оператор

$$Lu = \partial_t u - A(x,t)\partial_x^2 u - B(x,t)\partial_x u - C(x,t)u,$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$, $m \in \mathbb{N}$, $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ – матрицы порядка m, элементами которых являются вещественные функции $a_{ij}(x,t), b_{ij}(x,t), c_{ij}(x,t)$, определенные в $\bar{D}$. Для коэффициентов оператора L выполнены следующие условия:

(a) собственные числа $\lambda_r(x,t)$, $r = \overline{1,m}$, матрицы $A(x,t)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\,\lambda_r(x,t) \geqslant \delta > 0$ для всех $(x,t) \in \bar{D}$;

(b) $a_{ij}(x,t), b_{ij}(x,t), c_{ij}(x,t) \in H_m(\bar{D})$, $|a_{ij}|_{m,D}, |b_{ij}|_{m,D}, |c_{ij}|_{m,D} \leqslant K$.

В полуограниченной области $\Omega = \{(x,t) \in D |\ x > g(t), 0 < t < T\}$ с боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in D |\ x = g(t), 0 < t < T\}$ рассмотрим первую краевую задачу

$$\left\{\begin{array}{rcl} Lu & = & f \text{ в } \Omega, \\ u|_{\Sigma} & = & \varphi, \\ u|_{t=0} & = & \psi, \end{array}\right. \qquad (1)$$

где $f = (f_1, ..., f_m)^T$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)^T$, $\psi = (\psi_1, ..., \psi_m)^T$.

Чтобы сформулировать условия согласования, нам понадобится модельная область $D_+ = D \cap \{x > 0\}$ с боковой границей $x = 0$.

Для всех точек $(x,t) \in \bar{D}_+$ обозначим

$$\mathcal{L}_{D_+}(x,t) = A_{D_+}(x,t)\partial_x^2 + B_{D_+}(x,t)\partial_x + C_{D_+}(x,t).$$

Положим $u_{D_+}^{(0)}(x) = \psi(x)$ и для $k \geqslant 0$

$$u_{D_+}^{(k+1)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathcal{L}_{D_+}^{(i)}(x,0) u_{D_+}^{(k-i)}(x) + \partial_t^k f_{D_+}(x,0),$$

где $\mathcal{L}_{D_+}^{(k)}(x,0) = \left[\partial_t^k A_{D_+}(x,0)\right]\partial_x^2 + \left[\partial_t^k B_{D_+}(x,0)\right]\partial_x + \partial_t^k C_{D_+}(x,0)$.

Для $\sigma \geqslant 2$ будем говорить, что для первой краевой задачи (1) выполняются условия согласования порядка σ, если:

1) в случае $\sigma \notin \mathbb{Z}$ для всех $(x,t) \in \bar{D}_+$ выполнены соотношения

$$\varphi_{D_+}^{(k)}(0) = u_{D_+}^{(k)}(0), \tag{2}$$

$k = 1, \ldots, [\sigma]$, где $[\sigma]$ – целая часть числа σ;

2) в случае $\sigma \in \mathbb{Z}$ выполнены соотношения (2) для $k = 1, \ldots, \sigma - 1$, и, кроме того,

$$K_\sigma = \sup_{0<\tau\leqslant T} \tau^{-1} |\Delta_t(\tau)\varphi_{D_+}^{(\sigma-1)}(0) - \left[\Delta_t(\tau)\mathcal{L}_{D_+}^{(\sigma-2)}(0,0)\right]\psi_{D_+}(0) -$$
$$- A_{D_+}(0,0)\Delta_x^2(\tau^{1/2})u_{D_+}^{(\sigma-1)}(0) - \Delta_t(\tau)\partial_t^{\sigma-2} f_{D_+}(0,0)| < \infty, (2)$$

где $\Delta_t(\tau)\mathcal{L}_{D_+}^{(k)}(0,0) = \left[\Delta_t(\tau)\partial_t^k A_{D_+}(0,0)\right]\partial_x^2 + \left[\Delta_t(\tau)\partial_t^k B_{D_+}(0,0)\right]\partial_x + {} + \Delta_t(\tau)\partial_t^k C_{D_+}(0,0)$. Для нецелых σ положим константу согласования K_σ равной нулю.

Теорема. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $g(t) \in H_{m+2}$, *параболический оператор* L *удовлетворяет условиям (a), (b),* $f \in H_m\left(\bar{\Omega}\right)$, $\psi \in H_{m+2}(\mathbb{R})$, $\varphi \in H_{m+2}(\Sigma)$. *Тогда классическое решение* u *первой краевой задачи (1) принадлежит пространствам Зигмунда* $H_{m+2}\left(\bar{\Omega}\right)$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования порядка* $(m+2)/2$. *При этом для* u *справедливо неравенство*

$$|u|_{m+2,\Omega} \leqslant C\left(|f|_{m,\Omega} + |\psi|_{m+2,\mathbb{R}} + |\varphi|_{m+2,\Sigma} + K_{(m+2)/2}\right). \tag{3}$$

Литература

1. Коненков А.Н. Краевые задачи для параболических уравнений в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Доклады РАН. — 2008. — Т. 418. — №1. — С. 15–18.

2. Коненков А.Н. Решение модельных задач теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44. — № 10. — С. 1388–1398.

3. Егорова А.Ю. Модельная первая краевая задача для параболической системы в пространствах Зигмунда / А.Ю. Егорова, А.Н. Коненков // Дифференциальные уравнения. — 2025. — Т. 61. — № 5. — С. 606–617.

КУСОЧНО–ПОСТОЯННЫЕ РЕЖИМЫ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.Д. Еремичев (Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова)
eremuchew.gelo@gmail.ru

Рассмотрена система интегро-дифференциальных уравнений [1] вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F_2(u,u) + F_3(u,u,u) + \varepsilon D_0 M(u), \qquad (1)$$

где $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, ε – малый положительный параметр, A_0, A_1, D_0 – $n \times n$ матрицы, $F_2(\cdot,\cdot), F_3(\cdot,\cdot,\cdot)$ – линейные по каждому аргументу вектор-функции, $M(u) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(t,x)\,dx$ — среднее по переменной x на отрезке $[0,\, 2\pi]$, ε — малый параметр.

Краевое условие:

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \qquad (2)$$

Рассмотрен вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия системы (1), (2).

В критическом случае, когда A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$, получена квазинормальная форма [2] системы (1), (2):

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda\xi + \sigma\xi|\xi|^2 + \gamma M(\xi), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) = \xi(\tau, x) \qquad (4)$$

где $\tau = \varepsilon t$, коэффициенты λ, σ, γ выражаются через исходные параметры системы (1), (2).

Для конкретных наборов коэффициентов из (4) и φ построены графики найденных кусочно-постоянных решений [3, 4] вида:

$$\xi(\tau,x)=\rho(x)e^{i\beta\tau},\quad \rho(x)=\begin{cases}\rho_1 e^{i\varphi_1}, & x\in[0,\alpha),\\ \rho_2 e^{i\varphi_2}, & x\in[\alpha,2\pi),\end{cases}$$

где $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\varphi$.

Литература

1. Глызин С. Д. Кусочно–постоянные режимы работы полносвязных сетей и их предельных интегро–дифференциальных систем / С.Д. Глызин, С.А. Кащенко, Д.С. Костерин // Модел. и анализ информ. систем. — 2025. — Т. 32, № 2. — С. 206—224.

2. Глызин С. Д. Локальные методы анализа динамических систем: учебное пособие / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов // Яросл. гос. ун–т — Ярославль: ЯрГУ. — 2006. — С. 1–20.

3. Glyzin S. D. Dynamical Properties of Periodic Solutions of Integro–Differential Equations / S.D. Glyzin, S.A. Kashchenko, D.S. Kosterin // Rus. J. Nonlin. Dyn. — 2025. — T. 21, № 1. — P. 52–54.

4. Кащенко С. А. Семейство кусочно-гладких решений одного класса пространственно–распределенных уравнений / С.А. Кащенко, Д.С. Костерин, С.Д. Глызин // СМФН. /— 2023. — Т. 69, № 2. — С. 263–275.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СЕМЕЙСТВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д.С. Жалукевич (Минск, Институт математики НАН Беларуси)
den.zhal@yandex.by

В данной работе ищутся преобразования эквивалентности семейств квазилинейных уравнений второго порядка функции двух переменных

$$A(t,x)u_{tt}+2B(t,x)u_{tx}+C(t,x)u_{xx}=f(t,x,u,u_t,u_x),\qquad (1)$$

где A,B,C,f — аналитические функции своих аргументов. То есть такие инфинитезимальные преобразования зависимой и независимой переменной, которые оставляют на месте все семейство уравнений, преобразуя при этом каждое уравнение семейства в, возможно, некоторое другое уравнение этого же семейства. Такой класс

симметрий был введен независимо в работах Кингстон-Софоклеус [1-3], в работах Цеслинского [4-7] и в работах Ибрагимова-Торриси-Валенти [8,9]. В работе Кингстон- Софоклеус данный вид симметрий носит название преобразование сохраняющие форму, а в работе Ибрагимова-Торриси-Валенти преобразования эквивалентности и используется для предварительной классификации уравнений. В работах же Цеслинского данный вид симметрий носит название расширенных симметрий и использован для поиска спектрального параметра.

Теорема *Квазилинейное уравнение (1) имеет следующую классификацию:*

1. Если $B^2 - AC > 0$ *— гиперболический тип*

$$u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x); \tag{2}$$

2. Если $B^2 - AC = 0$ *— параболический тип*

$$u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x); \tag{3}$$

3. Если $B^2 - AC < 0$ *— эллиптический тип*

$$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x). \tag{4}$$

Исходя из теоремы вместо семейства уравнений (1) будут исследованы смейства уравнений (2)-(4).

Литература

1. Kingston J.G. On point transformations of a generalized Burgers equation. / J.G Kingston, C. Sophocleous // Phys. Lett. A — 1991 — V. 155 — pp. 15–19.

2. Kingston J.G On form-preserving point transformations of partial di?erential equations. / J.G Kingston, C. Sophocleous // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998; — V. 31: — pp. 1597–1619.

3. Kingston J.G Symmetries and form-preserving transformations of one- dimensional wave equations with dissipation. / J.G Kingston, C. Sophocleous // Int. J. Non-Lin. Mech. — 2001 — V. 36: — pp. 987–997.

4. Cieslinski J.L. Lie symmetries as a tool to isolate integrable geometries. Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems / J.L. Cieslinski // Proceedings of the 7-th NEEDS conference, Baia Verde, Gallipoli Italy — June 1991 — pp. 260-268

5. Cieslinski J.L. Group interpretation of the spectral parameter in the case of nonhomogeneous, non-linear Schr?dinger system. / J.L.

Cieslinski // Journal of Mathematical Physics — 1993 V. 34(6) — pp. 2372-2384. DOI:10.1063/1.530122.

6. Cieslinski J.L Sym A. On integrability of the inhomogeneous Heisenberg ferromagnet model: examination of a new test. / J.L Cieslinski, P Goldstein // Journal of Physics A: Mathematical and General — 1994 — V. 27(12) — pp. 1645-1664. DOI:10.1088/0305-4470/26/6/017.

7. Cieslinski J.L Spectral parameter as a group parameter. / J.L Cieslinski, D.S. Zhalukevich // Symmetry — 2022 — V. 14(12) P. 2577. DOI:10.3390/sym14122577.

8. Ibragimov N.H Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$. / N.H Ibragimov, M. Torrisi, A. Valenti // Journal of Mathematical Physics — 1991 — 32 — pp. 2988-2995. DOI:10.1063/1.529042.

9. Torrisi M. On equivalence transformations applied to a nonlinear wave equation. Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics / M. Torrisi , R. Tracina , A. Valenti // Kluwer Academic Publishers, Netherlands — 1993 — pp. 367-375.

РЕДУКЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д.С. Жалукевич (Минск, Институт математики НАН Беларуси)
den.zhal@yandex.by

В данной работе проводится симметрийная редукция [1-4] для семейств квазилинейных уравнений:

$$u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x), \tag{1}$$

$$u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x), \tag{2}$$

$$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x). \tag{3}$$

Для семейств уравнений (1)-(3) справедливы следующие леммы:

Лемма 1. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений (1) принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:*

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

где функции $\tau(t)$, $\xi(x)$, $\eta(t,x,u)$ *являются произвольными.*

Лемма 2. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений (2) принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:*

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

где функции $\tau(t)$, $\xi(t,x,u)$, $\eta(t,x,u)$ *являются произвольными.*

Лемма 3. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений (3) принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:*

$$X = \tau(t,x)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

где функции $\tau(t,x)$, $\xi(t,x)$, $\eta(t,x,u)$ *являются произвольными.*

Литература

1. Hydon P.E. Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide / P.E. Hydon. — New York. : Cambridge University Press, 2000. — 213 p.

2. Ibragimov N.H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics / N.H. Ibragimov. — U.S.A. : Springer, 1985. — 394 p.

3. Ovsiannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations / L.V. Ovsiannikov. — New York : Academic, 1982. — 399 p.

4. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations / P.J. Olver. — New York : Springer-Verlag, 1993. — 501 p.

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ БИЛЛИАРДОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ ДУГАМИ СЕМЕЙСТВ СОФОКУСНЫХ ПАРАБОЛ

А.В. Зайцева (Москва, МГУ)
AnastasiaZay12@mail.ru

Рассмотрим область на плоскости, ограниченную дугами софокусных парабол. Зададим направление силы тяжести перпендикулярно директрисам парабол из этого семейства. Тогда биллиард с гравитационным потенциалом в данной области является интегрируемым. В параболических координатах интегралы данной системы имеют следующий вид.

$$H = \frac{\lambda_1\mu_1^2}{2(\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{\lambda_2\mu_2^2}{2(\lambda_2-\lambda_1)} - g(\lambda_1+\lambda_2),$$

$$F = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)}\mu_1^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)}\mu_2^2 - 2g\lambda_1\lambda_2.$$

Интегрируемость системы позволяет в случае компактных областей возможного движения вычислить инварианты Фоменко–Цишанга — инварианты лиувиллевой эквивалентности. Были разобраны все возможные области, ограниченные семейством софокусными параболами. Таких областей 9. Для каждого случая исследованы области возможного движения, вычислены инварианты Фоменко–Цишанга, кодирующие слоение Лиувилля соответствующей изоэнергетической поверхности. Для каждой области вычислены бифуркационные диаграммы, выбраны пары циклов, вычислены метки. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для гравитационных биллиардов в областях Ω_1–Ω_9 существуют всего три типа неэквивалентных слоений Лиувилля неособых изоэнергетических поверхностей.*

Литература

1. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. — Ижевск: РХД, 1999.

2. Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде / В.В. Козлов // Прикладная математика и механика. — 1995. – Т. 59, вып. 1.

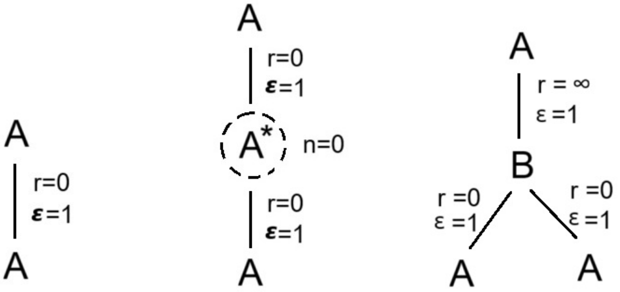


Рис. 1: Три типа слоений Лиувилля

3. Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам / М.П. Харламов // Нелинейная динамика. — 2010. — Т. 6, № 4. — С. 769—805.

4. Фокичева В.В. Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик / В.В. Фокичева // Матем. сб. — 2015. — 206:10. — С. 127-176.

5. Кобцев И.Ф. Эллиптический биллиард в поле потенциальных сил: классификация движений, топологиический анализ / И.Ф. Кобцев // Матем. сб. — 2020. — 211:7. — С. 93-120.

ДИНАМИКА АСИММЕТРИЧНОГО ФЛЮГЕРА С ДЫРКОЙ В РАЗРЕЖЕННОМ ПОТОКЕ

Н.Р. Зиатдинов (Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова)
nail.ziatdinov@math.msu.ru

Мы изучаем движение маятника на плоскости, являющегося массивным стержнем, прикрепленным к опорной точке, вокруг которой он может свободно вращаться. В стержне проделана дырка, и он помещен в поток невзаимодействующих точечных частиц, движущихся с одной и той же фиксированной ненулевой скоростью. Частицы взаимодействуют со стержнем не более одного раза по закону бильярдного отражения. Наша цель - дать полное описание фазового портрета такой модели. Предполагаем, что силы гравитации нет.

С помощью изменения масштаба длины, добьемся, чтобы «большая» часть флюгера от опорной точки имела длину 1, а «меньшая» — $(-a_0)$, а стержень поделён на две части: $[a_0, a_1]$ и $[a_2, 1]$ при

$a_i \in (-1,1)\ \forall i$ и $a_0 < a_1 < a_2$, тогда общая длина стержня будет $1-a_2+a_1-a_0$, аналогичным изменением масштаба времени сделаем величину скорости потока — единицой.

Обозначая через $x, x = x(t)$, угол между большей частью маятника (от опорной точки) и направлением вектора скорости потока, придем в следующему уравнению динамики

$$\ddot{x} = -\kappa\Big(\int_{a_0}^{a_1}(\sin x + r\dot{x})|\sin x + r\dot{x}|rdr + \int_{a_2}^{1}(\sin x + r\dot{x})|\sin x + r\dot{x}|rdr\Big), \tag{1}$$

где $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ первая и вторая производная от x по t, а параметр $\kappa = \frac{2\rho}{I}$, где ρ - плотность потока, а I моменту инерции маятника.

Интегрирование происходит по-разному в зависимости от значений x и $\dot{x}$. Аналогично [1] имеют место восемь случаев:
(a) $\sin x + r\dot{x} \geqslant 0\ \forall r$.

$$\begin{aligned}\ddot{x} = -\kappa\Big[&\frac{1-a_2^2+a_1^2-a_0^2}{2}\sin^2 x + 2\frac{1-a_2^3+a_1^3-a_0^3}{3}\dot{x}\sin x.\\ &+ \frac{1-a_2^4+a_1^4-a_0^4}{4}\dot{x}^2\Big]\end{aligned} \tag{2}$$

(b$_1$) $\sin x + a_0\dot{x} < 0$ и $\sin x + r\dot{x} \geqslant 0$ для остальных r.

$$\begin{aligned}\ddot{x} = -\kappa\Big[&\frac{1-a_2^2+a_1^2+a_0^2}{2}\sin^2 x + 2\frac{1-a_2^3+a_1^3+a_0^3}{3}\dot{x}\sin x.\\ &+ \frac{1-a_2^4+a_1^4+a_0^4}{4}\dot{x}^2 - \frac{1}{6}\,\frac{\sin^4 x}{\dot{x}^2}\Big]\end{aligned} \tag{3}$$

(b$_2$) $\sin x + \dot{x} < 0$ и $\sin x + r\dot{x} \geqslant 0$ для остальных r.

$$\begin{aligned}\ddot{x} = -\kappa\Big[&\frac{-1-a_2^2+a_1^2-a_0^2}{2}\sin^2 x + 2\frac{-1-a_2^3+a_1^3-a_0^3}{3}\dot{x}\sin x.\\ &+ \frac{-1-a_2^4+a_1^4-a_0^4}{4}\dot{x}^2 + \frac{1}{6}\,\frac{\sin^4 x}{\dot{x}^2}\Big]\end{aligned} \tag{4}$$

(b$_3$) $\sin x + a_0\dot{x} < 0,\ \sin x + a_1\dot{x} < 0$ и $\sin x + r\dot{x} \geqslant 0$ для остальных r.

$$\begin{aligned}\ddot{x} = -\kappa\Big[&\frac{1-a_2^2-a_1^2+a_0^2}{2}\sin^2 x + 2\frac{1-a_2^3-a_1^3+a_0^3}{3}\dot{x}\sin x.\\ &+ \frac{1-a_2^4-a_1^4+a_0^4}{4}\dot{x}^2\Big]\end{aligned} \tag{5}$$

а также в четырех других областях (d), (b_6), (b_5) и (b_4), в которых результат интегрирования с точностью до знака равен значению в случаях соответственно (a), (b_1), (b_2) и (b_3) в силу симметричности модели относительно смены знака x.

Введем новую переменную $y = \dot{x}$ и перепишем уравнение динамики в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \kappa v\,(x, y)\,, \tag{6}$$

где $v = v\,(x, y)$ с коэффициентом κ равно правой части уравнения в каждом из случаев. После этого несложно заметить, что с точностью до периода по x система имеет две особые точки: $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$, обе вырожденные. По аналогии с [2] показываем, что эти точки топологически являются фокусом и седлом в зависимости от знака коэффициента перед $\sin^2 x$.

Литература

1. Ziatdinov N.R. Dynamics of an asymmetric vane in a rarefied flow / N.R. Ziatdinov // Journal of Mathematical Sciences. — 2025. — 294. — p. 136—146.

2. Davydov A.A. Dynamics of a pendulum in a rarefied flow / A.A. Davydov, A.U. Plakhov // Regular and Chaotic Dynamics. — 2024. — 29:1. — p. 134—142.

УСКОРЕНИЕ ПОИСКА КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В РАЗРЕЖЕННЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

В.С. Зизов (Москва, МГУ)
alvadia@cs.msu.ru

Введение. Задача поиска кратчайших путей в графах является одной из фундаментальных в алгоритмической теории. Она имеет многочисленные приложения в задачах маршрутизации, анализа сетей и проектирования распределенных систем. В настоящей работе рассматривается задача поиска кратчайших путей от одного источника до всех вершин (Single Source Shortest Paths, SSSP) в ориентированном взвешенном графе.

Классический алгоритм Дейкстры и его модификации обладают хорошими теоретическими свойствами, однако при работе с крупными разреженными графами и множественными запросами их практическая эффективность оказывается ограниченной. Это привело к развитию методов, основанных на предварительной обработке графа, таких как Contraction Hierarchies, Hub Labeling и Transit Node

---

Routing. Тем не менее, данные методы либо предъявляют строгие требования к структуре графа, либо ориентированы на задачу поиска пути между фиксированной парой вершин, либо требуют значительных ресурсов памяти.

Целью настоящей работы является разработка простого и универсального метода ускорения решения задачи SSSP в ориентированных взвешенных графах произвольной структуры при сохранении корректности вычисляемых кратчайших расстояний.

Основная идея метода. Предлагается метод *Lace-graph compression (LGC)*, основанный на последовательном удалении вершин малых степеней с сохранением маршрутной достижимости. Пусть $G = (V, E)$ - ориентированный взвешенный граф. Фиксируется параметр $k \geqslant 1$. На этапе предобработки итеративно удаляются вершины $v \in V$, для которых степень $deg(v)$ (сумма полустепеней захода и исхода) не превышает k.

При удалении вершины v для каждой пары ребер (u, v) и (v, w) добавляется ребро (u, w) с весом $w(u, w) = w(u, v) + w(v, w)$, либо, если ребро (u, w) уже существует, его вес минимизируется. После завершения процедуры получается упрощенный граф $G' = (V', E')$ и множество удаленных вершин $R = V \setminus V'$.

Компоненты и программы переходов. Множество удаленных вершин R разбивается на компоненты связности C по исходному графу. Для каждой компоненты C определяется множество граничных вершин $B(C) = \{u \in V' \mid \exists v \in C : (u, v) \in E \vee (v, u) \in E\}$. В индуцированном подграфе $G[C \cup B(C)]$ решается задача SSSP от всех вершин из $B(C)$, после чего кратчайшие пути кодируются в виде компактного набора триплетов (a, b, w). Совокупность таких триплетов образует ***программу переходов*** для восстановления путей внутри удаленных компонент. Размер программы переходов линейно ограничен величиной $O(kN)$, где $N = |V|$.

Алгоритм поиска. Поиск кратчайших путей от источника s осуществляется в три этапа:

если $s \in R$, решается задача SSSP в соответствующей компоненте C для вычисления расстояний до вершин $B(C)$;

решается задача MSSP в упрощенном графе G';

выполняется дополнительная релаксация расстояний с использованием программы переходов.

Утверждение. Пусть при применении процедуры LGC удаляется вершина степени k. Тогда:

Таблица 1: Оценки сложности метода LGC

	$k=1$	$k=2$	$k \geqslant 3$
Поиск пути до границы	$O(N\log N)$	$O(N\log N)$	$O(N\log N)$
Поиск в кластере	N	$O(N)$	$O(N\log N)$
Ограничения	нет K_3	нет K_4	нет K_{k+2}

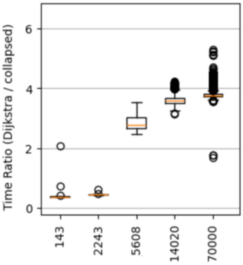


Рис. 1: Экспериментальные результаты в зависимости от размера графа (числа вершин)

При $k = 1, 2$ число вершин и число ребер графа строго уменьшаются; плотность графа при этом не возрастает.

При $k = 3$ общее число ребер графа не изменяется, однако степени оставшихся вершин увеличиваются в среднем на единицу.

При $k \geqslant 4$ число ребер, добавляемых при удалении одной вершины, равно $\frac{k^2}{2} - \frac{3k}{2}$,

и степени соседних вершин возрастают в среднем на $k-2$ каждая. В этом случае общее число ребер в графе возрастает квадратично по k, что приводит к резкому увеличению плотности графа.

Оценки сложности. В таблице 1 приведены теоретические и практические оценки сложности основных этапов алгоритма в зависимости от параметра k.

Поиск в упрощенном графе имеет сложность $O(M\log M + E')$, где $M = |V'|$, $E' = |E'|$.

Экспериментальные результаты.

Показано, что предложенная процедура сохраняет корректность кратчайших расстояний. Метод был реализован на языке C и протестирован на разреженных сетевых топологиях со средней степенью вершин 4–5. Эксперименты показывают ускорение в среднем до трех раз по сравнению со стандартной реализацией алгоритма Дейкстры.

Заключение. В работе предложен метод ускорения решения задачи SSSP в ориентированных взвешенных графах, основанный на удалении вершин малых степеней и использовании программ переходов. Отличительной особенностью метода является возможность применять его к задаче SSSP без предположений о планарности или иерархичности графа. Метод не предъявляет строгих требований к топологии графа, сохраняет корректность расстояний и демонстрирует практическую эффективность.

Литература

1. Sakumoto Y. Performance of Thorup's shortest path algorithm for large-scale network simulation / Y. Sakumoto, H. Ohsaki , M. Imase // IEICE Transactions on Communications. — 2012. — Vol. E95.B, No. 5. — P. 1592–1601.

2. Henzinger M. R. Faster shortest-path algorithms for planar graphs / M. R. Henzinger, V. King, S. Rao// Journal of Computer and System Sciences. — 1997. — Vol. 55, No. 1. — P. 3–23.

3. Klein P. N. Multiple-source shortest paths in planar graphs / P. N. Klein // Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). — 2005.

4. Geisberger R. Contraction hierarchies: Faster and simpler hierarchical routing in road networks / R. Geisberger, P. Sanders, D. Schultes // In: McGeoch C. C. (Ed.) Experimental Algorithms. — Berlin: Springer, 2008. — Vol. 5038. — P. 319–333.

АСИМПТОТИКА L_2-МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ПРОЦЕССОВ ДУРБИНА[1]

Я.С. Зонова (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН)
yana_kazinets@mail.ru

Доклад посвящён задаче нахождения точной асимптотики малых уклонений в норме L_2 для одного класса процессов Дурбина. Рассмотренные процессы возникают как предельные при проверке выборки на p-гауссовское распределение при $p > 1$ в случае, когда параметры распределения оцениваются по выборке. При $p = 2$ эта задача была решена ранее в [1].

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).

С помощью разложения Кархунена–Лоэва задача сводится к задаче об асимптотике спектра ковариационных операторов рассматриваемых процессов, которая, в свою очередь, сводится к задаче на собственные значения интегро-дифференциального оператора второго порядка.

Уравнения для собственных чисел содержат интегралы от быстро осциллирующих функций с медленно меняющимися амплитудами. Мы показываем, что эти амплитуды удовлетворяют условиям из работы [1], что позволяет получить асимптотические разложения для интегралов. С их помощью находится трёхчленная асимптотика собственных чисел, из которой окончательный результат получается с помощью принципа сравнения Wenbo Li [2].

Доклад основан на совместной работе с А.И. Назаровым [3].

Литература

1. Назаров А.И. Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца–Кифера–Вольфовица / А.И. Назаров, Ю.П. Петрова. // Теор. вер. и её примен. — 2015. — Т. 60, № 3. — С. 482–505.

2. Li W.V. Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms / W.V. Li. // Journ. Theor. Probab. — 1992. — Vol. 5, № 1. — P. 1–31.

3. Зонова Я. С. О точной асимптотике L_2-малых уклонений для одного семейства процессов Дурбина / Я.С. Зонова, А.И Назаров. // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2025. — Т. 544. — С. 154-169.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ СПЕКТРА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ, ВГЛТУ)
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Для линейной стационарной системы управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

где $x = x(t)$, $u = u(t)$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$; $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; $t \in [t_0, t_k]$, задача назначения спектра состоит в следующем:

для произвольно заданных чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ требуется построить такую обратную связь

$$u = Kx, \tag{2}$$

чтобы спектр матрицы $A + BK$ совпадал с $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, то есть, чтобы

$$\det(A + BK - \lambda_j\, I) = 0. \tag{3}$$

Комплексные λ_j должны быть комплексно сопряженными.

Решается уравнение

$$(A + BK)v_j = \lambda_j v_j, \tag{4}$$

относительно $v_j = v(\lambda_j)$ и K, причем, вначале строится набор из n линейно независимых векторов v_j, затем находятся компоненты матрицы K.

Цель работы – максимально упростить решение задачи (1)-(3), для этого создан алгоритм построения n линейно независимых собственных и присоединенных элементов v_j матрицы $A + BK$ такой, применение которого требует лишь решения систем линейных алгебраических уравнений и проверки линейной независимости построенных векторов на последнем шаге алгоритма.

В случае простых значений $\lambda_j, \quad j = 1, 2, ..., n$, в уравнении (4) вводится обозначение

$$Kv_j^0 = f_j, \quad (v_j^0 = v_j). \tag{5}$$

Уравнение (4) записывается как $Bf_j = (\lambda I - A)v_j^0$, которое решается относительно f_j:

$$f_j = B^-(\lambda_j I - A)v_j^0 + z_j^0, \tag{6}$$

с некоторым произвольным $z_j^0 = z^0(\lambda_j)$ при выполнении условия корректности

$$Q_0(\lambda_j I - A)v_j^0 = 0. \tag{7}$$

В результате соотношение (3) заменяется эквивалентно системой из трех соотношений (5), (6) и (7).

К уравнению (7) применяется алгоритм, заключающийся в поэтапной замене неизвестного при λ_j:

$$Q_{i-1}v_j^{i-1} = v_j^i, \quad i = 1,\, 2,\, \dots . \tag{8}$$

Тогда (8) вместе с (7): $Q_{i-1}Av_j^{i-1} = \lambda_j v_j^i$ образует систему, решение которой

$$v_j^{i-1} = F_i(\lambda_j, v_j^i) + z^{i-1} \tag{9}$$

при условии корректности

$$Q_i(\lambda_j, v_j^i) = 0. \tag{10}$$

И так далее ... . При $Q_p = (0)$ (это условие полной управляемости системы (1)) из (9) при $\forall v_j^p, z^p$ находятся v_j^{i-1}, v_j^{i-2}, ..., v_j^0 с линейно независимыми $v_j^0 = v(\lambda_j)$. По формуле (6) восстанавливается f_j и из (5) находятся компоненты матрицы K.

Литература

1. Зубова С.П. Алгоритм построения матриц обратной связи в задаче размещения спектра для линейной системы управления / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Автоматика и Телемеханика. — 2025. — № 12. —С. 42–65.

2. Зубова С.П. Решение задачи размещения спектра для линейной системы управления, замкнутой обратной связью / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60. № 6. — С. 798–816.

3. Zubova S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Mathematical Methods in the Applied Sciences. AIMS Press, New York. — 2021. — V. 44, № 15. — P. 11998–12009.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ТРЁХЗВЕННОМ ГРАФЕ

К.П. Зуев, И.В. Садовничая (Москва, МГУ)
kizuev02@gmail.com, ivsad@yandex.ru

Рассматривается граф–звезда с тремя ребрами одинаковой длины l. Предполагается, что на каждом из ребер задан оператор Штурма–Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением

$$l(h) = -h'' + q(x)h$$

и краевыми условиями Дирихле. Потенциал предполагается сингулярным: $q = u'$, $u \in L_2[0, l]$. А именно, параметризуем каждое ребро вещественным параметром x_j, изменяющимся от 0 до l,

---

причем значение параметров l соответствует вершине, инцидентной всем трем ребрам. В свободных концах поставим условия Дирихле: $h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$, а в общей вершине — условие непрерывности $h_1(l_1) = h_2(l_2) = h_3(l_3)$ и условие Кирхгофа

$$h_1^{[1]}(l_1) + h_2^{[1]}(l_2) + h_3^{[1]}(l_3) = 0.$$

Здесь через $h^{[1]} = h' - uh$ обозначена *квазипроизводная*. В случае нулевого потенциала считаем $u = 0$, где u — первообразная потенциала, тогда квазипроизводная, очевидно, совпадает с обычной: $h^{[1]} = h'$.

Заметим, что спектральную задачу на графе можно легко свести к системе $-\mathbf{h}'' + \mathbf{q}(x)\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}$, где

$$\mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}(x) = \operatorname{diag}\{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}.$$

В работах [1]–[2] были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора. Настоящий доклад посвящен вопросам базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $L_{\mathbf{u}}$ — оператор, порожденный дифференциальным выражением $\ell(\mathbf{h})$, где $\ell(\mathbf{h}) = -(\mathbf{h}^{[1]})' - \mathbf{u}\mathbf{h}^{[1]} - \mathbf{u}^2\mathbf{h}$, и краевыми условиями

$$\begin{cases} h_1(0) = 0, \\ h_2(0) = 0, \\ h_3(0) = 0, \\ h_1(l) = h_2(l) = h_3(l), \\ h_1^{[1]}(l) + h_2^{[1]}(l) + h_3^{[1]}(l) = 0. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{u} = \operatorname{diag}\{u_1, u_2, u_3\}$, $q_k = u_k'$. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора образует базис Рисса в пространстве $\mathfrak{H} = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi]$.

Литература

1. Зуев К.П. Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде. I / К.П. Зуев // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 2. С. 162—176.

2. Зуев К.П. Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом

на графе-звезде. II / К.П. Зуев // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 3. С. 293—304.

3. Zuev K.P. On the Riesz Basis Property of the Root Functions for a Sturm–Liouville Operator with a Singular Potential on a Star Graph / K.P. Zuev, I.V. Sadovnichaya // Lobachevskii journal of mathematics. 2026 (accepted for publication).

ДРОБНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО МАГИСТРАЛЬНОГО ПОТОКА

М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов,
Дж. Муносибшоев (Душанбе, Таджикистан, ЦИРНЦТ НАНТ)
ilolov.mamadsho@gmail.com

1. Рассматривается дробная стохастическая модель для описания стационарного магистрально-транспортного потока. Стационарность потока означает, что на участке магистрали фиксированной длины не имеются въезды и выезды. Подобная стохастическая модель с целым порядком производной изучена в работе [1]. Связь дробных производных и стохастического транспорта подробно исследована в [2], где отмечено, что "нет замены математическому языку дробных производных для описания и изучения физического процесса стохастического переноса". Близкие вопросы были предметом анализа в публикациях [3, 4, 5]

2. Пусть $\mathcal{M} = (\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$-полное вероятностное пространство, $B(t)$-стандартное броуновское движение определенное на пространстве $\mathcal{M}$. Пусть $\mathbb{X}_t^2 = L^2(\mathbb{X}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ является пространством $\mathbb{F}$-измеримых и квадратично интегрируемых функций $f : X \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_2 = (\mathbb{E}[f^2])^{1/2}.$$

Определение 1. ([6]). Пусть $q \in (0,1)$ и пусть $\varphi(x)$-непрерывная функция. Тогда интеграл от $\varphi(x)$ относительно $(dt)^q$ задается равенством

$$\int_0^t \varphi(s)ds^q = q\int_0^t (t-s)^{q-1}\varphi(s)ds. \tag{1}$$

Пусть H-сепарабельное гильбертово пространство и $\{e_i, i \geqslant 1\}$-полная ортонормальная система в H, т.е.

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i.$$

Из свойства ортонормальности следует, что $\{B_t : i \geqslant 1\}$ является семейством независимых стандартных одномерных броуновских движений. Тогда

$$B_t(x) = \sum_{i=1}^{\infty} < x, e_i > b_i(t),$$

где $\{b_i(t), i \geqslant 1\}$ является семейством одномерных броуновских движений.

Определение 2. Пусть $A^2([0,T] \times \mathbb{X}, H)$ является гильбертовым пространством всех H-значных, $\mathcal{F}_t$-адаптированных и измеримых функций $f(t,\omega)$ удовлетворяющих условию $\mathbb{E}\int_0^T \|f(t)\|^2 dt < \infty$. Для каждого $f \in A^2([0,T] \times \times \mathbb{X}, H)$ определим

$$\int_0^T < f(t), dB_t >\equiv \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T < f(t), e_i > dB_t(e_i),$$

где $e_i, i \geqslant 1$ является полной ортонормальной системой в H.

Определение 3. Пусть $L_2(H)$-гильбертово пространство всех операторов Гильберта-Шмидта на H с нормой $\| \cdot \|_{HS}$ и пусть $A^2([0,T] \times \mathbb{X}, L_2(H))$ будет гильбертовым пространством всех $L_2(H)$-значных $\mathcal{F}_\tau$-адаптированных измеримых функций $F(t,\omega)$ удовлетворяющих $E\int_0^T \|F(t)\|_{HS}^2 dt < \infty$. Для каждого $F \in A^2([0,T] \times \mathbb{X}, L_2(H))$ на H определен H-значный стохастический интеграл через равенство

$$< \int_0^T F(t) dB_t, x >= \int_0^T < F^*(t)x, dB_t > \text{ для любой} x \in H, \qquad (2)$$

где $F^*(t)$-сопряженный к $F(t)$ оператор.

3. С учетом формул (1), (2) и соответствующих определений из предыдущего пункта сформулируем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $f : [0,T] \times \mathbb{X} \to H$*-измеримая и* $\{\mathcal{F}_t\}$*-адаптированная функция удовлетворяющая условию* $E\int_0^t \|f(t)\|^{2P} dt \leqslant \infty$ *и* $F : [0,T] \times \mathbb{X} \to L_2(H)$*-измеримая и* $\|\mathcal{F}_t\|$*-адаптированная оператор-функция с условием*

$$E\int_0^t \|F(t)\|_{HS}^{2P}dt \leqslant \infty.$$

Тогда выполнены оценки

$$E\left(\int_0^T < f(t), dB_t >\right)^{2P} \leqslant C_1\left\{\int_0^T (E\|f(t)\|^{2P})^{1/P}dt\right\}^P$$

и

$$E\left\|\int_0^T f(t), dB_t\right\|^{2P} \leqslant C_2\left\{\int_0^T (E\|F(t)\|_2^{2P})^{1/P}dt\right\}^P$$

где C_1, C_2 постоянные зависящие только от P.

Лемма 2 (Неравенства Гельдера). *Пусть f и g функции в $L^P[0,T]$ и $p \geqslant 1$. Тогда*

$$\left(\int |fg|dx\right)^P \leqslant \int |f|^P dx \left(\int |g|^{P|P-1|}dx\right)^{P-1}.$$

4. Рассмотрим дробное стохастическое дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H вида

$$dX(t) = AX(t)dt + Ph(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dB + \eta(t, X(t))dt^q, \quad (3)$$

$$X(0) = X_0 \in H, 0 \leqslant t \leqslant T$$

где $0 < 1 < 1$.

Пусть для коэффициентов уравнения (3) выполняются следующие условия:

H1. Линейный замкнутый оператор A является генератором полугруппы линейных ограниченных операторов U_t.

H2. $-A$ является положительным самосопряженным линейным оператором таким, что существует обратный ядерный оператор A^{-1}, более того, для некоторого $\delta > 0$ выполнены неравенства

$$0 < lim\ inf\ \lambda_i/i^{1+\delta} \leqslant lim\ sup\ \lambda_i/i^{1+\delta} < \infty$$

где $\{\lambda_i\}$-множество собственных значений $-A$; $\{e_i\}$ является соответствующим ортонормальным семейством собственных векторов.

H3. P является линейным оператором таким, что

$$\mathcal{D}(P^*) \supset \mathcal{D}(A) \text{ и } \|P^* e_i\| \leqslant \gamma \lambda_i^{\alpha},$$

где γ-некоторая постоянная и $\alpha < 1 - 1/(2(+\delta))$ или, если P и A коммутируют на $\mathcal{D}(A)$, то требуется, что

$$\mathcal{D}(P) \supset \mathcal{D}(A) \text{ и } \|P e_i\| \leqslant \gamma \lambda_i^{\alpha},$$

H4. Отображение $h : [0, T] \times H \to H$ непрерывное и равномерно по t удовлетворяет неравенство $\|h(t, x) - h(t, y)\| \leqslant C_1 \|x - y\|$ для всех $x, y \in H$.

H5. Отображение $\sigma : [0, T] \times H \to L(H)$ непрерывное и равномерно по t удовлетворяет неравенство $\|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leqslant C_2 \|x - y\|$ для всех $x, y \in H$.

H6. Отображение $\eta : [0, T] \times H \to H$ непрерывное и равномерно по t удовлетворяет неравенство $\|\eta(t, x) - \eta(t, y)\| \leqslant C_3 \|x - y\|$ для всех $x, y \in H$.

Здесь C_1, C_2, C_3 произвольные положительные постоянные.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия H1-H6. Тогда задача Коши (3) для любой* $X_0 \in \mathbb{X}^2$ *имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы. На первом этапе надо устанавливать эквивалентность задачи Коши (3) и следующего дробного интегрального уравнения

$$X(t) = U_t X_0 + \int_0^t U_{t-s} b(s, X_s) ds + \int_0^t U_{t-s} \sigma(s, X_s) dB_s +$$

$$+ \int_0^t (t - s)^{q-1} U_{t-s} \eta(s, X_s) ds.$$

Далее обозначим через $\mathcal{R}^p$-банахово пространство всех измеримых и адаптированных H-значных определенных на $[0.T] \times \mathbb{X}$ с нормой

$$\|X\|_T = \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} E\|X(t)\|^p \right\}^{1/2p} < \infty.$$

Далее, пусть R_0^p-замкнутое подпространство $\{X \in R^p : X(0) = X_0\}$. Чтобы избавиться от скобок далее мы будем X_t вместе $X(t)$. Определим отображение $\Phi : R_0^p \to R_0^p$ с помощью равенства

$$\Phi(Y)_t = U_t X_0 + \int_0^t U_{t-s} b(s, Y_s) dB_s + \int_0^t U_{t-s} P h(s, Y_s) ds +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{q-1} U_{t-s} \eta(s, y_s) ds. \qquad (4)$$

Стохастический интеграл корректно определен. U_{t-s} является оператором Гильберта-Шмидта для всех $s \leqslant t$. Это свойство и условие Липшица на σ обеспечивают существование интеграла

$$I(t-\varepsilon_n) = \int 0t - \varepsilon_n U_{t-s} \sigma(s, Y_s) dB_s$$

для $\varepsilon_n > 0$. Далее, $I(t-\varepsilon_n)$ сходится по норме при $\varepsilon_n \to 0)$.

Второй и третий интеграл в (4) также существуют с учетом лемм 1, 2. На следующем этапе применяется теорема о неподвижной точке для оператора $\Phi(Y_t)$ с учетом следующей оценки

$$E\|\Phi(Y)_t - \Phi(Z)_t\|^{2P} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2P-1} E\| \int_0^t U_{t-s} [\sigma(s, Y_s) - \sigma(s, Z_s)] dB_s \|^{2P} +$$

$$+ 2^{2P-1} E\| \int_0^t U_{t-s} P [h(s, Y_s) - h(s, Z_s)] ds \|^{2P} +$$

$$+ 2^{2P-1} E\| \int_0^t (t-s)^q [\eta(s, Y_s) - \eta(s, Z_s)] ds \|^{2P}.$$

Все три члена в правой части находят свою оценку в силу свойств полугруппы и результатов лемм 1, 2.

5. Абстрактные результаты полученные здесь находят применение к задаче о магистральном стохастическом потоке с учетом того, что для оператора

$$AX_t = \frac{d^2 X_t}{dx^2} - C_0 \frac{dX_t}{dt}$$

можно построить соответствующую полугруппу, как частный случай U_t.

Литература

1. Вейтс Е. Стохастическое уравнение теплопроводности для стационарного магистрального потока / Е. Вейтс // — Теория вероятн. и ее применен., 1992. — Т. 37, № 1. — С. 153—156.

2. Chukbar K.V. Stochastic transport and fractional derivatives / K.V. Chukbar // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1995. — V. 108, №11. — 1875—1884 pp.

3. Ilolov M. et al. On the efficiency of proton exchange membrane electrolyzer: Numerical analysis / Ilolov M., Kabir Sh.O., Ilolov A.M., Rahmatov J.Sh., Rasulov S. // Journal of Applied Data Analysis and Modern Stochastic Modelling. 2005. — V. 2 №1. — 6—16 pp.

4. Ilolov M., Rahmatov Jamshed Sh. Inverse Problems of Geotermics / Ilolov M., Rahmatov Jamshed Sh. // Journal of Applied Data Analysis and Modern Stochastic Modelling. 2024. — V. 1 №2. — 1—7 pp.

5. Ilolov M. The Exact Wave Periodic Solutions for Some Generalized Bussinesque Equations with Constant Deviating Arguments / Ilolov M., Safarov Dzh. // Journal of Applied Data Analysis and Modern Stochastic Modelling. 2024. — V. 1 №2. — 94—103 pp.

6. Jumairie G. On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to $(dt)^{\alpha}$ / G. Jumairie // Appl. Math. Lett. 2005. — V. 18, — 739—746 pp.

О ПОЛНОТЕ И МИНИМАЛЬНОСТИ ВЫРОЖДЕННОЙ ВЕСОВОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ С ИСКЛЮЧЕНИЕМ В ГРАНД ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА[1]

[1]М.И. Исмайлов, [2]Ч.М. Гасанова, [3]С.А. Нуриева
([12]Баку, [1]Азербайджанский Государственный Университет нефти и промышленности, Гянджа, [2]Гянджинский Государственный Университет, [3]Азербайджанский Университет туризма и менеджмента)
migdad-ismailov@rambler.ru, Chinareh@gmail.com
sada.nuriyeva@inbox.ru

Работа посвящена изучению полноты и минимальности в гранд-пространствах Лебега весовой системы экспонент с исключенным произвольным элементом.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Азербайджанского Научного Фонда — Грант № AEF-MGC-2025-1(54)-20/03/1-M-03.

В [1] устанавливается, что условие $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ является необходимым и достаточным условием базисности системы $\left\{|t|^{\alpha} e^{int}\right\}_{n\in Z}$ в $L_2(0,2\pi)$. Полнота и минимальность системы полученной при исключении произвольного элемента системы $\left\{|t|^{\alpha} e^{int}\right\}_{n\in Z}$ в $L_2(0,2\pi)$ изучалась в [2, 3]. Для произвольной весовой функции критерий полноты и минимальности в $L_2(0,2\pi)$ системы $\left\{\omega(t)e^{int}\right\}_{n\in Z\setminus\{n_1\}}$ изучалась в [3], где $n_1 \in Z$ - некоторое число. Эти вопросы в $L_p(0,2\pi)$, изучались в работах [4, 5]. В настоящей работе устанавливается критерий полноты и минимальности системы $\left\{\omega(t)e^{int}\right\}_{n\in Z\setminus\{n_1\}}$ в подпространстве гранд пространства Лебега, порожденное оператором сдвига.

Пусть $L_{p),\theta}(T)$, $p > 1$, $T = [0,2\pi]$, $\theta \geqslant 0$ — обобщенное гранд-пространство Лебега, т.е. пространство измеримых на T функций $f(t)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p),\theta} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon^{\theta}}{|T|}\int_T |f(t)|^{p-\varepsilon}\,dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty.$$

Через $G_{p),\theta}(T)$ обозначается подпространство $L_{p),\theta}(T)$ функций $f \in L_{p),\theta}(T)$ таких, что

$$\|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_{p),\theta} \to 0 \text{ при } \delta \to 0,$$

где $f(t) = 0$, $t \notin T$. Ясно, что при $\theta = 0$ пространство $G_{p),\theta}(T)$ совпадает с $L_p(T)$. В работе [5] доказывается критерий полноты и минимальности системы $\left\{\omega(t)e^{int}\right\}_{n\in Z\setminus\{n_1\}}$ в $L_p(T)$. В данной работе получены критерии полноты и минимальности этой системы в $G_{p),\theta}(T)$.

Справедливы

Теорема 1. *Пусть $\omega \in G_{p),\theta}(T)$ и $n_1 \in Z$ - некоторое число. Тогда система $\left\{\omega(t)e^{int}\right\}_{n\in Z\setminus\{n_1\}}$ полна в $G_{p),\theta}(T)$ тогда и только тогда когда $\omega(t) \neq 0$ для п.в. $t \in T$ и $\frac{1}{\omega(t)} \notin \left(G_{p),\theta}(T)\right)'$.*

Теорема 2. *Пусть $\omega \in G_{p),\theta}(T)$ и $n_1 \in Z$ - некоторое число. Система $\left\{\omega(t)e^{int}\right\}_{n\in Z\setminus\{n_1\}}$ полна и минимальна в $G_{p),\theta}(T)$ тогда и только тогда, когда $\omega(t) \neq 0$ для п.в. $t \in T$, $\frac{1}{\omega(t)} \notin \left(G_{p),\theta}(T)\right)'$ и выполнено одно из условий:*

i) *существует (единственная) точка $t_0 \in T$ такая, что $\frac{t-t_0}{\omega(t)} \in \left(G_{p),\theta}(T)\right)'$;*

ii) *имеет место* $\frac{t(t-2\pi)}{\omega(t)} \in \left(G_{p),\theta}(T)\right)'$.

Литература

1. Бабенко К.И. О сопряженных функциях / К.И. Бабенко // Доклады Академии наук СССР. — 1948. — Вып. 62:2. — С. 157-160.

2. Голубева Е.С. Фреймы экспонент со степенным весом / Е.С. Голубева// Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия. —2011. — 83:2. — С. 15-25.

3. Yoon G.J., Heil C. Duals of Weighted Exponential Systems/ G.J. Yoon, C.Heil // Acta Appl Math. — 2012. — 119. — C. 97-112

4. Bilalov B.T. and Mamedova Z.V. On the frame properties of some degenerate trigonometric systems / B.T. Bilalov and Z.V. Mamedova// Dokl. Nats. Akad. Nauk Azerb. — 2012. — 68(5). — P. 14-18.

5. Shukurov A.Sh. On basis properties of weighted exponential systems with excess/ A.Sh. Shukurov // Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya. — 2018. — 24:1. — C. 14-19.

УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ГИЛЬБЕРТОВОЙ ПАРОЙ

М.В. Кабанко (Курск, КГУ)
kabankom@gmail.com

Эта работа посвящена изучению обратимости операторов, действующих в гильбертовой паре. Мы рассматриваем некоторые общие условия обратимости операторов, дествующих в регулярной гильбертовой паре, которая, в свою очередь, представляется в виде прямой суммы векторзначных последователдьностей.

Определение 1. (см. [1]) *Представлением операторной алгебры $\mathcal{A}$ называется пара (H_θ, θ), где H_θ некоторое гильбертово пространство, называемое пространством представления, а θ — гомоморфизм вида*

$$\theta : \mathcal{A} \to B(H_\theta).$$

Представление называется точным если гомоморфизм θ инъективен.

Определение 2. (см. [1]) *Представление (H_θ, θ) операторной алгебры $\mathcal{A}$ называется топологически неприводимым (или неприводимо действует в H_θ) если инвариаантными относительно $\mathcal{A}$ подпространствами пространства H_θ являются только тривиальные подпространства, т.е.* 0 *и* H_θ.

Определение 3. (см. [2]) *Два банаховых пространства* X_0 *и* X_1 *образуют банахову пару, если они непрерывно вложены в некоторое отделимое топологическое пространство* $\mathcal{X}$. *Банахова пара* $\{X_0, X_1\}$ *называется регулярной, если пересечение пространств* $X_0 \cap X_1$ *всюду плотно в пространствах* X_0 *и* X_1.

Рассмотрим гильбертову пару $\overline{H} = \left\{l_2(2^{\frac{n}{2}} G_n), l_2(2^{-\frac{n}{2}} G_n)\right\}$. Эта пара изоморфна паре $\{l_2\left(G_n\right), l_2\left(2^{-n} G_n\right)\}$ (см. [3]). Будем рассматривать условия обратимости линейных ограниченных операторов, которые действуют в гильбертовой паре $\overline{H}$. Любой такой оператор можно представить в виде

$$A = D + \sum_{k \neq 0} A_k, \tag{1}$$

где D – оператор, соответствующий главной диагонали матричного представления оператора A, а операторы A_k соответсвуют диагоналям, которые «параллельны» главной (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть оператор* A *действует в гильбертовой паре* $\overline{H}$. *Будем полагать, что диагональный оператор* D *обратим в пространстве* $l_2(G_n)$ *и выполняется неравенство*

$$\|D^{-1}\|_{l_2(G_n)} < \frac{\sqrt{2} - 1}{2\|A\|_{B(\overline{H})}}.$$

Тогда оператор A *также будет обратим в пространстве* $l_2(G_n)$.

Литература

1. Murphy G.J. C^*-algebras and operator theory / G.J. Murphy. — San Diego : Academic Press, 1990. — 286 p. URL https://www.elsevier.com/books/c-algebras-and-operatortheory/murphy/978-0-08-092496-0

2. Bergh J., Löfström J. Interpolation Spaces. An introduction /J. Berg, J. Löfström. — Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1976. — 217 p. URL https://www.math.chalmers.se/~bergh/Interpolation.pdf

3. Ovchinnikov V.I. Operator ideals and interpolation in Hilbert couples /V.I. Ovchinnikov // Вестник ВГУ. Физика. Математика. — 2014. — № 2. С. 142–161. URL http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2014/02/2014-02-13.pdf

4. Кабанко М.В. Алгебра операторов, действующих в гильбертовой паре /М.В. Кабанко // Труды математического факультета ВГУ. — 2001. — №6. — С. 54–60. URL https://doi.org/10.13140/RG.2.2.32163.98086

ДИНАМИКА БИЛЛИАРДА, ОГРАНИЧЕННОГО СОФОКУСНЫМИ ГИПЕРБОЛАМИ НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО, С ДОБАВЛЕНИЕМ ПОТЕНЦИАЛА

М.Р. Кащеев (Москва, МГУ)
mikhail.kashcheev@math.msu.ru

Плоскостью Минковского называется плоскость $\mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$. Рассмотрим семейство софокусных гипербол, которое определяется соотношением:
$\frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} = 1$, где $A + B < 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Математический биллиард — это динамическая система, описывающая движение материальной точки в некоторой области $\mathbb{R}^2$, ограниченной гладкой регулярной замкнутой кривой. При движении материальной точки будем требовать, чтобы сохранялась длина вектора скорости, а отражение на границе области совершалось по стандартному закону: угол падения равен углу отражения.

Будем исследовать на плоскости Минковского математические биллиарды, ограниченные гиперболами указанного семейства. Оказывается, такие биллиарды — интегрируемы.

Теорема 1. *Математический биллиард на плоскости Минковского, ограниченный софокусными гиперболами рассматриваемого семейства, является интегрируемым. Первые интегралы данной системы — функции*

$$\Lambda = \frac{(v_xy - v_yx)^2 - Bv_x^2 - Av_y^2}{v_x^2 - v_y^2}; \quad H = v_x^2 - v_y^2,$$

где $v = (v_x, v_y)$ — вектор скорости частицы, (x, y) — точка биллиарда.

С геометрической точки зрения функция Λ — это значение параметра каустики (гиперболы, которой касаются прямые, вдоль которых движется частица).

Будем изучать все возможные траектории при фиксированных значениях полученных первых интегралов в рассматриваемом биллиарде. Пусть биллиард ограничен двумя гиперболами, с параметрами λ_1 и λ_2, где $\lambda_1 < A$ и $\lambda_2 > -B$, и двумя прямыми, проходящими через начало координат. Пусть $M \subset Q^3$ — поверхность уровня интеграла Λ. Тогда справедливо следующее

Теорема 1. *Пример оформления определений и утверждений типа теорем, лемм.*

Утверждение 1. *При* $H \neq 0$*:*

- *при* $-\infty < \Lambda < A$*: поверхность* M *гомеоморфна тору;*
- *при* $\Lambda = A$*: поверхность* M *гомеоморфна окружности;*
- *при* $\Lambda = B$*: поверхность* M *гомеоморфна окружности;*
- *при* $-B < \Lambda < +\infty$*: поверхность* M *гомеоморфна тору;*

При значениях функций $A < \Lambda < -B$ *траекторий нет, а случай* $H = 0$ *мы рассматривать не будем.*

Оказывается, что в таком биллиарде можно ввести потенциал, то есть прибавить к первым интегралам такие функции, зависящие только от координат (x, y), что биллиард останется интегрируемым.

Литература

1. Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I / А.Т. Фоменко, А.В. Болсинов //Ижевск :Издательский дом «Удмуртский университет», — 1999. — С. 444.

2. Каргинова Е.Е. Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского / Е.Е. Каргинова // Матем. сб. — 2020. — Т. 211, № 1. — С. 3–31.

3. Пустовойтов С.Е. Топологический анализ биллиарда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле // С.Е. Пустовойтов// Матем. сб. — 2021. — Т. 212, № 2. — С. 81–105.

ГЕОМЕТРИЯ НИЙЕНХЕЙСА И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ БИЛЛИАРДЫ: СЛУЧАЙ ПЛОСКОЙ (ПСЕВДО)МЕТРИКИ[1]

В.А. Кибкало, А.Ю. Коняев (Москва, МГУ)
slava.kibkalo@gmail.com

Доклад посвящен связям двух областей математики — теории интегрируемых биллиардов на столах, ограниченных квадриками и теории проективно эквивалентных метрик. В работе А.Т.Фоменко и

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-71-10100) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

В.В.Ведюшкиной [1] приведен подробный обзор недавних результатов о таких биллиардах, причем как классических плоских, так и обобщенных: движение можно задать биллиардных книжках — введенных Ведюшкиной CW-комплексах с перестановками, склеенных из плоских столов. Такие биллиарды нашли широкое применение при топологическом моделировании интегрируемых гамильтоновых систем (ИГС) и их особенностей. А именно, широкий класс слоений Лиувилля (замыканий фазовых траекторий) реализуются как слоения Лиувилля интегрируемых биллиардов на подходящих склеенных столах. Теория топологической классификации ИГС была построена в работах А.Т.Фоменко и его научной школы, см. [2].

Вопрос дальнейшего расширения класса обобщенных биллиардов с сохранением интегрируемости остается актуален: из недавних результатов об общем виде топологического инварианта биллиардной книжки, листы которой содержат фокусы семейства квадрик, следует, что некоторые слоения таким классом не реализуются [3]. Также отметим, что знаменитая гипотеза Биркгофа о биллиардах имеет дело с биллиардами, в которых движение частицы задается евклидовой метрикой.

Новое обобщение построено после классификации пар геодезически эквивалентных метрик (геодезические совпадают как непараметризованные кривые) с применением методов геометрии операторов Нийенхеса L, разработанной в последние годы в работах А.В.Болсинова, А.Ю.Коняева и В.С.Матвеевым [4]

$$N_L(\xi,\eta) = L[L\xi,\eta] + L[\xi,L\eta] - L^2[\xi,\eta] - [L\xi,L\eta] = 0.$$

Теорема 1. *Пары геодезически согласованных плоской метрики g и оператора L на $\mathbb{R}^2$ порождают 8 семейств I-IV и Ia-IVa интегрируемых геодезических потоков с гамильтонианом H и первым интегралом F. В плоских координатах (x,y) метрика g имеет один из видов $dx^2+dy^2, dx^2-dy^2, dx\,dy$, а квадратичный интеграл F зависит от вещественных параметров.*

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j \qquad F = \frac{1}{2}K^i_q g^{qj}p_ip_j, \qquad K^i_q := L^i_q - \operatorname{tr} L\,\delta^i_q.$$

Координаты разделения этих систем ортогональны относительно обеих форм H, F и строятся по собственным значениям λ_1, λ_2 оператора L. Семейство I отвечает софокусным квадрикам в евклидовой метрике $2H = p_1^2 + p_2^2$ для параметров $a \neq b$. Семейство II определяет семейство софокусных квадрик для плоскости Минковского.

Семейства III и IV, не встречавшиеся нам в литературе, определяют семейства гипербол. Здесь $H = p_1 p_2$ и $K = \pm 1, a, b \in R$:

$$2F_{III} = -Kx^2p_1^2 - 2(Kxy - a)p_1p_2 + (1 - Ky^2)p_2^2;$$

$$2F_{IV} = -(a + Kx^2)p_1^2 - 2(Kxy - b)p_1p_2 + (a - Ky^2)p_2^2.$$

Литература

1. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. — Ижевск : Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. — 443 с, 444 с.

2. Фоменко А.Т. Биллиарды и интегрируемые системы / А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина // Успехи мат. наук. — 2023. — Т. 78, № 5. — С. 93–176.

3. Kibkalo V.A. Liouville Foliations of Confocal Billiard Books with Elliptic Boundaries / V.A. Kibkalo, M.A. Nikulin, V.V. Vedyushkina // Lobachevskii J. Math. — 2025. — Т. 46, № 3. — С. 1098–1112.

4. Bolsoniv A.V. Nijenhuis geometry / A.V. Bolsinov, A.Yu Konyaev, V.S. Matveev // Adv. Math. — 2022. — Т. 394, № 108001.

ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ ЖЁСТКИХ ФРЕЙМОВ НА ОСНОВЕ КАРДИНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И КОНСТАНТ РИССА

Е.А. Киселев, С.Н. Ушаков

(Москва, РТУ МИРЭА, Воронеж, ВГУ)

evg-kisel2006@yandex.ru, ushakowww@yandex.ru

Данная работа посвящена построению фреймов в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Скалярное произведение и норма задаются стандартно:

$$(f, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx, ||f|| = \sqrt{(f, f)},$$

где $g^*(x)$ — комплексное сопряжение. Преобразование Фурье записывается следующим образом:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

Определение 1. ([1, 2]) *Набор функций* $g_k \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$, *называется фреймом, если* $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$ *выполняются неравенства*

$$A_F||f||^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f, g_k)|^2 \leqslant B_F||f||^2,$$

где $0 < A_F, B_F < \infty$ *— некоторые постоянные.*

Если $A_F = B_F$, фрейм называется жёстким. Его главным преимуществом является наличие явной формулы для представления произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ в виде сходящегося ряда по $g_k, k \in \mathbb{Z}$ [1, 2]:

$$f = \frac{1}{A_F} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, g_k) g_k.$$

Благодаря этому, не нужно отдельно строить обратный фреймовый оператор и с его помощью двойственный фрейм.

Фреймы тесно связаны с ещё одним математическим понятием.

Определение 2. ([1, 2]) *Набор функций* $\varphi_k \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$, *называется системой Рисса, если* $\forall c \in \ell_2$ *выполняются неравенства*

$$A_R||c||^2_{\ell_2} \leqslant \left|\left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_k \right|\right| \leqslant B_R||c||^2_{\ell_2},$$

где $0 < A_R, B_R < \infty$ *— некоторые постоянные.*

Если $A_R = B_R$, то φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, — ортогональная система функций.

В данной работе рассматривается система Рисса на основе равномерных сдвигов функции Гаусса: $g(x) = \exp\left(-x^2/2\right)$. Для формулировки результатов нам понадобятся тета-функции Якоби [3]:

$$\theta_1(z, q) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)z}, \ \theta_3(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz},$$

$$\theta_2(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2n+1)z}, \ \theta_4(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nz},$$

где $z, q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$. Зададим параметр $\omega > 0$. Пусть далее $c_k^{\perp}(\omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, — набор коэффициентов, удовлетворяющих условию

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{\perp}(\omega) e^{-ikt} \right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\theta_3\left(\frac{t}{2}, \exp\left(-\omega^2/4\right)\right)}, t \in [0, 2\pi]. \qquad (1)$$

Рассмотрим 2 функции:

$$h(x,\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{\perp}(\omega) \exp\left(-\frac{(x-\omega k)^2}{2}\right),$$

$$g^{\perp}(x,\omega_1,\omega_2) = \sqrt[4]{\pi} h(x,\omega_1) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{\perp}(\omega_2) e^{i\omega_2 kx} \right).$$

Заметим, что перемножив ряды, можно представить $g^{\perp}(x,\omega_1,\omega_2)$ в виде линейной комбинации частотно-временных сдвигов функции Гаусса. Имеют место следующие ключевые факты.

Утверждение 1. ([4]) *Система функций $h(x-\omega k)$, $k \in \mathbb{Z}$, ортонормирована при любом фиксированном значении $\omega > 0$, причем условие (1) является для этого необходимым и достаточным.*

Утверждение 2. ([5]) *Система функций $g^{\perp}(x-\omega_1 k)e^{i\omega_2 mx}$, $k,m \in \mathbb{Z}$, ортонормирована при фиксированных $\omega_1, \omega_2 > 0$, удовлетворяющих условию $\omega_1\omega_2 = 4\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Утверждение 3. [6] *Пусть $g(x) \in L_2(\mathbb{R})$, причём для некоторых $C, \delta > 0$ выполняются условия*

$$|g(x)| < \frac{C}{(1+|x|)^{1+\delta}}, |\widehat{g}(\xi)| < \frac{C}{(1+|\xi|)^{1+\delta}}.$$

В этом случае функции $g(x-\alpha_1 k)e^{i\alpha_2 mx}$, $k,m \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, образуют жёсткий фрейм тогда и только тогда, когда набор функций $g(x-\omega_1 k)e^{i\omega_2 mx}$, $k,m \in \mathbb{Z}$, где $\omega_1 = 2\pi/\alpha_2, \omega_2 = 2\pi/\alpha_1$, является ортогональной системой Рисса.

Согласно этим утверждениям, построение жёсткого фрейма напрямую связано с задачей об ортонормализации системы равномерных сдвигов функции Гаусса. Для построения жёсткого фрейм, достаточно отыскать любой набор коэффициентов $\{c_k(\omega)\} \in \ell_2$, удовлетворяющий условию (1). Авторам данной работы удалось сделать это с помощью кардинальных функций.

Определение 3. ([7]) *Функция $\widetilde{\varphi}(x)$ называется кардинальной, если $\widetilde{\varphi}(m\omega) = \delta_{0,m}$, $m \in \mathbb{Z}$.*

Обычно кардинальную функцию строят из линейной комбинации равномерных сдвигов одной чётной $g(x)$, т.е. в виде

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\omega) g(x-k\omega).$$

Однако, можно взять сдвиг этой функции на величину $\beta\omega$, $|\beta| < 1$ и только потом построить функцию $\widetilde{\varphi}(x, \beta)$, удовлетворяющую соотношению (1) в виде ряда

$$\widetilde{\varphi}(x, \beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\omega, \beta) g(x - (k + \beta)\omega).$$

Будем $\widetilde{\varphi}(x, \beta)$ называть кардинальной функцией с дробным сдвигом β.

В статье [8] в явном виде построено следующее параметрическое семейство кардинальных функций с дробным сдвигом β:

$$\widetilde{\varphi}(x, \beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\omega, \beta) \exp\left(-\frac{(x - (k + \beta)\omega)^2}{2}\right),$$

$$c_k(\omega, \beta) = \frac{2\exp\left((k + \beta)^2\omega^2/2\right)}{\theta_1'\left(0, \exp\left(-\omega^2/2\right)\right)} \sum_{p=|k|}^{\infty} (-1)^p \exp\left(-\frac{(2p + 1)^2\omega^2}{8}\right),$$

где $\omega > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Наличие формулы для коэффициентов $c_k(\omega, \beta)$ вовсе не означает, что ряд для кардинальной функции с дробным сдвигом будет сходиться, во-первых при всех $x \in \mathbb{R}$, во-вторых, по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому в следующей теореме указаны оценки на скорость убывания $c_k(\omega, \beta)$.

Теорема 1. *Верны соотношения*

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{c_{k+1}(\omega, \beta)}{c_k(\omega, \beta)}\right| = e^{\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\omega^2}, \lim_{k\to-\infty} \left|\frac{c_{k-1}(\omega, \beta)}{c_k(\omega, \beta)}\right| = e^{-\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\omega^2}.$$

Следствие. *Если $|\beta| < 1/2$, то $c_k(\omega, \beta) \in \ell_2$, а если $|\beta| \geqslant 1/2$, то $c_k(\omega, \beta) \notin \ell_2$.*

Теорема 2. *Для всех неотрицательных k верно соотношение*

$$\left|\frac{c_k(\omega, 0)}{c_{k+1}(\omega, 0)}\right| > 1.$$

Таким образом, $\widetilde{\varphi}(x) \notin L_2(\mathbb{R})$ при $|\beta| \geqslant 1/2$. Поэтому далее рассматривается случай $|\beta| < 1/2$. Установлен следующий факт.

Теорема 3. *Если $|\beta| < 1/2$, то семейство сдвигов $\widetilde{\varphi}(x - k\omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, является системой Рисса. Отношение констант Рисса B_R/A_R определяется следующими формулами:*

$$\frac{B_R}{A_R} = \frac{\theta_4^2\left(2\beta\pi\tau, q^2\right)\theta_3\left(0, q\right)}{\theta_3^2\left(2\beta\pi\tau, q^2\right)\theta_4\left(0, q\right)}, 0 \leqslant |\beta| \leqslant \frac{1}{4},$$

$$\frac{B_R}{A_R}=\frac{\theta_3^2\left(2\beta\pi\tau,q^2\right)\theta_4\left(0,q\right)}{\theta_4^2\left(2\beta\pi\tau,q^2\right)\theta_3\left(0,q\right)},\ \frac{1}{4}\leqslant|\beta|<\frac{1}{2},$$

где $q=\exp\left(-\omega^2/4\right)$*,* $\tau=-i\ln q/\pi$*.*

Если применить формулы из теоремы 1 к случаю $|\beta|=1/4$, получим 2 взаимно обратных выражения:

$$\frac{B_R}{A_R}=\frac{\theta_4^2\left(\pi\tau/2,q^2\right)\theta_3\left(0,q\right)}{\theta_3^2\left(\pi\tau/2,q^2\right)\theta_4\left(0,q\right)},\ \frac{B_R}{A_R}=\frac{\theta_3^2\left(\pi\tau/2,q^2\right)\theta_4\left(0,q\right)}{\theta_4^2\left(\pi\tau/2,q^2\right)\theta_3\left(0,q\right)}.$$

Отсюда следует, что $A_R=B_R$. Тем самым, теорема 1 даёт альтернативный способ доказательства утверждения из статьи [8] о том, что при $|\beta|=1/4$ система сдвигов кардинальной функции $\widetilde{\varphi}(x-k\omega)$, $k\in\mathbb{Z}$, является ортогональной.

Подведём итог. В данной работе в явном виде построен жёсткий фрейм на основе системы частотно-временных сдвигов функции Гаусса. Для проведения данной операции, в начале была построена кардинальная функция с дробным сдвигом β, для неё было найдено отношение констант Рисса, зависящее от β. При $|\beta|=1/4$ это отношение достигло своего минимума, равного 1. Это привело к ортогональности сдвигов кардинальной функции с дробным сдвигом 1/4. При попытке обобщить этот подход возникает ряд трудностей. Так, например, не удалось построить фундаментальные сплайны нулевого и первого порядка, дробные сдвиги которых были бы ортогональными. Является ли функция Гаусса в этом смысле исключительным примером, остаётся открытым вопросом. В будущем планируется провести более детальное исследование.

Литература

1. Новиков И.Я. Теория всплесков / И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина. — М.: Физматлит, 2005. — 616 с.

2. Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases / O. Christensen. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2016. — 704 p.

3. NIST handbook of mathematical functions / F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (Eds.). — Cambridge: Cambridge University Press, 2010. — 951 p.

4. Минин Л.А. О разложении по фреймам Габора, порожденным функцией Гаусса / Л.А. Минин, И.Я. Новиков, С.Н. Ушаков // Математические заметки. — 2016. — Т. 100, № 6. — С. 951–953.

5. Киселев Е.А. Локализация оконных функций двойственных и жестких фреймов Габора, порожденных функцией Гаусса / Е.А. Киселев, Л.А. Минин, И.Я. Новиков, С.Н. Ушаков // Математический сборник. — 2024. — Т. 215, № 3. — С. 80–99.

6. Janssen A.J.E.M. Characterization and computation of canonical tight windows for Gabor frames / A.J.E.M. Janssen, T. Strohmer // J. Fourier Anal. Appl. — 2002. — № 8(1). — P. 1–28.

7. Киселев Е.А. Задача об ортонормализации и квазиинтерполяции для системы целочисленных сдвигов функции гаусса / Е.А. Киселев, Л.А. Минин, С.Н. Ушаков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2022. — № 4. — С. 76–86.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ С ГРАНИЦЫ С ОДНОРОДНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА НА КРАЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

А.В. Климишин (Москва, РУДН)
sa-sha-02@yandex.ru

В цилиндре прямоугольного сечения

$$D^{\infty} = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < +\infty\}$$

рассмотрим область $D(F, H)$, то есть часть цилиндра, ограниченную с одной стороны плоскостью $z = H$, с другой — поверхностью

$$S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y) < H\},\ F \in C^2.$$

В области $D(F, H)$ рассмотрим следующую смешанную краевую задачу продолжения

$$\begin{aligned} &\Delta u(M) = 0,\ M \in D(F, H), \\ &u|_S = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = g, \\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=0,l_x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=0,\,l_y} = 0. \end{aligned}$$

с границы S с однородными краевыми условиями второго рода на боковых гранях D. Функция источника может быть получена в виде ряда Фурье при условии $z_M < \min\limits_{(x,y)} F(x, y) < z_P$

$$\tilde{\varphi}(M, P) = -\frac{1}{2l_x l_y} C + \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=0,n^2+m^2\neq 0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m \frac{e^{-k_{nm}|z_M - z_P|}}{k_{nm}} \times$$

$$\times \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y} \cos\frac{\pi n x_P}{l_x} \cos\frac{\pi m y_P}{l_y}$$

где

$$k_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_y}\right)^2}, \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{n} \neq 0, \\ 0,5 & \text{n} = 0. \end{cases}$$

Решение задачи может быть получена в виде

$$u(M) = v(M) - \Phi(M), \quad M \in D(F, H)$$

где

$$\Phi(M) = -\int\limits_{\Pi} \left[g(P)\tilde{\varphi}(M,P)n_1(P) - f(P)\left(\nabla_P\tilde{\varphi}(M,P), \mathbf{n}_1(P)\right)\right] dx_P dy_P,$$

$\mathbf{n}_1 = (F'_x, F'_y, -1)$ и $n_1 = |\mathbf{n}_1| = \sqrt{1 + (F'_x)^2 + (F'_y)^2}$

$$v(M) = \sum_{\substack{n,m=0, \\ n^2+m^2 \neq 0}}^{\infty} \Phi_{nm}(a) e^{k_{nm}(z_M - H)} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y}.$$

$\Phi_{nm}(a)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(M)|_{M \in \Pi(a)}$:

$$\Phi_{nm}(a) = \frac{4\varepsilon_n \varepsilon_m}{l_x l_y} \int\limits_0^{l_x} \int\limits_0^{l_y} \Phi(x, y, a) \cos\frac{\pi n x}{l_x} \cos\frac{\pi m y}{l_y} dx dy.$$

Для получения численного результата поставленной задачи осуществляется ее дискретизация в предположении N_x точек по переменной x, N_y точек по переменной y. В результате дискретизации с учетом полученных выражений для $\Phi_{nm}(a)$, $\Phi(M)$ и вида функции источника, для вычисления коэффициентов Фурье для каждой пары индексов n и m, необходимо проведение следующих вычислений: суммирование ряда для φ, интегрирование по поверхности S, интегрирование по прямоугольнику $\Pi(a)$. Количество необходимых операций может быть оценено как $O(N_x N_y)^4$. В целях снижения объема вычислений представляется целесообразным выполнение некоторых из этих операций аналитически, в том числе используя свойство ортогональности полной системы функций

$$\left\{\cos\frac{\pi n x}{l_x} \cos\frac{\pi m y}{l_y}\right\}_{n,m=0}^{\infty}$$

$$\int\limits_0^{l_x} dx \int\limits_0^{l_y} dy \cos\frac{\pi n x}{l_x} \cos\frac{\pi m y}{l_y} \cos\frac{\pi n' x}{l_x} \cos\frac{\pi m' y}{l_y} = \frac{l_x l_y}{4\varepsilon_{n'}\varepsilon_{m'}}\delta_{nn'}\delta_{mm'}$$

В результате преобразований получим выражение коэффициента Фурье $\Phi_{n'm'}(a)$

$$\Phi_{n'm'}(a) = \frac{2\varepsilon_{n'}\varepsilon_{m'}}{l_x l_y k_{n'm'}} \int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y} e^{-k_{n'm'}(F(x_P,y_P)-a)} g(x_P, y_P) n_1 \cos\frac{\pi n' x_P}{l_x} \cos\frac{\pi m' y_P}{l_y} dx_P dy_P -$$

$$- \frac{2\varepsilon_{n'}\varepsilon_{m'}\pi n'}{l_x^2 l_y k_{n'm'}} \int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y} e^{-k_{n'm'}(F(x_P,y_P)-a)} f(x_P, y_P) F'_x(x_P, y_P) \sin\frac{\pi n' x_P}{l_x} \cos\frac{\pi m' y_P}{l_y} dx_P dy_P -$$

$$- \frac{2\varepsilon_{n'}\varepsilon_{m'}\pi m'}{l_x l_y^2 k_{n'm'}} \int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y} e^{-k_{n'm'}(F(x_P,y_P)-a)} f(x_P, y_P) F'_y(x_P, y_P) \cos\frac{\pi n' x_P}{l_x} \sin\frac{\pi m' y_P}{l_y} dx_P dy_P +$$

$$+ \frac{2\varepsilon_{n'}\varepsilon_{m'}}{l_x l_y} \int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y} e^{-k_{n'm'}(F(x_P,y_P)-a)} f(x_P, y_P) \cos\frac{\pi n' x_P}{l_x} \cos\frac{\pi m' y_P}{l_y} dx_P dy_P$$

в виде суммы вычисленных коэффициентов Фурье для ортогональных систем $\left\{\cos\frac{\pi n x}{l_x}\cos\frac{\pi m y}{l_y}\right\}$, $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l_x}\cos\frac{\pi m y}{l_y}\right\}$, $\left\{\cos\frac{\pi n x}{l_x}\sin\frac{\pi m y}{l_y}\right\}$.

В результате получено выражение, для вычисления которого после дискретизации требуется $O(N_x N_y)^2$ операций.

В результате проведенных аналитических преобразований, количество вычислительных операций может быть снижено на два порядка.

Полученный алгоритм вычисления коэффициентов Фурье $\Phi_{n'm'}(a)$ позволяет перейти к вычислению собственно решения поставленной задачи

$$u(M) = \sum_{\substack{n,m=0,\\ n^2+m^2\neq 0}}^{\infty} \Phi_{nm}(a) e^{k_{nm}(z_M - H)} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y} - \Phi(M),$$

$$M \in D(F, H)$$

При построении решения предполагается использование дискретных рядов Фурье, суммировать которые можно, используя модифицированный метод Хемминга.

Полученные формулы могут быть использованы для построения эффективных вычислительных алгоритмов численного решения задачи.

Литература

1. Ланеев Е.Б. Об устойчивом приближённом решении некорректно поставленной краевой задачи для уравнения Лапласа с однородными условиями второго рода на краях при неточных данных на приближённо заданной границе / Е.Б. Ланеев, А.В. Климишин // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2025. — Т. 33, № 1. — С. 57–73.

2. Ланеев Е.Б. О приближенном решении некорректно поставленной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области с однородными условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра / Е.Б. Ланеев, А.В. Климишин // Вестник российских университетов. Математика. — 2024. — Т. 29, № 146. — С. 164–175.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

К.В. Ковардаков, В.В. Максимов
(Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова)
kirill.kovardakov@math.msu.ru; vladislav.maksimov@math.msu.ru

Фильтр Калмана, безусловно, является одним из самых важных открытий в области прикладной математики в прошлом веке. Теперь этот алгоритм применяется повсеместно – от задач навигации до задач эконометрики. В своей знаменитой работе [1] Калман предложил следующую модель:

$$\begin{cases} \xi_{i+1} = F_i \xi_i + u_i, \\ \eta_i = H_i \xi_i + v_i \end{cases}$$

Здесь u_i, v_i – центрированные гауссовские шумы, не зависящие друг от друга, ξ_i – истинное значение некоторой характеристики в момент времени $t = i$, η_i – результат измерения этой характеристики нашим прибором в момент времени $t = i$. Задача состоит в оптимальной оценке ξ_i по измерениям $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{i-1}$

В настоящей работе рассматривается задача оценивания ξ_i по измерениям $\eta_k, k < i$ в более общей постановке: без предположения

гауссовости шумов и некоррелированности ошибок датчиков. Используя подходы из монографии [2], получен общий результат об аффинных оценках величин с конечными вторыми моментами:

Теорема 1. *Пусть* $\xi : \Omega \to \mathbb{C}^n, \eta : \Omega \to \mathbb{C}^p$ *– случайные векторы с компонентами из* $L^2(\mathbb{P})$. *Рассмотрим задачу поточечной минимизации квадратичной формы с матрицей квадратичной ошибки*

$$\mathbb{E}[(\xi - K\eta - l)(\xi - K\eta - l])^*] \to \min_{l\in\mathbb{C}^n, K\in M_{n\times p}}$$

Решение этой задачи существует и единственно. В частности, решение, получающееся методом наименьших квадратов, минимизирует квадратичную форму ошибки.

Принципиально важной для задачи фильтрации является идея перехода к ортогонализованной последовательности измерений (инновационной последовательности), что позволяет независимо учитывать измерения в разные моменты времени при минимизации ошибки. На основе этих соображений и аппарата псевдообратных матриц получена эффективная рекуррентная формула фильтра Калмана, не требующая никаких дополнительных предположений о структуре измерений и погрешностей. Часто бывает полезно сингулярное разложение. Известно, что всякая прямоугольная матрица $A \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$ представляется в следующем виде (это и есть одна из форм сингулярного разложения):

$$A = U\Sigma V^*$$

$U \in M_{n\times r}(\mathbb{C}),\ V \in M_{p\times r}(\mathbb{C}),\ U^*U = V^*V = I.$
$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p),\ \forall k\ \ \sigma_k > 0.$
В этом случае, псевдообратной к A назовем матрицу:

$$A^+ = V\Sigma^{-1}U^*$$

Известно, что если система уравнений $AX = B$ совместна, то тогда одно из ее решений имеет вид $X = A^+B$. Из свойств псевдообратных матриц и доказательства теоремы 1 вытекает следующее утверждение:

Теорема 2. *Рассмотрим модель Калмана для произвольных некоррелированных шумов*

$$\begin{cases} \xi_{i+1} = F_i\xi_i + G_iu_i, \\ \eta_i = H_i\xi_i + v_i \end{cases}$$

Обозначим через $\hat{\xi}_{[i|i-1]}$ наилучшую среднеквадратичную оценку ξ_i по измерениям $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{i-1}$. Тогда верно следующее рекуррентное соотношение:

$$\hat{\xi}_{[i+1|i]} = (F_i - K_\pi H_i)\hat{\xi}_{[i|i-1]} + K_\pi \eta_i$$

Матрицы K_π, при этом, находятся однозначно из условия задачи.

Литература

1. Kalman, R. (1960) A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. / R. Kalman // ASME Journal of Basic Engineering — 82 — 35-45

2. Kailath T. Linear Estimation / T. Kailath, A. H. Sayed, B. Hassibi — Prentice Hall, 2000. — 832 p.

3. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и основы алгебры. МЦНМО, 2025. — 496 с.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука — 1967. — 576 с.

МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРОВ[1]

В.Н. Колокольцов[1], **Э.Л. Шишкина**[234] ([1]Москва, НИУ ВШЭ, [2]Белгород, НИУ «БелГУ», [3]Воронеж, ВГУ, [4]Грозный, ЧГУ)
ilina_dico@mail.ru

Хорошо известно, что существует множество методов определения дробных производных и интегралов [1]. Мы рассмотрим подход, основанный на полугрупповой теории и приведем теорему об оценке приближений дробных степеней операторов.

Пусть $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — сжимающая полугруппа типа C_0 (то есть, сильно непрерывная полугруппа) на банаховом пространстве X с инфинитезимальным генератором $(A, D(A))$.

Согласно подходу Балакришнана [2], дробная степень $(-A)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ определяется по формуле

$$(-A)^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{-\alpha-1}(T_t - I)u dt, \qquad u \in D(A). \tag{1}$$

Пусть Ω — локально компактное сепарабельное метрическое пространство, в частности $\Omega = \mathbb{R}^n$ или его подмножества, снабженные евклидовой нормой.

---

[1] Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № FEGS-2023-0003).

$C_b(\Omega)$ — банахово пространство ограниченных непрерывных функций на Ω, снабженное супремум-нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$.

$C_\infty(\Omega) \subset C_b(\Omega)$ состоит из f таких, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, т.е. для всех ε существует компактное множество $K: \sup\limits_{x\notin K} |f(x)| < \varepsilon$.

Полугруппа положительного сжимающего линейного оператора $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ на $C_\infty(\Omega)$ называется **полугруппой Феллера**, если она удовлетворяет следующим условиям регулярности:

- $T_t C_\infty(\Omega) \subset C_\infty(\Omega)$, $t \geqslant 0$;
- $T_t f(x) \to f(x)$, $t \downarrow 0$, $\forall f \in C_\infty(\Omega)$.

Это обеспечивает сильную непрерывность $\|T_t f - f\| \to 0$, $t \downarrow 0$, $\forall f \in C_\infty(\Omega)$.

Хорошо известно, что каждая C_0-полугруппа T_t имеет следующую оценку:

$$\|T_t\| \leqslant M e^{mt}, \qquad 0 \leqslant t < \infty, \tag{2}$$

где $M \in \mathbb{R}$, $M \geqslant 1$.

Для любого $h > 0$ пусть $\Omega_h \subset \Omega$ — замкнутое подмножество. В базовых примерах $\Omega = \mathbb{R}^n$ и Ω_h либо совпадает с Ω, либо является решеткой в $\mathbb{R}^n$ с шагами в каждом направлении, зависящими от h. Через π_h мы будем обозначать здесь проектор $C_\infty(\Omega) \mapsto C_\infty(\Omega_h)$.

Мы рассматриваем полугруппу T_t с ее генератором A и последовательность T_t^h с генераторами A_h и покажем, что если $A_h\pi_h$ сходится к $\pi_h A$ при $h \to 0$, то $T_t^h \pi_h$ сходится к $\pi_h T_t$ и $(-A_h)^\alpha \pi_h$ сходится к $\pi_h(-A)^\alpha$ при $h \to 0$, где дробные степени заданы в виде (1) для $\alpha \in (0,1)$.

Теорема 1. *Пусть $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ — полугруппа Феллера в $C_\infty(\Omega)$ с генератором A, а B — плотное инвариантное (относительно T_t) подпространство области определения A такое, что B само является нормированным пространством относительно нормы $\|\cdot\|_B$ и*

$$\|T_t f\|_B \leqslant c(t)\|f\|_B$$

для всех f, для некоторой неубывающей непрерывной функции $c(t)$ на $\mathbb{R}_+$.

Пусть T_t^h — полугруппа Феллера в $C_\infty(\Omega_h)$ с генератором A_h и областью определения, содержащей $\pi_h B$, такая что

$$\|(A_h\pi_h - \pi_h A)f\| \leqslant \omega(h)\|f\|_B,$$

где $\omega(h) = o(1)$ *при* $h \to 0$ *(т.е.* $\omega(h) \to 0$ *при* $h \to 0$*),* $\omega(h) \in (0,1)$*.*
Тогда

1. *для любого* $t > 0$ *и* $f \in C_\infty(\Omega)$ *последовательность* $T_s^h f$ *сходится к* $T_s f$ *при* $h \to 0$ *равномерно для* $s \in [0,t]$*, в том смысле, что*
$$\sup_{s \leqslant t} ||(T_s^h \pi_h - \pi_h T_s)f|| \to 0, \qquad h \to 0$$
(в случае $\Omega_h = \Omega$ *это обычная сходимость в* $C_\infty(\Omega)$*),*

2. *если* $f \in B$*, то*
$$\sup_{s \leqslant t} ||(T_s^h \pi_h - \pi_h T_s)f|| \leqslant \omega(h)\|f\|_B \int\limits_0^t c(s)ds,$$

3. *для* $m \leqslant 0$ *в (2)*
$$\|((-A_h)^\alpha \pi_h - \pi_h(-A)^\alpha)f\| \leqslant C_1\|f\|_B \omega^\alpha(h),$$
где $C_1 = C_1(M,\alpha)$ *— некоторая константа.*

4. *для* $m > 0$ *в (2)*
$$\|((-A_h)^\alpha \pi_h - \pi_h(-A)^\alpha)f\| \leqslant C_2\|f\|_B \left(\ln \frac{1}{\omega(h)}\right)^{-\alpha},$$
где $C_2 = C_2(M,m,\alpha)$ *— некоторая константа.*

5. *если* $\|T_t\| \leqslant M(1+t^p)$*,* $p > 0$
$$\|((-A_h)^\alpha \pi_h - \pi_h(-A)^\alpha)f\| \leqslant C_3 \omega^{\frac{\alpha}{p+1}}(h)\|f\|_B,$$
где $C_3 = C_3(M,p,\alpha)$ *— некоторая константа.*

Более подробно с этими результатами можно ознакомится в [3].

Литература

1. Красносельский М.А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. — М. : Наука, 1966. — 499 с.

2. Balakrishnan A.V. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups / A.V. Balakrishnan // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — V. 91. — P. 330–353.

3. Kolokoltsov V.N. Matrix approach to the fractional calculus / V.N. Kolokoltsov, E.L. Shishkina // 2025. arXiv.2512.10330

МОДЕЛЬНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДВУХ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ СРЕД С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.Н. Коненков (Рязань, РГУ)
an.konenkov@gmail.com

Для трех модельных параболических уравнений с одной пространственной переменной изучается задача Коши для двух соприкасающихся сред. А именно, для $a_1, a_2 > 0$ положим

$$c(x) = \begin{cases} a_1, & x > 0, \\ a_2, & x < 0, \end{cases}$$

и обозначим через

$$L_1 u = \partial_t u - c(x)\partial_x^2 u,$$

$$L_2 u = \partial_t u - \partial_x(c(x)\partial_x u),$$

$$L_3 u = \partial_t u - \partial_x^2(c(x)u),$$

три модельных параболических оператора, первый — недивергентного вида, второй дивергентного, а третий – оператор Фоккера-Планка.

Для начальной функции $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ исследуется поведение решений задачи Коши

$$\begin{cases} L_i u_i &= 0 \text{ в } \mathbb{R}^2_+, \\ u_i|_{t=0} &= \varphi, \end{cases} \tag{1}$$

в случае, когда коэффициенты a_1 и a_2 сильно различаются для двух сред. С этой целью рассматривается предел $\tilde{u}_i$ решения u_i в первой среде, т.е. в области $D_+ = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, когда коэффициент a_1 фиксирован, а коэффициент a_2 для второй среды неограниченно растет.

Найдены фундаментальные решения операторов L_i, решения u_i задачи (1) выписываются явно в виде потенциала Пуассона, а затем исследуются их свойства. Фундаментальное решение для оператора L_1 приведено в [1]. Во всех трех случаях определен вид краевой задачи, решением которой является предельная функция $\tilde{u}_i$ в области D_+. Операторы L_i совпадают вне прямой $x = 0$, однако краевые задачи для $\tilde{u}_i$, $i = 1, 2, 3$, оказываются различными.

Литература

1. Коненков А.Н. Асимптотика фундаментальных решений параболических уравнений с одной пространственной переменной / А.Н. Коненков // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 4. — С. 489–497.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СОПОСТАВЛЕНИЕ БИЛЛИАРДОВ С ПОТЕНЦИАЛОМ ГУКА И БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК БЕЗ ПОТЕНЦИАЛА

Е. В. Коноплёва (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова)
ekaterina.konopleva@math.msu.ru

Рассмотрим плоский бильярд с потенциалом Гука. Это динамическая система, описывающая движение материальной точки (бильярдного шара) внутри области Ω, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. На точку действует упругий точечный потенциал Гука $W = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$, размещённый в общем фокусе семейства граничных квадрик. Параметр $k > 0$ соответствует притяжению к центру, $k < 0$ — отталкиванию.

С другой стороны, рассмотрим *бильярдную книжку* — динамическую систему, описывающую движение материальной точки в *бильярдном комплексе*. Комплекс состоит из конечного числа двумерных областей (листов), соединённых между собой по общим граничным отрезкам или дугам, называемым *корешками*. Каждому корешку приписана перестановка номеров листов, задающая правило перехода траектории при ударе.

Обе эти системы являются интегрируемыми. Такие системы называются эквивалентными если имеют одну и ту же структуру слоения Лиувилля на неособых изоэнергетических многообразиях. Для описания и сравнения классов лиувиллевой эквивалентности используется инвариант Фоменко–Цишанга . Этот инвариант представляет собой *меченую молекулу* W^* — конечный ориентированный граф, вершины которого соответствуют *атомам* (классам послойной эквивалентности окрестностей критических слоёв отображения момента), а рёбра — однопараметрическим семействам регулярных торов Лиувилля. Рёбра снабжены полным набором числовых меток (r, ε, n). Для невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы совпадение меченых молекул является необходимым и достаточным условием лиувиллевой эквивалентности.

Как было показано С.Е. Пустовойтовым [3], элементарным бильярдам с потенциалом Гука соответствуют 18 различных классов лиувиллевой эквивалентности слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических многообразиях Q^3.Следовательно для определения возможной лиувиллевой эквивалентности достаточно рассмотреть 18 инваринатов Фоменко-Цишангда.Можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всех классов плоских бильярдов с потенциалом Гука, за исключением трёх особых случаев слоений Лиувилля (см. Рис. 1), существует бильярдная книжка, лиувиллево эквивалентная соответствующему слоению Лиувилля.*

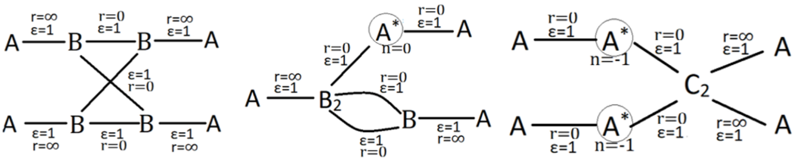


Рис. 1: Инварианты Фоменко-Цишанга особых случаев

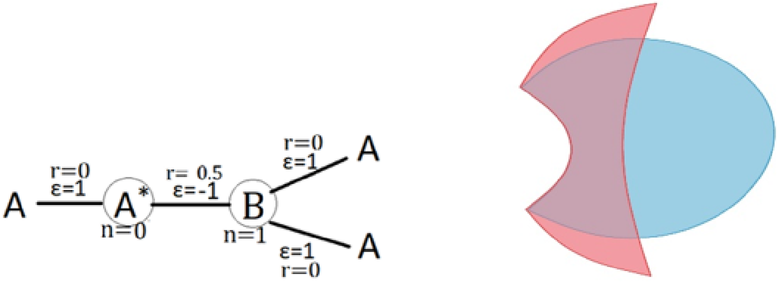


Рис. 2: Инвариант Фоменко-Цишанга и биллиардная книжка

Таким образом, динамическая система бильярда с потенциалом Гука в области, ограниченной софокусными квадриками, топологически не эквивалентна (в смысле Лиувилля) динамической системе бильярдной книжке без потенциала.

Литература

1. Болсинов А. В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия и топология / А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. — Ижевск: РХД, 1999. — 744 с.

2. Фокичева В. В. Топологическая классификация интегрируемых биллиардов / В. В. Фокичева. — М.: МГУ, 2016. — 120 с.

3. Пустовойтов С. Е. Топологический анализ биллиарда с потенциалом Гука / С. Е. Пустовойтов // Матем. сб. — 2021. — Т. 212, № 2. — С. 81–105.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ОСНОВНОГО СИМВОЛА

М.В. Коровина (Москва, МГУ)
betelgeuser@yandex.ru

Одной из фундаментальных задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами является задача построения асимптотик их решений в окрестности иррегулярных особых точек. Эта задача была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2]. Основной целью работы является описание метода построения этих асимптотик.

Пуанкаре рассматривал уравнение

$$\begin{gathered} a_n(r)\left(\tfrac{d}{dr}\right)^n u(r) + a_{n-1}(r)\left(\tfrac{d}{dr}\right)^{n-1} u(r) + ...+ \\ +a_i(r)\left(\tfrac{d}{dr}\right)^i u(r) + ... + a_0(r)u(r) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $a_i(r), i = 0, ..., n$ — мероморфные функции. Задача заключается в построении асимптотик решений уравнения (1) в окрестности особых точек (как регулярных, так и иррегулярных).

Без ограничения общности будем считать, что особой точкой уравнения (1) является $r = 0$. В работе [3] показано, что уравнение (1) может быть приведено к виду

$$H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u = 0,$$

где

$$H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right) = \left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^{n} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i\left(r\right)\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)^{i}.$$

Здесь $k = -1, 0, 1, 2....$ Будем называть это k степенью вырождения оператора, а через $\tilde{a}_i\left(r\right)$ обозначим соответствующие голоморфные функции. Как было показано в работе [3] — если минимальное $k = -1$, то $r = 0$ является неособой точкой, если $k = 0$, то $r = 0$ является регулярной особенностью, если $k \geqslant 1$, то это случай иррегулярной особой точки. В этой работе мы будем рассматривать последний случай.

Основным символом дифференциального оператора

$$H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)$$

называется многочлен

$$H_0(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tilde{a}_i(0)}{k^{n-i}} p^i.$$

Обозначим через $S_{R,\varepsilon}$ сектор $S_{R,\varepsilon} = \{r| - \varepsilon < \arg r < \varepsilon, \, |r| < R\}$.

Определение. *Функция f аналитическая на $S_{R,\varepsilon}$, имеет не более, чем k-экспоненциальный рост, если существуют такие неотрицательные константы C и α, что в секторе $S_{R,\varepsilon}$ выполнено неравенство*

$$|f| < Ce^{a\frac{1}{|r|^k}}.$$

Обозначим через $E_{R,\varepsilon}$ пространство функций k-экспоненциального роста.

Теорема 1. *Пусть f — ресургентная функция, тогда решение уравнения $H\left(-r^{k+1}\frac{d}{dr}, r\right)u = f$ является ресургентной функцией в пространстве $E_{R,\varepsilon}$. Если полином $H_0(p)$ имеет простые корни в точках $p_1, ..., p_m$, тогда асимптотика решения в пространстве $E_{R,\varepsilon}$ однородного уравнения $H\left(r, -r^{k+1}\frac{d}{dr}\right)u = 0$ имеет вид:*

При $k \in N$

$$u\left(r\right) \approx \sum_{j=1}^{m} \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha^1_{k-i}}{r^{k-i}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b^j_i r^i,$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0\left(p\right)$. Здесь через $b_i^j, \sigma_j, j = 1, ..., m$ обозначены некоторые числа.

В теореме 1 предполагаеся, что корни основного символа являются простыми. Возникает вопрос о том, какой вид будут иметь асимптотики решения уравнения если корни основного символа $H_0(p)$ будут кратными. На этот вопрос дает ответ Теорема 2.

Теорема 2. *Асмптотические члены, соответствующие нулевому корню основного символа, или конормальны или имеют вид*

$$u_0(r) \approx \exp\left(P_0\left(r^{-\frac{1}{l_0}}\right)\right) r^{\sigma_0} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^0 r^{\frac{i}{l_0}}.$$

Здесь $l_0 \in N, \sigma_0$ — некоторое комплексное число, $P_0(r)$ — полином степень которого не превышает kl_0, $\sum_{k=0}^{\infty} a_i^0 r^i$ — асимптотический ряд.

Метод построения асимптотических членов асимптотики заключается в том, что каждый из членов асимптотики с помощью экспоненциальной подстановки смещается в ноль, а затем строится асимптотический член, соответствующий этому корню основного символа (см. [4], [5]).

Литература

1. Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires / H. Poincare //Acta math. — 1886. — v. 8. — p. 295-344.

2. Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре / Анри Пуанкаре. — М. : Наука, 1974.

3. Кац Д. С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов / Д.С. Кац // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1612–1617.

4. Korovina M. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point / M. Korovina // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 12.

5. Korovina M.V. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями / M.V. Korovina // Дифференциальные уравнения./ — 2012. —Vol. 48, no. 5. — P. 710–722.

О РАСЧЕТЕ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ МЕТОДАМИ ДЕЛЬТООБРАЗНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Д.В. Костин, А.В. Костин (Воронеж, ВГУ)
leshakostin@mail.ru, dvk605@mail.ru

В монографии [3], стр. 321 рассматривается уравнение излучателя прямоугольной формы вида:

$$R(z_1,z_2)=\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} f(y_1,y_2)e^{i(y_1z_1+y_2z_2)}dy_1dy_2 \tag{1}$$

в предположении, что диаграмма направленности (ДН) $R(z_1,z_2)$ принадлежит классу Пэли-Винера W_{σ_1,σ_2}.

В этом случае уравнение (1) имеет точное решение вида

$$f(y_1,y_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(z_1,z_2)e^{-i(y_1z_1+y_2z_2)}dz_1dz_2. \tag{2}$$

В то же время, в [3] для линейного излучателя приводятся примеры с диаграммами направленности не из принадлежащих классам W_σ, для которых точное решение представляется через дельта–функцию Дирака $\delta(x)$, то есть через обобщенные функции.

Последовательности локально интегрируемых функций, сходящихся в пространстве обобщенных функций к обобщенной функции Дирака $\delta(x)$ называются дельтообразными последовательностями.

Примером для $\delta(x_1,x_2)$ являются дельтообразные последовательности [4], с. 102

$$f_{n,p}(x_1,x_2)=\frac{(p-2)n^2}{2\pi}\left[(nx_1^2)+(nx_2^2)+1\right]^{-p/2}, \quad p=3,4,\dots . \tag{3}$$

В предположении локально интегрируемых функций $f(y_1,y_2)$ уравнение (1) запишем в виде

$$R(z_1,z_2)=R(z)=\int_{\Omega_\sigma} e^{i(z,y)}f(y)dy, \tag{4}$$

$z=(z_1,z_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $(z,y)=z_1y_1+z_2y_2$, $\Omega_\sigma=(-\sigma_1,\sigma_1)\times(-\sigma_2,\sigma_2)$.

Применяя преобразование Фурье в равенстве (4), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz_1s_1+iz_2s_2}\int_{-\sigma_2}^{\sigma_2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_1} e^{iz_1y_1+iz_2y_2}f(y_1,y_2)dz_1dz_2 =$$

$$= (2\pi)^2\begin{cases} f(-s_1,-s_2), & \text{если} \quad (s_1,s_2)\in\Omega_\sigma, \\ 0, & \text{если} \quad (s_1,s_2)\overline{\in}\,\Omega_\sigma. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь мы воспользовались формулой из [2], стр. 213 $F[e^{bx}](s) = \delta(s-ib)$, но для функций более широкого класса по сравнению с W_σ.

Таким образом, из (5) следует точное решение уравнения (1) в виде (2).

Применение формулы (2) дает представление для приближенных решений $f_n(z_1,z_2)$.

Литература

1. Ахиейзер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиейзер.— М. : Наука. 1965. — 407 с.

2. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.— М. : Физматгиз.— 1959. — 440 с.

3. Зелкин Е.Г. Построение излучающих систем по заданной диаграмме направленности / Е.С. Зелкин.—М.–Л. : Госэнергоиздат.— 1963. — 272 с.

4. Кеч В. Введение в теорию обобщенных функций с применением в технике / В. Кеч, П. Теодореску—М. : Мир.— 1978. — 518 с.

ИМПУЛЬС МАКСВЕЛЛА–ФЕЙЕРА–ЧЕБЫШЕВА И «ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ»

В.А. Костин, Д.В. Костин, А.В. Костин (Воронеж, ВГУ)
leshakostin@mail.ru

Как отмечает академик В.А. Садовничий в [1], с появлением компьютеров мир математики стал безусловно меняться. Добавляя, что появился национальный реформатор математического образования, у которого «... как у Януса два лица». Один лик— это компьютерное образование, второй— глобализация мира». При этом информатика, становясь базовой дисциплиной, такой как математика и физика, должна давать основу фундаментальных знаний, в связи с их приложениями в окружающем мире.

Важным примером в решении этой проблемы является монография «Компьютерная геометрия» [8], где в приложении отмечается,

---

что в основе программ, которые позволяют пользователю работать с экранным отображением, лежит достаточно сложная и современная математика.

В настоящей заметке приводится пример симбиоза программиста и математика, при описании некоторого технического процесса «математическим языком красоты»— (термин из [7]).

В свое время инженерами–строителями перед авторами была поставлена задача, возникающая при расчете оптимальных конструкций и устройств со следующей математической постановкой:

Найти тригонометрический полином

$$f_n(x,\lambda) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_m \cos mx, \quad x \in [0,\pi],\, \lambda = (\lambda_0,\, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \tag{1}$$

максимизирующий функционал

$$K_n(\lambda) = \frac{\max_x f_n(x,\lambda)}{\min_x f_n(x,\lambda)} \to \sup_{\lambda}, \tag{2}$$

при условиях

$$\int_0^{\pi} f_n(x,\lambda)dx = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = c > 0. \tag{3}$$

Исследованию экстремальных свойств многочленов вида (1) посвящены работы многих авторов (см. [7], с. 36). Однако первое точное решение этой задачи, дающее ответ в виде

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{n+1} (n+1-m)\cos mx \tag{4}$$

было получено с помощью компьютера в [5], с последующими доказательствами аналитическими методами, с использованием результатов Фейера, Чебышева и Максвелла. Это и послужило названию многочлена (4) их именем.

Следующий шаг с применением компьютера к анализу многочлена (4) был сделан при изучении излучающих систем с диаграммой направленности радиоантенны в виде многочлена (4).

В этом случае, компьютерные вычисления подсказали равенства (см. [7])

$$\sin(0.3\pi) = \cos 36^\circ = \frac{\Phi}{2}, \tag{5}$$

где $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$— «золотое сечение».

Дальнейший анализ был связан с применением фундаментальных соотношений, приведенных в ([2], с. 19), для многочлена Чебышева 1–го рода

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{n-k} \left(\begin{array}{c} n-k \\ k \end{array} \right) (2x)^{n-2k}, \tag{6}$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$— целая часть числа $\frac{n}{2}$, $\left(\begin{array}{c} i \\ j \end{array} \right) = \frac{i!}{(j-i)!\cdot j!}$.

Откуда, при $x = \cos t$ и $t = 36^\circ$ или $t = 72^\circ$, получаются равенства

$$T_n(\cos 36^\circ) = \cos(n \cdot 36^\circ) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{n-k}(2\cos 36^\circ)^{n-2k} =$$

$$= \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{n-k} \left(\begin{array}{c} n-k \\ k \end{array} \right) \Phi^{n-2k}, \tag{7}$$

$$\cos(n \cdot 72^\circ) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{n-k} \left(\begin{array}{c} n-k \\ k \end{array} \right) \varphi^{n-2k},$$

$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\Phi}$.

Применение равенств (7) к многочлену (4) дает

$$f_n(36^\circ) = \sum_{m=1}^{n+1}(n+1-m)\cos(m \cdot 36^\circ) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1}(n+1-m)\frac{m}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{m-k} \left(\begin{array}{c} m-k \\ k \end{array} \right) (2\cos 36^\circ)^{m-2k} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{m=1}^{n+1}}(n+1-m)\frac{m}{2}\sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k}{m-k} \left(\begin{array}{c} m-k \\ k \end{array} \right) \Phi^{m-2k}. \tag{8}$$

Аналогично получаем:

$$f_n(72^\circ) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n+1}(n+1-m)\sum_{k=0}^{[m2]} \frac{(-1)^k}{m-k}\varphi^{m-2k}.$$

И таким образом, из формул (8) следуют значения $f_n(x_r)$, $r = 0, \pm 1, \dots$ на последовательностях

$$x_r = \frac{2\pi}{5} + \frac{2r\pi}{n}, \qquad x_r = \frac{\pi}{5} + \frac{2r\pi}{n}. \tag{9}$$

Вместе с тем, пользуясь формулой Фейера ([4], с.69)

$$\sum_{m=-n}^{n} \left(1 - \frac{|m|}{n}\right) e^{imx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \tag{10}$$

получаем равенство

$$2f_n(2x) = \frac{\sin^2(n+1)x}{\sin^2 x} - (n+1) = U_n^2(x) - (n+1), \tag{11}$$

где $U_n(t)$— многочлен Чебышева 2–го рода ([3]).

Далее, пользуясь представлением ([2], с. 15)

$$U_n(t) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2k+1 \end{array} \right) t^{n-2k}(t^2-1)^k, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{12}$$

при $t = 2x = \varphi$, из (11) получаем равенство

$$2f_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2k+1 \end{array} \right) \varphi^{n-2k}(\varphi^2-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2k+1 \end{array} \right) \varphi^{n-k}. \tag{13}$$

Здесь мы воспользуемся равенством $\varphi^2 - 1 = -\varphi$.

Из (13), в силу периодичности, имеем значения $f(x_n)$ в точках $x_n = \varphi + \frac{2\pi n}{n+1}$

$$2f_n\left(\varphi + \frac{2r\pi}{n+1}\right) = \left[\sum_{k=0}^{[n/2]} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2k+1 \end{array} \right) \varphi^{n-k} \right]^2 - (n+1), \tag{14}$$

$$2f_n\left(\Phi + \frac{2r\pi}{n+1}\right) = \left[\sum_{k=0}^{[n/2]} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2k+1 \end{array} \right) \Phi^{n-k} \right]^2 - (n+1). \tag{15}$$

Литература

1. Садовничий В.А. Педагогические заметки о современном образовании / В.А. Садовничий.— М. : Изд–во МГУ. 2003 .— 407 с.

2. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский.— М. : Наука.— 1983 .— 384 с.

3. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены/ П.К. Суетин.—М. : Наука. 1973 .— 415 с.

4. Левитан Б.М. / Б.М. Левитан.—М. : Тех–теор. лит. 1953. — 396 с.

5. Костин В.А. Многочлены Максвелла–Фейера и оптимизация полигармонических импульсов // В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов// ДАН— 2012 , Т. 445, №3, с. 271–273.

6. Корбалан Ф. Мир математики. Золотое сечение. Математический язык красоты (пер. с англ.) / Ф. Корбалан.— М.: Де Агостини, сер. Мир математики в 40 т., Т. 1.—2014 .—160 с.

7. Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа. ч. 2 / Г. Полиа, Г. Сеге.— М. : Наука.— 1978 .— 431 с.

8. Фоменко А.Т. Компьютерная геометрия: Основы дифференциальной геометрии и топологии. Основные понятия компьютерной геометрии. Геометрическое моделирование. Изд 2–ое / Н.Н. Голованов, Д.П. Илютко, Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко.— М.: Изд.–во МГУ, сер. Фундамент будущего.—2024 .—504 с.

О РАСЧЕТЕ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ В КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Костин, Д.Е. Муравлев (Воронеж, ВГУ)
vlkostin@mail.ru, muravlev–2003@mail.ru

В монографии Е.Г. Зелкина [3] приводится расчет линейных решеток с диаграммой направленности представимой рядом

$$R(z0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(h) \frac{\sin \pi(z-n)}{\pi(z-n)}, \tag{1}$$

где $z \in (-\infty, \infty)$— целые функции экспоненциального типа, не относящиеся к классу Пэли–Винера W_σ, так как при $z \to \infty$ не стремятся к нулю. Как известно функции такого типа относятся к классу Бернштейна B_σ [1].

Для таких функций в [3], стр. 63 рассматривается уравнение

$$R(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iyz} f(y)dy \tag{2}$$

с диаграммой направленности вида

$$R(z) = \sum_{p=1}^{N} A(s_p)e^{is_p t} \tag{3}$$

и дается точное решение в классах обобщенных функций

$$f(y) = \sum_{p=1}^{N} A(s_p)\delta(y - s_p), \tag{4}$$

где $\delta(x)$— дельта–функция Дирака.

Таким образом, в классах B_σ точное решение уравнения (2) определяется в классах обобщенных функций.

Если в уравнении (2) диаграмма направленности $R(z)$ имеет вид (3), то применяя преобразование Фурье, получаем решение (2)

$$f(y) = \sum_{p=1}^{N} A(s_p)\delta(y - s_p),$$

которое совпадает с решением Зелкина [3].

Аналогично, для $R(z) = 1$ и $R(z) = \cos bz$, рассмотренных в (3), получаем решения

$$f(y) = F[1](z) = \delta(y), \tag{5}$$

и

$$f(y) = \pi[\delta(y - b) + \delta(y + b)], \tag{6}$$

которые также совпадают с решениями, получаемыми в [3].

Таким образом, применение методов обобщенных функций позволяет указать для новых классов диаграмм направленности, как точное решение для распределения тока, так и для получения соответствующего приближенного решения.

Литература

1. Ахиейзер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиейзер.— М. : Наука. 1965. — 407 с.

2. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.— М. : Физматгиз.— 1959. — 440 с.

3. Зелкин Е.Г. Построение излучающих систем по заданной диаграмме направленности / Е.С. Зелкин.—М.–Л. : Госэнергоиздат.— 1963. — 272 с.

4. Кеч В. Введение в теорию обобщенных функций с применением в технике / В. Кеч, П. Теодореску—М. : Мир.— 1978. — 518 с.

МОДЕЛЬ СПЕКТРАЛЬНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ В КОГНИТИВНЫХ РАДИОСЕТЯХ

А.В. Костин, М.И. Паршин, Д.Э. Кондауров
(Воронеж, ВГУ)
leshakostin@mail.ru

В современных условиях функционирования радиосетей при передачи сигнала по каналам связи часто возникает проблема возникновения помех в связи с перегруженностью радиочастотного спектра. Напомним, что радиочастотным спектром считается часть электромагнитного спектра от 3 Гц до 3 ТГЦ (3^{12} ГЦ). Чтобы предотвратить помехи между различными пользователями, генерация и передача радиоволн строго регламентируется национальным законодательством (ГОСТ) и международной организацией Международный Союз электросвязи (МСЭ), который выделяет диапазоны радиочастотного спектра для различных технологий и приложений радиосвязи. В некоторых случаях эти диапазоны частот продаются или лицензируются операторам частных компаний (например, операторам сотовой связи или телевизионным станциям). Для каждого диапазона МСЭ имеет план распределения частот, который определяет порядок их совместного использования, чтобы избежать помех и установить протокол совместимости передатчиков и приемников.

Поскольку это фиксированный ресурс, возникает проблема нехватки свободных частот и перегрузки спектра, так как количество пользователей постоянно увеличивается.

Для решения этой проблемы и повышения эффективности использования спектра используются различные технологические инновации. Например: транкинговые радиосистемы, расширенный спектр, сверхширокополосная связь, повторное использование частот, динамическое управление спектром, объединение частотных диапазонов и рассматриваемая здесь технология, известная как, когнитивное радио.

Когнитивное радио (КР)— это технология динамической настройки и использования радиоканала, позволяющая избежать помех и перегрузок. Такое радио автоматически определяет доступные каналы и соответствующим образом изменяет параметры передачи или приёма, чтобы обеспечить большее количество одновременных беспроводных соединений в заданном радиочастотном диапазоне.

Предполагается, что существуют две группы пользователей, претендующих на использование одного и того же диапазона радиоспектра. К группе **первичных пользователей (primary users)** относятся абоненты, обладающие правом (лицензией) использования данной полосы спектра. Они могут использовать эти частоты в любой момент времени. Другую группу составляют **вторичные пользователи (secondary users)**, т.е. остальные пользователи, не имеющие лицензии. Вторичные пользователи не могут занимать полосы частот, в то время как их используют первичные пользователи.

Тем не менее, при помощи когнитивного радио, существует возможность совместного использования спектра всеми видами пользователей. Поскольку первичные пользователи не обязательно постоянно находятся в эфире, вторичные пользователи могут использовать эти временно незанятые частоты в своих целях. Для этого вторичные пользователи осуществляют зондирование радиоспектра в поисках свободных от эфира частот. Найдя такие временно неиспользуемые частоты, вторичный пользователь может начать свой сеанс трансляции радиосигнала. После возвращения в эфир первичного пользователя, работа вторичного пользователя на этой частоте автоматически прерывается, и он, заново зондируя спектр ищет новую свободную частоту.

Рассматривается централизованная когнитивная радиосеть с L активными вторичными пользователями. Предполагается, что совместное решение принимается центром слияния. Вторичные пользователи, $\{CR_i\}_{i=1}^{L}$, обозначают системные ретрансляторы и используют ту же полосу спектра, которая первоначально выделена основным пользователям. Параметры замирания канала i–го измерительного канала и i–го ретрансляционного канала обозначаются h_{s_i} и h_{r_i} соответственно. Мы также обозначаем через h_{s_i} и h_{r_i} аддитивный гауссовский шум зондирующего и ретрансляционного каналов соответственно, которые, как предполагается, являются независимыми распределенными с нулевым средним значением и дисперсией N_0.

Пусть x_p обозначает сигнал, передаваемый основным радиоприемником, тогда принятый сигнал i–м приемником, y_{s_i}, может быть выражен как

$$y_{s_i} = \theta h_{s_i} x_p + n_{s_i} \tag{1}$$

где $\theta = 0$ или 1 обозначает состояние основного пользователя при двух гипотезах: H_0 для отсутствия основного пользователя и H_1 для присутствия основного пользователя. Если Y_i обозначает мощность y_{s_i}, то среднее значение Y_i может быть выражено как

$$E\{Y_{s_i}\} = \begin{cases} \sigma Y_{s_{i_0}} = N_0 & H_0 \\ \sigma_{s_{i_1}} = E_i + N_0 = N_0(1 + \overline{\gamma}_{s_i}) & H_1 \end{cases} \tag{2}$$

где $E_i = E\{|h_{s_i} x_p|^2\}$— среднее значение мощности сигнала, принятого на радиочастотном интерфейсе i–го когнитивного радиоприемника, и $\overline{\gamma}_{s_i}$— среднее отношение сигнал/шум, связанное с i–м каналом обнаружения. Для локального определения спектра Y_{s_i} сравнивается с заданным пороговым значением λ_i для определения первичного состояния θ.

Тогда, вероятность ложной тревоги, P_{f_i}, и вероятность обнаружения, P_{d_i} , могут быть выражены как

$$P_{f_i} = P\{Y_{s_i} > \lambda_i | H_0\} = \frac{\Gamma\left(m_i, \frac{m_i \lambda_i}{\sigma \gamma_{s_{i_0}}}\right)}{\Gamma(m_i)} = \frac{\Gamma\left(m_i, \frac{m_i \lambda_i}{N_0}\right)}{\Gamma(m_i)} \tag{3}$$

и

$$P_{d_i} = P\{Y_{s_i} > \lambda_i | H_1\} = \frac{\Gamma\left(m_i, \frac{m_i \lambda_i}{\sigma \gamma_{s_{i_1}}}\right)}{\Gamma(m_i)} = \frac{\Gamma\left(m_i, \frac{m_i \lambda_i}{N_0(1+\gamma_{s_i})}\right)}{\Gamma(m_i)}, \tag{4}$$

где m_i— параметр затухания Накагами–м, $\Gamma(\cdot)$— гамма–функция, а $\Gamma(\cdot, \cdot)$— неполная гамма–функция.

Как видно из выражения, приведенного в (3), вероятность ложной тревоги при индивидуальном локальном обнаружении не связана с соотношением сигнал/шум и в основном зависит от порога принятия решения λ_i. Следовательно, для использования детектирования энергии λ_i должен быть правильно выбран для достижения точности обнаружения цели. Значение $\overline{P}_f < 0.1$ рекомендуется в качестве верхней границы стандартом IEEE 802.22.

Литература

1. Fernando X. Cooperative Spectrum Sensing and Resourse Allocation Strateges and Cognitive Radio / X. Fernando, A. Sultana, S. Hussain, T. Zhao.— Springer Cham, 2019.— 107 p.

О ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БАЛКИ

Т.И. Костина (Воронеж, ВГТУ)
tata_sti@rambler.ru

Исследования колебаний балки на упругом основании через изучения математической модели, описанной нелинейным уравнением, проводились Ю.А.Митропольским, Б.И. Мосеенков, H.B. Stewart, J.M.T. Thompson, Б.С. Бардин, С.Д. Фурта и др. При этом случай стационарного уравнения, был подробно изложен в работе [1]. Случай слабо неоднородной балки (стационарное уравнение) изучался методами нелинейной редукции Ляпунова-Шмидта в работах [2], где был предлжен полный бифуркационный анализ и алгоритм построения приближенных решений.

Для изучения динамического уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w — прогиб балки (поле смещений точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x), предлагается применить подход трассирования спуска по траекториям к точкам минимума функционала энергии V, который был применен в [3] для задачи концентрации вещества уравнения диффузии и в [4] для уравнения Свифта-Хоенберга. Используется прямая процедура кратчайшего спуска в точку минимума V (не переходя к аппроксимирующей ключевой функции). Первым шагом этой процедуры является выбор величины сдвига вдоль градиента из начальной (порождающей) точки с целью уменьшения значения функционала энергии. В качестве финальных состояний искомых траекторий динамической системы используются те орбиты точек минимума, которые ответвились (при возрастании параметров κ, α) от докритического нулевого равновесия.

Литература

1. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2004. – Т. 12. – С. 3-140.

2. Костин, Д. В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем / Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2012. – 207 с.

---

3. Коротких А.С. К моделированию структурной перестройки посредством нелинейного уравнения диффузии / А. С. Коротких, Д. В. Костин, Т. И. Костина, Ю. И. Сапронов // Насосы. Турбины. Системы. – 2015. – № 1(14). – С. 81-85.

4. Гнеушев, И. А. Ветвление решений уравнения Свифта-Хоенберга и трассы спуска к притягивающим точкам / И. А. Гнеушев, И. В. Колесникова, А. С. Мызников // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 4. – С. 75-83.

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С НЕЗЕРКАЛЬНЫМИ И САМОДВОЙСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ГАМИЛЬТОНА НА ПОВЕРХНОСТЯХ[1]

Е.А. Кудрявцева, Б.А. Макарчук (Москва, МГУ)
boris.makarchuk@math.msu.ru

Множество всех гамильтоновых систем на двумерных замкнутых симплектических многообразиях, гамильтониан которых является функцией Морса, можно представлять разбитым на классы *лиувилевой эквивалентности*, причем число таких классов будет конечным, если ограничиться рассмотрением гамильтонианов, имеющих не более, чем k критических точек. В свою очередь каждый класс лиувилевой эквивалентности может распадаться на несколько классов по отношению к более сильным отношениям эквивалентности: *траекторной*, *сильной лиувилевой* и *сильной траекторной*, где сильные эквивалентности учитывают ориентацию поверхности, задаваемую симплектической структурой.

Известно, что если сложность функции Гамильтона (т.е. число ее критических точек) не превосходит 6, то классы лиувилевой, сильной лиувилевой и траекторной эквивалентностей совпадают. Интересно узнать, верно ли, что для гамильтоновых систем с морсовскими гамильтонианами сложности k число классов сильной лиувилевой эквивалентности равно числу классов траекторной эквивалентности. Оказывается, что это утверждение не верно уже при $k = 8$, причем классов сильной лиувилевой эквивалентности оказалось на 3 больше. Для решения этого вопроса был найден критерий (теоремы 1 и 2), позволяющий по функции понять, как будет устроен ее класс лиувилевой эквивалентности с точки зрения прочих эквивалентностей.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-71-10100) в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Таблица 1. Определение g

$g=$	0	1	2	$\geqslant 3$
незеркальные	10	8	8	$2g+2$
специальные	14	8	10	$2g+2$

Определение 1. *Функция Морса f на ориентируемой поверхности M называется* зеркальной, *если существует гомеоморфизм $\varphi : M \to M$, меняющий ориентацию поверхности и сохраняющий разбиение поверхности на связные компоненты линий уровня функции f, с сохранением направления роста функции.*

Определение 2. *Функция морса f на ориентируемой поверхности M называется* самодвойственной, *если существует гомеоморфизм $\varphi : M \to M$, сохраняющий разбиение поверхности на связные компоненты линий уровня функции f, но меняющий направление роста функции.*

Самодвойственные и не зеркальные функции мы будем называть *специальными.* Проверить, обладает ли данная функция указанными свойствами, можно, изучив её инвариант — молекулу Фоменко.

Теорема 1. *Класс лиувилевой эквивалентности гамильтоновой системы с функцией Гамильтона f совпадает с классами траекторной и сильной лиувилевой эквивалентностей тогда и только тогда, когда функция f является зеркальной.*

Теорема 2. *Класс лиувиллевой эквивалентности системы с функцией Гамильтона f распадается на неравное число классов траекторной и сильной лиувилевой эквивалентностей тогда и только тогда, когда функция f является специальной.*

Ясно, что наличие на данной поверхности незеркальной или специальной функции Морса заданной сложности зависит от топологии поверхности. Нами получен ответ на вопрос: для данного рода g определить минимальную возможную сложность незеркальной функции и специальной функции на поверхности рода g.

Результат представлен в таблице.

Также мы перечисляем классы послойной эквивалентности всех незеркальных и всех специальных функций Морса сложности 8 (т.е. минимальной сложности, согласно таблице) в терминах их молекул Фоменко. Их оказалось 99 и 17 соответственно.

Литература

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Топология. Геометрия. Классификация / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. — Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. — 444 с.

2. Коняев А.Ю., Кудрявцева Е.А., Сидельников В.И. Геометрия и топология двумерных симплектических многообразий с особенностями общего положения и гамильтоновых систем на них / А.Ю. Коняев, Е.А. Кудрявцева, В.И. Сидельников // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 : Матем. Механ. — 2024. — №5. — С. 22–33.

СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА МНОГОГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

И. С. Кузнецова (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)
irina.kuznetcova@math.msu.ru

На многогранниках геодезический поток, как правило, не рассматривают с точки зрения интегрируемости, поскольку поведение движущейся точки в вершинах, вообще говоря, корректно не определено. Однако есть несколько классов многогранных поверхностей, допускающих корректное доопределение траектории частицы, попавшей в вершину. К числу таких поверхностей относятся равногранные тетраэдры, т.е. тетраэдры, у которых сумма углов при каждой вершине равна π, а также три класса равногранных двугранников.

Теорема 1. *Пусть W — двугранник, допускающий корректное доопределение траекторий, попадающих в его вершины, как биллиардных траекторий. Тогда он принадлежит одному из трех классов многогранных поверхностей:*

1) *двугранники, грани которых являются правильными треугольниками,*

2) *двугранники, грани которых являются прямоугольными равнобедренными треугольниками,*

3) *двугранники, грани которых являются прямоугольными треугольниками с острыми углами, равными $\pi/3$ и $\pi/6$.*

Мы можем замостить развертками каждой из этих поверхностей всю плоскость и рассматривать траекторию движущейся частицы как прямую в $\mathbb{R}^2$. Траектории, не проходящие через вершины многогранников, будут являться локально-кратчайшими, т.е. геодезическими, а при попадании в вершину их можно считать биллиардными траекториями, поведение которых определяется по плоской развертке.

Теорема 2. *Пусть выпуклый многогранник W, гомеоморфный двумерной сфере, допускает корректное доопределение геодезических, попадающих в его вершины. Тогда*

1) *он является равногранным тетраэдром, т.е. симплексом с суммой углов при каждой вершине, равной π,*

2) *материальная точка, попавшая в вершину W, отражается и продолжает свое движение в противоположном направлении.*

Угол пересечения прямой траектории с ребрами поверхности на развертке остается постоянным с точностью до α, где $\alpha \in \{\pi, 2\pi/3, \pi/2, \pi/3\}$ (в зависимости от того, какой многогранник рассматривается). То есть этот угол, взятый по модулю α, является дополнительным первым интегралом. Его область значений — окружность. Следовательно, каждая такая динамическая система является интегрируемой по Лиувиллю (в кусочно-гладком смысле[1]).

Теорема 3. *Пусть W — замкнутый выпуклый многогранник, допускающий корректное доопределение траекторий, попадающих в его вершины, как биллиардных траекторий. Тогда*

1) *дополненный таким образом геодезический (биллиардный) поток на многограннике является вполне интегрируемым по Лиувиллю (в кусочно-гладком смысле),*

2) *все слои в слоении Лиувилля регулярны и гомеоморфны 2-тору,*

3) *изоэнергетическое многообразие Q^3 этого потока на этом тетраэдре гомеоморфно трехмерному тору $T^3 = S^1(\varphi) \times S^1(\psi) \times S^1(\chi)$, факторизованному по действию инволюции $\alpha(\varphi, \psi, \chi) = (-\varphi, -\psi, \chi + \pi)$.*

Литература

1. Белозеров Г.В., Фоменко А.Т. Траекторные инварианты биллиардов и линейно интегрируемые геодезические потоки / Г.В. Белозеров, А.Т. Фоменко // Математический сборник. — 2024. — Т. 215, № 5. — С. 3–46.

О НЕКОТОРЫХ БИФУРКАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КЕЙНСА С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭФФЕКТОВ

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
kulikov_ d_ a@mail.ru

Одной из самых известных моделей макроэкономики принято считать модель, которая носит название "модель Кейнса" [1-3] (см., также [4,5]). В простейшем и нормированном варианте она имеет следующий вид

$$\dot{u}_1 = \frac{u_2}{u_1} - \gamma, \ \dot{u}_2 = \frac{u_2^2}{u_1} - u_1 u_2, \tag{1}$$

где $u_1 = u_1(t) > 0$ – нормированная ставка кредита, $u_2 = u_2(t) > 0$ нормированная величина дохода (например, национального дохода). Наконец, γ – положительная постоянная, играющая роль основного параметра.

Ранее было показано, что система (1) имеет состояние равновесия $u_1 = \gamma, u_2 = \gamma^2$, которое асимптотически устойчиво, если $\gamma \in (0, 1]$ и оно неустойчиво при $\gamma > 1$. При $\gamma = 1+\varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система (1) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл $C_0(\varepsilon)$, т.е. система (1) позволяет объяснить наличие цикличности рыночной экономики, но при этом динамика этой системы не слишком богата.

Вместе с тем, очевидно, что при изучении макроэкономической динамики следует учесть, что любая экономика (любое государство) занимает какой-либо ареал. Это приводит к необходимости вместо системы (1) рассматривать ее вариант с распределенными параметрами. Это приводит к необходимости рассмотрения следующей системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$u_{1t} = \frac{u_2}{u_1} - \gamma + d_1 \Delta u_1, \ u_{2t} = \frac{u_2^2}{u_1} - u_1 u_2 + d_2 \Delta u_2, \tag{2}$$

$$u_{jx}|_{x=0, x=l_1} = u_{jy}|_{y=0, y=l_2} = 0, \ j = 1, 2, \tag{3}$$

где $d_j > 0, u_j = u_j(t, x, y), x \in [0, l_1], y \in [0, l_2], l_j > 0$.

В работах [4,5] был рассмотрен одномерный вариант такой краевой задачи (КЗ), когда $u_j(t, x, y) = u_j(t, x)$ или $u_j(t, x, y) = u_j(t, y)$.

В докладе предполагается изложить некоторые результаты, которые относятся к более естественной с экономической точки зрения модели, когда учитываются две пространственные переменные.

В частности, будет изучен вопрос об устойчивости пространственно однородного состояния равновесия S_0 и пространственно однородного цикла $C_0(\varepsilon)$. Вместе с тем будут приведены достаточные условия, реализация которых позволяет получать у КЗ (2),(3) паттерны, т.е. пространственно неоднородные состояния равновесия и пространственно неоднородные циклы.

Анализ структуры окрестности состояния равновесия S_0 при изучении КЗ (2),(3) предполагает выделение условий при которых возможны локальные бифуркации и в том числе более высоких коразмерностей чем 1. В частности показано, что при определенном выборе параметров КЗ (2),(3) возможна диффузионная потеря устойчивости S_0. При этом учет второй пространственной переменной приводит к большему числу таких вариантов.

Анализ КЗ использует методы теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. В частности, метод интегральных (инвариантных) многообразий, нормальных форм.

Литература

1. Keynes J.M. The general theory of employment, interest, and money / J.M. Keynes. — New York. : Harcourt, 1936. — 472 p.

2. Zhang W. B. Synergetic economics: time and change in nonlinear economics / W.B. Zhang. — Berlin. : Springer-Verlag, 1991. — 261 p.

3. Torre V. Existence of limit cycles and control in complete Keynesian system by theory of bifurcations // Econometrica. — 1977. — Vol. 45, № 6. —P. 1457–1466.

4. Kulikov A.N. Analysis of Keynes's mathematical model—effect of spatial factors / A.N. Kulikov, D.A. Kulikov, M.A. Radin // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, № 6. —P. 1345–1357.

5. Куликов А.Н. Модель Кейнса делового цикла и задача о диффузионной неустойчивости / А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов // Итоги науки и техн.Совр.мат. прил.Тем. обз. — 2022. — Т. 207. - С. 77–90.

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ В ОДНОМЕРНОМ БАССЕЙНЕ С ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ФУНКЦИЕЙ ДНА

А.Н. Кутлубаева (Москва, МФТИ)
kutlubaeva0225@gmail.com

Рассматриваются стоячие волны в приближении мелкой воды в одномерном бассейне с локализованной особенностью функции дна, имеющей характерный размер порядка длины волны h $\ll 1$, а именно спектральная задача:

$$\widehat{H}u = Eu \tag{1}$$

для следующего волнового оператора

$$\widehat{H} = -h^2 \frac{d}{dx}\, D\left(x, \frac{x - x_0}{h}\right) \frac{d}{dx}, \quad x \in \Omega = \{D > 0\} \tag{2}$$

в квазиклассическом пределе $h \to 0$. Обозначим $y = \frac{x-x_0}{h}$; будем рассматривать следующую функцию дна: при $y \to \pm\infty$ $D(x, y)$ стремится к $d_\pm(x)$ быстрее любой степени y и её производных, где D(x, y), $d_\pm(x)$ – гладкие функции. В работе [1] была рассмотрена задача Коши для аналогичного волнового оператора (2).

Как показано в работах [1 и 2], такую задачу можно асимптотически разбить на две: (а) вне особенности коэффициенты меняются медленно и асимптотика дается каноническим оператором Маслова (см. результаты [3] для случая медленно меняющегося дна и пологих берегов), (б) в окрестности особенности решается задача рассеяния. При этом лагранжево многообразие и условие квантования должны быть модифицированы с учетом решения задачи рассеяния.

Результатом работы являются построенные асимптотические собственные функции и значения для рассмотренной задачи и исследование их свойств. Автор благодарен Д. С. Миненкову за ценные советы и поддержку.

Литература

1. Allilueva A.I. Short-Wave Asymptotic Solutions of the Wave Equation with Localized Perturbations of the Velocity / A.I. Allilueva, A.I. Shafarevich // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 27, No. 2. — P. 145–154.

2. Lavrinenko I.A. Quantization of Nonsmooth Curves and the Semiclassical Spectrum of the One-Dimensional Schrödinger Operator

---

with a Localized Perturbation of the Potential / I.A. Lavrinenko, A.I. Shafarevich // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2023. — Vol. 30, No. 2. — P. 209–218.

3. Доброхотов С.Ю. Нестандартные лагранжевы особенности и асимптотические собственные функции вырождающегося оператора $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$ / С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский // Труды МИАН. — 2019. — Т. 306. — С. 83–99.

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С КЛИНОВИДНЫМ НЕДЕФОРМИРУЕМЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ[1]

Н.П. Лазарев (Якутск, СВФУ)
nyurgunlazarev@yandex.ru

Представлен новый класс нелинейных контактных задач для упругой пластины с трещиной. Сформулирована математическая модель, учитывающая условия непроникания берегов трещины, а также контакта краев трещины с недеформируемым клиновидным препятствием. Соответствующая вариационная задача предполагает минимизацию функционала энергии над невыпуклым множеством допустимых функций в подходящем пространстве Соболева. Доказано существование решения невыпуклой задачи на основе известной теоремы Вейерштрасса. Модель, описывающая контакт пластины Тимошенко с трещиной и вдавленным клиновидным препятствием, изучена в работе [1]. В работе применен подход, ранее использованный в [2] при описании контакта наклонных берегов трещины.

Литература

1. Kovtunenko V.A. Weak and strong formulations for a Timoshenko plate with crack indented by wedge and subjected to non-penetration conditions / V.A. Kovtunenko, N.P. Lazarev // Optimization. — 2025. — P. 1–15.

2. Ковтуненко В.А. Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом / В.А. Ковтуненко, А.Н. Леонтьев, А.М. Хлуднев // ПМТФ. — 1998. — Т. 39, № 2 — С. 164–174.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проект № FSRG-2026-0009).

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

М.Р. Лангаршоев (Москва, МГТУ-МАСИ)
mukhtor77@mail.ru

В 1978 году А.А. Лигун с целью обобщения некоторых результатов Л.В. Тайкова получил точную оценку величины наилучшего приближения периодической функции тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 через усреднение ее модуля гладкости [1]. В работе [2] М.Ш. Шабозов и Г.А. Юсупов нашли общее условие на весовую функцию, при котором справедливы результаты А.А. Лигуна. Позднее в [3], учитывая специфику весового пространство Бергмана, нами была рассмотрена аналогичная в работах [1] и [2] задача в весовом пространстве Бергмана $\mathcal{B}_{2,\gamma}$. В недавно опубликованной работе [4] были обобщены результаты полученные в [2] на случай аналитических в круге функций принадлежащих пространству Бергмана $\mathcal{B}_2$.

В настоящей работе мы продолжим исследование в данном направлении и обобщим некоторые раннее [5-10], а также недавно полученные [4, 11-13] результаты для классов аналитических функций, принадлежащих пространству Бергмана.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть далее, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг в $\mathbb{C}$, $A(U)$ – множество функций, аналитических в круге U. Известно [14], что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \; z = \rho e^{it}, 0 \leqslant \rho < 1, \; 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \tag{1}$$

принадлежит пространству Бергмана $\mathcal{B}_2$, если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{\mathcal{B}_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty, \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Совокупность алгебраических комплексных полиномов степени $\leqslant n$, обозначим

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,\ a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Величину

$$E_n(f)_2 = \inf\{\|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n\}$$

назовём наилучшим полиномиальным среднеквадратическим приближением функции $f \in \mathcal{B}_2$ подпространством $\mathcal{P}_n$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_2$ имеет место соотношение [15]

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \qquad (3)$$

где $T_{n-1}(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$ — частная сумма n-го порядка ряда Маклорена (1).

Записывая норму (2) в более удобном нам виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2},$$

символом

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(t+kh)}\right)$$

обозначим разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h.

Величина

$$\omega_m(f,t)_2 = \sup\left\{ \|\Delta_h^m f(\rho e^{it})\|_2 : |h| \leqslant t \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2} : |h| \leqslant t \right\}, \qquad (4)$$

назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in \mathcal{B}_2$.

Для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ обычную производную r-го порядка функции $f \in A(U)$ обозначим через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r \quad (f^{(0)}(z) \equiv f(z)):$

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)c_k(f)z^{k-r}. \tag{5}$$

Умножаем обе части равенство (5) на z^s, $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant r$ получим

$$z^s f^{(r)} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r+s}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_{k,r} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1) = \frac{k!}{(k-r)!},\ k \geqslant r.$$

Всюду далее через $\mathcal{B}_2^{s,(r)}$, $s, r \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant r$ обозначим множество функции $f \in A(U)$, принадлежащих пространству $\mathcal{B}_2$, у которых производная $z^s f^{(r)}$ также принадлежит пространству $\mathcal{B}_2$, т. е.

$$\mathcal{B}_2^{s,(r)} = \left\{ f(z) \in \mathcal{B}_2 : \left\| z^s f^{(r)} \right\|_2 < \infty \right\}.$$

Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) = \sup_{f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}}, \tag{7}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $s, r \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant r$, $0 < q \leqslant 2$, $0 < t \leqslant u$, $0 < u \leqslant \pi/(n-r+s)$, φ – весовая на отрезке $[0, u]$ – функция.

Теорема 1. *Если* $m, n \in \mathbb{N}$, $s, r \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant r$, $0 < q \leqslant 2$, $0 < u \leqslant \pi/(n-r+s)$ *и* φ *– весовая на отрезке* $[0, u]$ *функция, то справедливы неравенства*

$$\{G_{m,n,r,s,q}(\varphi; u)\}^{-1} \leqslant \mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) \leqslant \left\{ \inf_{n \leqslant k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) \right\}^{-1}, \tag{8}$$

где

$$G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) =$$

$$\left[\alpha_{k,r}^q \left(\frac{k+1}{k-r+s+1} \right)^{q/2} \int\limits_0^u (1 - \cos(k-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right]^{1/q}.$$

Доказательство. Применяя формулу (4) к функции (6), будем иметь:

$$\omega_m^2(z^s f^{(r)},t)_2 = 2^m \sup_{|u|\leqslant t} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\alpha_{k,r}^2}{k-r+s+1} |c_k(f)|^2 \left(1-\cos(k-r+s)u\right)^m . \tag{9}$$

Для установления двойного неравенство (8) воспользуемся следующим так называемым упрощенным вариантом неравенства Минковского [16]

$$\left(\int\limits_0^u \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2\right)^{q/2} dt\right)^{1/q} \geqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^u |f_k(t)|^q dt\right)^{2/q}\right)^{1/2},$$

справедливого при $0<q\leqslant 2$ и любого $u\in\mathbb{R}_+$. С учетом равенства (9) и (3) будем иметь:

$$\left(\int\limits_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)},t)_{2,}\varphi(t)dt\right)^{1/q} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\int\limits_0^u 2^{mq/2}\left[\sum_{k=r}^{\infty} \frac{\alpha_{k,r}^2}{k-r+s+1}|c_k(f)|^2(1-\cos(k-r+s)t)^m\right]^{q/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/q} \geqslant$$

$$\geqslant 2^{m/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left[\frac{\alpha_{k,r}^q}{(\sqrt{k-r+s+1})^q}|c_k(f)|^q\int\limits_0^u(1-\cos(k-r+s)t)^{mq/2}\varphi(t)dt\right]^{2/q}\right\}^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\left[(G_{k,m,r,s,q}(\varphi;u))^q\right]^{2/q}\right\}^{1/2} \geqslant$$

$$= 2^{m/2}\inf_{n\leqslant k<\infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi;u)E_{n-1}(f)_2.$$

Таким образом, получили следующее неравенство

$$\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \leqslant \left\{\inf_{n\leqslant k<\infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi;u)\right\}^{-1},$$

откуда следует оценка сверху для величины (8):

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi,u)\leqslant\left\{\inf_{n\leqslant k<\infty}G_{m,k,r,s,q}(\varphi;u)\right\}^{-1}. \qquad (10)$$

С целью получения оценки снизу в неравенстве (8) введем в рассмотрение функцию $f_0(z)=z^n\in\mathcal{B}_2^{s,(r)}$. Для этой функции непосредственными вычислениями получим

$$E_{n-1}(f_0)_2=\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$\omega_m\left(z^s f_0^{(r)},t\right)_2=2^{m/2}\frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+s+1}}\left(1-\cos(n-r+s)t\right)^{m/2}.$$

Используя два последних равенств, получим оценку снизу для величины $\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi,u)$:

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi,u)\geqslant\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f_0)_2}{\left(\int\limits_0^u\omega_m^q\left(z^s f_0^{(r)},t\right)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}}=\left\{G_{m,n,r,s,q}(\varphi;u)\right\}^{-1}. \qquad (11)$$

Сравнивая оценку сверху (10) и оценку снизу (11), получим утверждение теоремы 1.

Далее, определяем, какими дифференциальными свойствами должна обладать весовая функция $\varphi(t)$, $0\leqslant t\leqslant u$, чтобы имело место равенство

$$\inf\left\{G_{k,m,r,s,q}(\varphi;u):n\leqslant k<\infty\right\}=\left\{G_{n,m,r,s,q}(\varphi;u)\right\}. \qquad (12)$$

Теорема 2. *Пусть весовая функция* $\varphi(t)\geqslant 0$ *дифференцируема на отрезке* $[0,u]$ *и пусть для всех* $m,n,k\in\mathbb{N}$, $s,r\in\mathbb{Z}_+$, $k\geqslant n>r\geqslant s$, $0\leqslant t\leqslant u$, $0<u\leqslant\pi/(n-r+s)$, $1\leqslant q\leqslant 2$ *выполнено неравенство*

$$\left(\sum_{j=0}^{r-1}\frac{2}{k-j}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k-r+s+1}-\frac{2}{q(k-r+s)}\right)\times$$

$$\times\varphi(t)-\frac{2}{q(k-r+s)}t\varphi'(t)\geqslant 0.$$

Тогда имеет место соотношение (12), и следовательно

$$\sup_{f\in\mathcal{B}_2^{s,(r)}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^u\omega_m^q(z^sf^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}}\left\{\int\limits_0^u(1-\cos(n-r+s)t)^{mq/2}\,\varphi(t)dt\right\}^{-1/q}.$$

Следует отметит, что экстремальные характеристики, в определенном смысле аналогичные (7) в пространстве $\mathcal{B}_2$ ранее рассматривались и в других работах. Например, величины $\mathcal{K}_{m,n,r,r,2}(1,u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,r,2}(\sin(\pi t/u),u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,r,2/m}(\sin nt,u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,r,q}(\varphi,u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,0,2/m}(1,u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,0,q}(\varphi,u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,0,2}(\sin\pi t/u,u)$ были рассмотрены в работах [5,7], [6], [9], [10], [11,4], [12], [13] соответственно (см. также [8]).

Из доказанной теоремы вытекает следующее

Следствие. *В условиях теоремы 2, при* $\varphi(t)\equiv 1$ *имеет место следующее соотношение*

$$\sup_{f\in\mathcal{B}_2^{s,(r)}}\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^u\omega_m^q(z^sf^{(r)},t)_2dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}}\left(\int\limits_0^u(1-\cos(n-r+s)t)^{mq/2}dt\right)^{-1}.$$

Пусть $\Phi(u)$ – произвольная непрерывная возрастающая при $u\geqslant 0$ функция такая, что $\Phi(0)=0$. Символом $W_{m,q}^{s,(r)}(u,\Phi)$, $m\in\mathbb{N}$, $s,r\in\mathbb{Z}_+$, $s\leqslant r$, $0<q\leqslant 2$, $0<u\leqslant\pi/(n-r+s)$ обозначим класс функций $f\in\mathcal{B}_2^{s,(r)}$, для которых имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u\omega_m^q\left(z^sf^{(r)},t\right)_2dt\right)^{1/q}\leqslant\Phi(u).$$

Требуется при любом $n \in \mathbb{N}$ и $s, r \in \mathbb{Z}_+$, $s \leqslant r$ найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,q}^{s,(r)}(u,\Phi)\right)_2 := \sup\left\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_{m,q}^{s,(r)}(u,\Phi)\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $s, r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geqslant s$, $0 < q \leqslant 2$ *и* $0 < u \leqslant \pi/(n-r+s)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,q}^{s,(r)}(u,\Phi)\right)$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}}\left(\frac{1}{u}\int\limits_0^u (1-\cos(n-r+s)t)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi(u).$$

Литература

1. Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 / А.А. Лигун // Мат. заметки. — 1978. — Т. 24, № 6. — С. 785–792.

2. Шабозов М.Ш, Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников / М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов. // Матем. заметки. — 2011. — Т. 90, №5. — С. 764–775.

3. Лангаршоев М.Р. Неравенства типа Джексона–Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана / М.Р. Лангаршоев // Чебышевский сб. — 2021. — Т. 22, №2. — С. 135–144.

4. Шабозов М.Ш, Хуромонов Х.М. О наилучшем полиномиальном приближении аналитических функций в пространстве Бергмана B_2 / М.Ш. Шабозов,Х.М. Хуромонов // Изв. вузов. Математика. — 2025. №4. — С. 90–103.

5. Шабозов М.Ш, Лангаршоев М.Р. Приближение некоторых классов аналитических функций в пространстве B_p / М.Ш. Шабозов, М.Р. Лангаршоев // Вестник ХоГУ. — 1999. — Т. 1, №1. — С. 45-50.

6. Лангаршоев М.Р. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана B_2 / М.Р. Лангаршоев // Вестник ХоГУ. — 2000. — Т. 1, №3. — С. 63-69.

7. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана / М.Ш. Шабозов // ДАН России. — 2002. — Т. 383, №2. — С. 171–174.

8. Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение аналитических функций в пространстве Бергмана / М.Р. Лангаршоев // Дисс. к.ф.-м.н. — Душанбе, 2008.

9. Пиров Х.Х, Лангаршоев М.Р. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков, в пространстве Бергмана / Х.Х. Пиров, М.Р. Лангаршоев // Докл. АН. Респ. Тадж. — 2011. — Т. 54, №7. — С. 519–525.

10. Лангаршоев М.Р. О значение поперечников классов аналитических функций в пространстве Бергмана / М.Р. Лангаршоев // Межд. конф. «Современные проблемы математического анализа и теории функций». Сборник тезисов. — Душанбе, 2012. — С. 80–83.

11. Лангаршоев М.Р. О наилучшем среднеквадратическим приближением аналитических функций в пространстве Бергмана / М.Р. Лангаршоев // Межд. конф. «Современные проблемы теории функций и их приложения». Сборник тезисов. — Саратов: 2024. — С. 146–148.

12. Шабозов М.Ш, Тухлиев Д.К. О среднеквадратическом приближении функций в пространстве Бергмана B_2 и значение поперечников некоторых классов функций / М.Ш. Шабозов, Д.К. Тухлиев // Уфимск. матем. журн. — 2024. — Т. 16, №2. — С. 67–76.

13. Шабозов М.Ш, Тухлиев Д.К. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана / М.Ш. Шабозов, Д.К. Тухлиев // Чебышевский сб. — 2025. — Т. 26, вып. 1 — С. 116–130.

14. Bergman S. The cernel function and conformal mapping. / S. Bergman // Math. survays. — Т. 5. — N. Y.: Amer. Math. soc., 1950.

15. Смирнов В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. — М .: Наука, 1964. — 438 с.

16. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory / A Pinkus. — Berlin.: Springer-Verlag, Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. — 252 p.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

О.Ю. Лисина, Д.А. Лисин (Краснодар, ИМСИТ)
lisina_korovina@mail.ru

В процессе анализа тепловых полей возникает необходимость учитывать геометрическую конфигурацию объекта, подвергаемого исследованию. В особенности, когда речь идет о динамических процессах с изменяющимися теплофизическими параметрами. В этом случае построить приближенное решение особенно трудоемко, если рассматривается геометрически сложная область.

Рассматривается начально-краевая нестационарная задача теплопроводности:

$$\rho c \,\tfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - k\,\Delta u(t,x) = f(t,x), \quad 0 < t \leqslant T < \infty,\ x \in \Omega;$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in (\Omega + \partial\Omega) = \bar{\Omega};$$

$$B[u(t,x)]\big|_{\partial\Omega} \equiv \alpha\,\varphi(t,x) + \beta\,v(t,x) = g(t,x), \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0,$$

где Ω — ограниченная область трехмерного пространства; $x = (x_1, x_2, x_3)$

В качестве области решения выбирается втулка подвески автомобиля, геометрия которой была получена с помощью точного математического описания области средствами теории R-функций [5]. Соответственно, функция [1, 4], описывающая деталь, задается следующими соотношениями:

$$f_1 = ((((3^2-x^2)\cap(-5.5-z))\cup(2.5^2-x^2))\cap(5^2-y^2))\cap((6.5+z)(-2.5-z))$$

$$f_2 = (-z + y/1.5) \cap (-z - y/1.5) \cap f_1$$

$$f_3 = ((2.5^2 - y^2 - (z+2)^2) \cup f_2) \cap (4^2 - x^2)$$

$$f_4 = (-1.3^2 + y^2 + (z+2)^2) \cap f_3$$

$$f_5 = (1.5^2 - x^2) \cap (4.5 - y)(-2 + y)$$

$$f_6 = (1.5^2 - x^2) \cap (4.5 + y)(-2 - y)$$

$$f_7 = (f_5 \cup f_6) \cap (5.5 + z)$$

$$f = -f_7 \cap f_4$$

Поиск решения осуществляется по бессеточной схеме с использованием атомарных радиальных базисных функций (рис. 1). Такие функции имеют носитель в форме шара и являются бесконечно дифференцируемыми, что позволяет использовать их в качестве базисных при построении приближенных решений, не используя разностный подход [2].

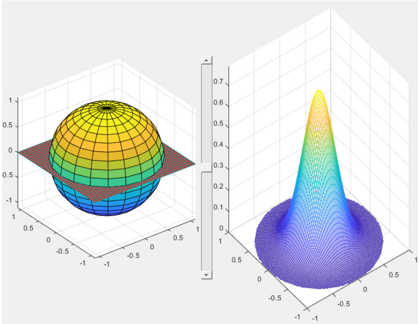


Рис. 1: Визуализация атомарной функции (носитель и в сечении)

После процедуры дискретизации задачи исходное дифференциальное уравнение сводится к дифференциально-разностному. Следует отметить, что дискретизация области решения проводится лишь для того, чтобы расположить в «узлах» сетки центры носителей атомарных функций. И в ходе стандартных преобразований получается система неоднородных уравнений, при решении которой применяются атомарные функции [3]. В качестве тестовых были решены две задачи с смешанными граничными условиями, у которых начальные условия $u(0, x) = 0, \quad x \in (\Omega + \partial\Omega) = \bar{\Omega}$, внутренний источник $f(t, x) = 0$. При этом для первой задачи были выбраны краевые условия первого рода:

$$u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_1;$$

$$u(t, x) = 5000t, \quad x \in \partial\Omega_2.$$

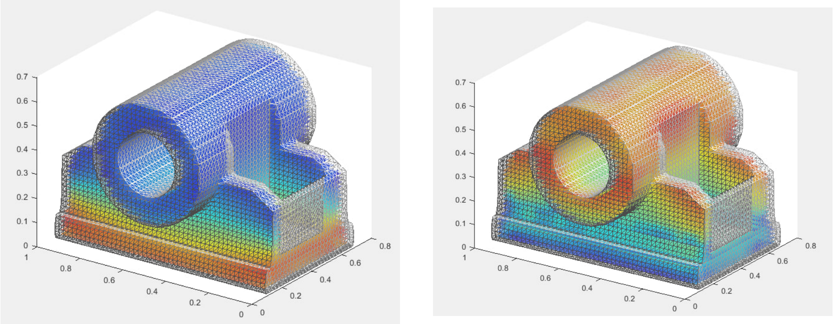
Шаг временной сетки был —$\tau = 0.01$ с. Полученное решение представлено на рис. 2а.

Для второй тестовой задачи с таким же шагом временной сетки были выбраны краевые условия 1-го и 2-го рода:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial n} = 10t, \quad x \in \partial\Omega_1;$$

$$u(t,x) = 500t, \quad x \in \partial\Omega_2.$$

Полученное решение представлено на рис. 2б.



а) б)

Рис. 2: Визуализация решения задач: а) краевые условия 1-го рода; б) смешанные краевые условия

Полученные приближенные решения демонстрируют большие возможности применения бессеточного метода решения краевых задач в сочетании с математическим аппаратом R-функций, используемым для описания геометрии области.

Литература

1. Sheiko T.I. R-functions in Development of Analytical Identification of Geometrical Objects /T.I. Sheyko, Yu.S. Litvinova, K.V. Maksymenko-Sheiko //Nonlinear Dynamics – 2016: Proceedings of 5th International Conference (September 27-30, 2016) / National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute» at al. — Kharkov, 2016. — p. 477-484.

2. Колодяжный В.М. Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений / В.М.Колодяжный, В.А.Рвачев // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — 43, N 6. — С. 155–177.

3. Лисин Д.А. Формирование процедуры решения краевой задачи теплопроводности по бессеточной схеме на основе атомарных радиальных базисных функций в комбинации методов фундаментальных решений и двойного замещения / Д.А.Лисин, О.Ю. Лисина // Сборник тематических статей "Краевые задачи и математическое моделирование Новокузнецк. — 2010. — Т. 2. — Стр.17-22.

4. Литвинова Ю.С. Аналитическая идентификация машиностроительных деталей с помощью R-функций. /Ю.С. Литвинова, К.В. Максименко-Шейко, А.В. Толок, Т.И. Шейко. Информационные технологии в проектировании и производстве: науч.-техн. журн. (ФГУП «ВИМИ», г. Москва). — 2016. — №1. — С. 38-44.

5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения /В.А.Рвачев.– Киев: Наук. Думка. — 1982. — 552с.

РАЗВИТИЕ У УЧАЩИХСЯ СПОСОБНОСТИ ПРИМЕНЯТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА И РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Лобанова Н.И. (Зеленокумск Ставропольского края, Центр внешкольной работы г. Зеленокумска)
lobantchik@yandex.ru

Дифференциальные уравнения занимают центральное место в математическом моделировании физических процессов. Они позволяют описывать динамику систем, изменения физических величин во времени и пространстве, что делает их незаменимым инструментом в естественных науках и инженерии [1]. Для учащихся, изучающих физику и математику, развитие навыков применения дифференциальных уравнений является важной задачей, способствующей глубокому пониманию предмета и формированию аналитического мышления [2].

Значение дифференциальных уравнений в физике:

Физические явления часто описываются законами, выраженными в виде дифференциальных уравнений [3]. Например:

Закон Ньютона о движении приводит к дифференциальным уравнениям второго порядка.

Уравнение теплопроводности и уравнение волны моделируют процессы теплопередачи и распространения волн.

Квантовая механика использует уравнение Шредингера.

Таким образом, умение решать дифференциальные уравнения и интерпретировать их решения позволяет учащимся не только понять физические процессы, но и прогнозировать поведение систем.

Проблемы и задачи обучения.

Несмотря на важность, многие учащиеся испытывают трудности при изучении дифференциальных уравнений и их применении в физике [3;4]. Основные причины:

Абстрактность математического аппарата.

Недостаток практических примеров и задач, связанных с реальными физическими явлениями.

Слабая связь между математическими методами и физическим смыслом.

Для преодоления этих проблем необходимо создавать условия, способствующие развитию у учащихся способности применять дифференциальные уравнения в контексте физики [4].

Методические подходы к развитию навыков.

1. Интеграция математики и физики.

Обучение должно строиться на тесной взаимосвязи между математическими методами и физическими задачами. Например, при изучении закона сохранения энергии можно сразу переходить к дифференциальным уравнениям, описывающим динамику системы.

2. Использование наглядных моделей и компьютерных симуляций.

Визуализация решений дифференциальных уравнений с помощью графиков и программ помогает учащимся лучше понять поведение физических систем и увидеть связь между математическими формулами и реальными процессами. Современные программные средства и специализированные симуляторы, позволяют моделировать динамику систем, изменять параметры и наблюдать результаты в реальном времени [1;3].

3. Постепенное усложнение задач.

Начинать следует с простых дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих элементарные физические процессы (например, затухающие колебания, движение с сопротивлением воздуха), постепенно переходя к более сложным системам и уравнениям высших порядков. Такой подход помогает учащимся формировать прочное понимание базовых принципов [2;4].

4. Акцент на интерпретацию решений

Важно не только научить решать уравнения, но и развивать умение интерпретировать полученные решения в физическом контексте.

Это включает анализ поведения функций, выявление устойчивости решений, понимание физических ограничений и условий применимости моделей.

5. Проектная и исследовательская деятельность.

Включение в учебный процесс проектов, где учащиеся самостоятельно формулируют задачи, составляют дифференциальные уравнения и исследуют их решения, способствует развитию критического мышления и творческого подхода. Например, можно предложить исследовать колебания маятника с учётом сопротивления среды или моделировать распространение тепла в различных материалах [3;4].

6. Междисциплинарные связи.

Связывание изучения дифференциальных уравнений с другими предметами, такими как химия, биология, инженерия, помогает учащимся увидеть универсальность методов и расширяет их кругозор. Например, дифференциальные уравнения применяются для описания кинетики химических реакций или роста популяций.

Рекомендации для преподавателей.

Использовать разнообразные формы подачи материала: лекции, практические занятия, лабораторные работы, семинары.

Поощрять активное участие учащихся, задавать вопросы, стимулировать обсуждения.

Предоставлять доступ к современным программным средствам и обучающим ресурсам.

Организовывать совместные проекты и конкурсы, направленные на применение дифференциальных уравнений в реальных задачах.

Оценивать не только правильность решения, но и глубину понимания физического смысла.

Заключение.

Развитие у учащихся способности применять дифференциальные уравнения для анализа и решения физических задач является ключевым элементом формирования их научного мировоззрения и профессиональной компетентности. Освоение этого навыка способствует не только успешному изучению физики и математики, но и развитию критического мышления, умения работать с абстрактными моделями и применять полученные знания на практике [3;5].

В современном образовательном процессе важно создавать условия, при которых учащиеся смогут самостоятельно открывать закономерности, экспериментировать с моделями и видеть непосредственную связь между математическими методами и физическими явлениями. Такой подход формирует у них устойчивый интерес к предмету и мотивацию к дальнейшему обучению [2-4].

Кроме того, развитие навыков работы с дифференциальными уравнениями открывает широкие перспективы для будущей профессиональной деятельности в науке, технике, информационных технологиях и других областях, где требуется анализ сложных динамических систем.

В перспективе целесообразно внедрять междисциплинарные образовательные программы, которые объединяют математику, физику и компьютерные науки, а также использовать современные цифровые технологии и интерактивные платформы для повышения эффективности обучения. Важно также развивать у преподавателей компетенции в области методики преподавания дифференциальных уравнений с акцентом на их применение в физике [3;5].

Таким образом, системный и комплексный подход к обучению дифференциальным уравнениям в контексте физических задач способствует формированию у учащихся глубоких знаний, практических навыков и творческого мышления, необходимых для успешного освоения современных научных и технических дисциплин.

Литература

1. Аннабаева Н. Р., Нурмырадов Гундогды. Дифференциальные уравнения и их роль в моделировании физических процессов // Наука и мировоззрение, 2025. 1 (38), С. 37-41.

2. Лобанова Н.И. Обучение школьников решению физических задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям / Н.И. Лобанова, В.Д. Селютин // Творчество студентов и школьников в области математики и информатики и методы его развития : материалы 44-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики ун-тов и пед. вузов, г. Минск, 25–27 сентября 2025 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. Максима Танка ; редкол.: А. Г. Мордкович, А. В. Ястребов, И. Е. Малова. – Минск : БГПУ, 2025. С. 123-127.

3. Лобанова Н.И. Изучение старшеклассниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования как средство формирования целостной картины мира Дисс. … кандидата пед. / Лобанова Н.И. ; Орлов. гос. ун-т им. И.С. Тургенева. – Орёл, 2024.–230.с.

4. Селютин В.Д. Разработка оценочных заданий для диагностики готовности будущих учителей Математики к обучению старшеклассников дифференциальным уравнениям / В.Д. Селютин, Т.К.

Авдеева, Н.И. Лобанова, Н.Н. Яремко // Ученые записки орловского государственного университета № 4 (109) 2025. С. 355-361.

5. Лобанова, Н. И. Практико-ориентированный подход к обучению дифференциальным уравнениям как методологическая основа формирования целостной картины мира / Н. И. Лобанова, В. Д. Селютин, Н. Н. Яремко // Мир науки. Педагогика и психология. — 2025. — Т 13. — №5. — URL: https://mir-nauki.com/PDF/96PDMN525.pdf.

О КЛАССИФИКАЦИИ АЛГЕБР ЛИ С ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМИ ОРБИТАМИ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Ф.И. Лобзин (Москва, МГУ)
fiadat@mail.ru

Важнейшим примером пуассонова многообразия является аффинное пространство $\mathbb{R}^n$ с заданным на нем тензорным полем π^{ij}, удовлетворяющим свойствам:

$$\pi^{jk}(x) = -\pi^{kj}(x), \tag{1}$$

$$\pi^{jk}\partial_k\pi^{lm} + \pi^{lk}\partial_k\pi^{mj} + \pi^{mk}\partial_k\pi^{jl} = 0. \tag{2}$$

Простейшим примером такого тензора является тензор, не зависящий от координат, однако изучение свойств подобного пуассонова многообразия сводится к простым задачам линейной алгебры. Следующим по сложности и важным примером такого тензора является тензор, линейно зависящий от x^k — координат на $\mathbb{R}^n$:

$$\pi^{ij} = c_k^{ij}x^k. \tag{3}$$

Тогда для тензора c_k^{ij} условия, выписанные ранее, переписываются в виде:

$$c_k^{ij} = -c_k^{ji}, \tag{4}$$

$$c_e^{ad}c_d^{bc} + c_e^{bd}c_d^{ca} + c_e^{cd}c_d^{ab} = 0. \tag{5}$$

Отсюда видно, что любую линейную пуассонову структуру можно интерпретировать как тензорное поле на $\mathfrak{g}^*$ — пространстве, сопряженном некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$, со структурными константами из формулы (3).

Такой подход рассмотрен, например, в книге В. И. Арнольда [1]. Симплектические слои такого пуассонова многообразия совпадают с орбитами коприсоединённого представления. Иными словами, механическая система с n степенями свободы при таком подходе описывается алгеброй Ли, у которой орбиты коприсоединённого представления общего положения имеют размерность $2n$. Этот факт вызывает интерес к построению алгебр Ли с орбитами определённых размерностей, их классификации и изучению свойств получившихся интегрируемых систем.

Простейший случай среди интегрируемых систем — это системы с одной степенью свободы. Они моделируются алгебрами Ли с двумерными орбитами коприсоединённого представления общего положения. Полная классификация таких алгебр Ли проведена в [2], где также приводятся ссылки на работы, посвященные конкретным интегрируемым системам, соответствующим этим алгебрам. В работе [3] изучена топология орбит общего положения в алгебрах из списка из основной теоремы из [2].

Доклад посвящен следующему по сложности и важному случаю интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Такие системы моделируются алгебрами Ли с четырёхмерными орбитами коприсоединённого представления общего положения. Различные результаты о структуре таких алгебр Ли может быть полезны для решения различных задач теории интегрируемых систем, например, для построения полных блинволютивных наборов многочленов и проверки обобщенной гипотезы Мищенко—Фоменко, сформулированной в [4], или для построения геодезических потоков на орбитах коприсоединённого представления с использованием конструкции, предложенной в [5]. В частности на докладе будет рассказано, как при помощи, полученных структурных результатов удалось доказать обобщенную гипотезу Мищенко–Фоменко для рассматриваемых алгебр Ли.

Литература

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. — М. : Наука, 1989. — 472 с.

2. Коняев А.Ю. Классификация алгебр Ли с орбитами коприсоединенного представления общего положения размерности 2 // Матем. сб. — 2014. — Т. 205. — С. 47–66.

3. Fomenko A.T. Geometry, dynamics and different types of orbits / A.T. Fomenko, A.Y. Konyaev // J. Fixed Point Theory Appl. — 2014. — Vol. 15. — P. 49–66.

4. Bolsinov A.V. Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras / A.V. Bolsinov, P. Zhang // Transformation Groups. — 2016. — Vol. 21. — P. 51–86.

5. Galinski A. Some metrics admitting nonpolynomial first integrals of the geodesic equation // Physics Letters B. — 2021. — Vol. 820. — P. 634050.

ОДНОРОДНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С 5-МЕРНОЙ АЛГЕБРОЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

А.В. Лобода (Воронеж, ВГТУ, ВГУ; Москва, МГУ)
lobvgasu@yandex.ru

В комплексном пространстве $\mathbb{C}^{\ntrianglerighteq}$ изучаются орбиты 7-мерных вещественных алгебр Ли, являющиеся голоморфно однородными гиперповерхностями этого пространства. После работ [1], [2] в этой задаче представляет интерес достаточно обширное семейство алгебр Ли из [3], содержащих в качестве нильрадикала 5-мерную алгебру Гейзенберга H_5. Два нетривиальные коммутационные соотношения

$$[e_1, e_3] = [e_2, e_4] = e_5,$$

характеризующие этот нильрадикал, дополняются в 7-мерных алгебрах двумя столбцами, описывающими «взаимодействие» H_5 с парой дополнительных базисных полей e_6, e_7.

Примеры таких столбцов для двух типов алгебр R_{15} и R_{18} (из 27 типов работы [R-W]) приведены ниже ($n \geqslant 0, p \in \mathbb{R}$):

$R_{15}(n > 0)$	$[e_k, e_6]$	$[e_k, e_7]$
$k = 1$	$-(e_1 + ne_2)$	$-e_1$
$k = 2$	$ne_1 - e_2$	$-e_2$
$k = 3$	$-(e_3 + ne_4)$	e_3
$k = 4$	$ne_3 - e_4$	e_4
$k = 5$	$-2e_5$	0

,

R_{18}	$[e_k, e_6]$	$[e_k, e_7]$
$k = 1$	$-(1 + n)e_1$	$-pe_1$
$k = 2$	$-e_2$	$-e_4$
$k = 3$	$(n - 1)e_3$	pe_3
$k = 4$	$-e_4$	e_2
$k = 5$	$-2e_5$	0

.

Отметим, что для приведенных алгебр (как и для большинства из остальных 25 типов) выполняется коммутационное соотношение $[e_6, e_7] = 0$.

Уточним также, что в связи с задачами обработки изображений (см. [4]) основной интерес представляют Леви-невырожденные орбиты обсуждаемых 7-мерных алгебр Ли.

Изучение орбит абстрактных вещественных алгебр Ли в комплексных пространствах подразумевает (на первом этапе) реализацию элементов алгебры в виде голоморфных векторных полей с последующим интегрированием (на втором этапе) этих реализаций.

Важную вспомогательную роль на обоих этих этапах играет 3-мерная абелева подалгебра $I_3 =< e_3, e_4, e_5 >\subset H_5 \subset g_7$, содержащаяся в любой алгебре g_7 из обсуждаемых 27 типов. Опираясь на I_3, можно существенно упрощать реализации базисных элементов алгебр Ли, касательных к невырожденным орбитам этих алгебр. Но для каждой алгебры возникают, вообще говоря, пять разных подслучаев потенциально возможных упрощений базиса идеала H_5.

В трех первых подслучаях на гипотетической невырожденной орбите удается выпрямить до состояния $e_k = \partial/\partial z_{k-1}$ базис абелевой подалгебры I_3, в четвертом - выпрямляется тройка полей e_1, e_4, e_5, в пятом подслучае выпрямляются лишь базисные поля e_4, e_5 идеала H_5. В целом описание голоморфных реализаций в $\mathbb{C}^{\ntrianglerighteq}$ обсуждаемых 7-мерных алгебр Ли подразумевает (в рамках предлагаемой схемы) рассмотрение $135 = 27 \times 5$ различных ситуаций.

Во многих из таких ситуаций выполнение совокупности коммутационных соотношений, аналогичных приведенным в таблицах, оказывается невозможным. Требование существования хотя бы одной невырожденной орбиты в $\mathbb{C}^{\ntrianglerighteq}$ также является весьма жестким для изучаемых алгебр Ли.

Теорема 1. *Ни одна из 7-мерных алгебр Ли, имеющих 5-мерный гейзенбергов нильрадикал, не допускает невырожденных 7-мерных орбит в* $\mathbb{C}^{\ntrianglerighteq}$ *в рамках пятого случая предлагаемой схемы.*

В первых четырех случаях невырожденные орбиты встречаются также достаточно редко. Тем не менее, справедлива

Теорема 2. *В рамках каждого из четырех первых случаев имеются примеры 7-мерных алгебр Ли с гейзенберговым нильрадикалом* H_5 *и Леви-невырожденными 7-мерными орбитами в* $\mathbb{C}^{\ntrianglerighteq}$.

Пример 1. Алгебра голоморфных векторных полей с базисом

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, -z_3), e_3 = (0, 0, i, z_1 - iz_2), e_4 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_5 = (0, 0, 0, 1), e_6 = (nz_2 - z_1, -nz_1 - z_2, (in-1)z_3, nz_3(z_1 - iz_2) - 2z_4),$$

$$e_7 = (-z_1, -z_2, z_3, 0)$$

удовлетворяет при $n > 0$ коммутационным соотношениям типа R_{15} в подслучае 4. Орбитами этого семейства алгебр являются невырожденные гиперповерхности

$$y_4 = (y_1 - x_2)y_3 + \exp(B\, arg(y_1 + iy_2)),\ B = -2/n.$$

Пример 2. Алгебра голоморфных векторных полей с базисом

$$e_1 = (1, 0, 0, -z_2),\ e_2 = (0, 0, i, -z_3),\ e_3 = (0, 1, 0, 0),\ e_4 = (0, 0, 1, 0),$$

$$e_5 = (0, 0, 0, 1), e_6 = (-z_1, -z_2, -z_3, -2z_4),$$
$$e_7 = (-pz_1, pz_2, iz_3, -(1/2)z_3^2)$$

удовлетворяет коммутационным соотношениям типа R_{18} (при $n = 1$) в подслучае 1. Одной из орбит этого семейства алгебр является невырожденная гиперповерхность второго порядка (квадрика)

$$y_4 = y_1 y_3 + y_2^2.$$

Для сравнения интересно отметить, что алгеброй сдвигов этой квадрики является 7-мерная алгебра Гейзенберга.

Литература

1. Атанов А. В. Алгебры Ли со «слабыми» коммутативными свойствами и задача об однородности / А.В. Атанов, А.В. Лобода // Труды ММО. — 2024. — Т. 85, № 1. — С. 129–155.

2. Лобода А.В. О 7-мерных алгебрах Ли, имеющих 5-мерные нильрадикалы / А.В. Лобода // Материалы международной конференции ВЗМШ-2025. Воронеж, 2025. — С. 150-151.

3. Rubin J., Winternitz P. Solvable Lie algebras with Heisenberg ideals. J. Phys. A: Math. Gen. 1993. V. 26. — P. 1123–1138.

4. Крутских, В. В. Применение алгебраических инвариантов для моделирования лицевой мимики / В. В. Крутских // Вестник ВГУ. Сер. : Системный анализ и информ. технологии. — 2025. — № 3. — С. 51—62.

ТРЕТЬЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГУ)
lomovcev@bsu.by

На множестве $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ решена и изучена задача:

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t)+$$

$$+c(x,t)u_x(x,t) + q(x,t)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x > 0, \tag{2}$$

$$\Gamma(t)u(x,t) \equiv [\beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0. \tag{3}$$

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k - раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Из дифференциальных уравнений характеристик $dx - (-1)^i a(x,t)dt = 0$ находим характеристики $g_i(x,t) = C_i$, $i = 1, 2$, уравнения (1). Если коэффициент $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, то они по t строго возрастают для $i = 1$ и убывают для $i = 2$ при возрастании x. Поэтому функции $y_i = g_i(x,t)$ имеют обратные функции $x = h_i\{y_i,t\}$, $t = h^{(i)}[x,y_i]$. Когда $a \in C^2(G_\infty)$, тогда g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2$ по x, t, y_i, $i = 1, 2$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, b, c, $q \in C^1(G_\infty)$ *в уравнении (1) и* β, $\gamma \in C^1[0,+\infty[$, $\beta(t) \neq 0$, $t \geqslant 0$, *в граничном условии (3). Третья смешанная задача (1)–(3) на множестве* $\dot{G}_\infty$ *имеет единственные и устойчивые по* φ, ψ, f, μ *классические решения* $u \in C^2(G_\infty)$, $G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, *если и только, если веры требования гладкости и согласования:*

$$\varphi \in C^2[0,+\infty[,\ \psi \in C^1[0,+\infty[,\ \mu \in C^1[0,+\infty[,\ f \in C(G_\infty),$$

$$\int\limits_0^t f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty),\ i = 1, 2, \tag{4}$$

$$\beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0),$$

$$\beta'(0)\varphi'(0) + \beta(0)\psi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) + \gamma(0)\psi(0) = \mu'(0).$$

Классические решения задачи (1)–(3) на $\dot{G}_\infty$ *– это функции*

$$u_-(x,t) = \frac{(auv)(h_2\{g_2(x,t),0\},0) + (auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0)}{2a(x,t)} +$$

$$+ \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} \frac{\psi(s)v(s,0) - \varphi(s)v_\tau(s,0) + b(s,0)\varphi(s)v(s,0)}{2a(x,t)} ds +$$

$$+ \frac{1}{2a(x,t)} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\,\tau\}} f(s,\tau)v(s,\tau)\,ds,$$

$$(x,t) \in G_- = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) > g_2(0,0)\},$$

$$u_+(x,t) = \frac{(auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0) + (auv)(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\},0)}{2a(x,t)} +$$

$$+ \int\limits_0^{h_1\{g_1(x,t),0\}} \frac{\psi(s)v(s,0) - \varphi(s)v_\tau(s,0) + b(s,0)\varphi(s)v(s,0)}{2a(x,t)} ds +$$

$$+ \int\limits_0^{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\}} \frac{\psi(s)v(s,0) - \varphi(s)v_\tau(s,0) + b(s,0)\varphi(s)v(s,0)}{2a(x,t)} ds +$$

$$+ \frac{1}{2a(x,t)} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\,\tau\}} \breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{h^2[0,g_2(x,t)]}^{t} a(0,\rho) \left[\frac{(auv)(h_1\{g_1(x,\rho),0\},0)}{a(x,\rho)} \right]'_x \Bigg|_{x=0} d\rho +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{h^2[0,g_2(x,t)]}^{t} a(0,\rho) \left[\frac{(auv)(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,\rho)]),\,0\},0)}{a(x,\rho)} \right]'_x \Bigg|_{x=0} d\rho +$$

$$+ \int\limits_{h^2[0,g_2(x,t)]}^{t} \frac{a(0,\rho)}{2} d\rho \left[\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,\rho)]),\,0\}} \frac{\psi(s)v(s,0) - \varphi(s)v_\tau(s,0)}{a(x,\rho)} ds \right]'_x \Bigg|_{x=0} +$$

$$+\int\limits_{h^2[0,g_2(x,t)]}^{t}\frac{a(0,\rho)}{2}d\rho\left[\int\limits_{0}^{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,\rho)]),\,0\}}\frac{b(s,0)\varphi(s)v(s,0)}{a(x,\rho)}ds\right]'_x\Bigg|_{x=0}+$$

$$+\int\limits_{h^2[0,g_2(x,t)]}^{t}\frac{a(0,\rho)}{2}\,d\rho\int\limits_0^{\rho}d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}}\breve{f}(|s|,\tau)\left[\frac{v(|s|,\tau;|x|,t)}{a(|x|,t)}\right]'_x\Bigg|_{x=0}ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{h^2[0,g_2(x,t)]}^{t}\frac{d\rho}{a(0,\rho)}\int\limits_0^{\rho}\Bigg[\breve{f}(|h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}|,\tau)v(|h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}|,\tau;0,\rho)\times$$

$$\times\frac{\partial h_1\{g_1(0,\rho),\tau\}}{\partial\rho}+$$

$$+\breve{f}(|h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}|,\tau)v(|h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}|,\tau;0,\rho)\frac{\partial h_2\{g_2(0,\rho),\tau\}}{\partial\rho}\Bigg]d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a(0,t)}\int\limits_0^{h_1\{g_1(0,t),0\}}[\psi(s)v(s,0)-\varphi(s)v_\tau(s,0)+b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds+$$

$$+\frac{(auv)(h_1\{g_1(0,t),0\},0)}{a(0,t)}+\int\limits_{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]}^{t}a(0,\rho)\frac{\mu(\rho)}{\beta(\rho)}d\rho+$$

$$+\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\hat{a}(0,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(0,t),\,\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\,\tau\}}\breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau;0,t)ds,$$

$$(x,t)\in G_+=\{(x,t)\in G_\infty: g_2(x,t)\leqslant g_2(0,0)\}.$$

Здесь результирующей правой частью уравнения (1) служит функция $\breve{f}(x,t)=f(x,t)+f^{(0)}(x,t)+f^{(1)}(x,t)-f_\mu(x,t)$, где $f^{(i)}(x,t)$, $i=0,1$, – компенсирующие слагаемые вычитаемых из решения соответствующей вспомогательной задачи Коши для $\forall x$, $t\geqslant 0$ и

$$f_\mu(x,t)=\mathcal{L}\left(\int_{h^2[0,g_2(x,t)]}^{t}a(0,\rho)[\mu(\rho)/\beta(\rho)]d\rho\right)$$

– компенсирующее вычитаемое граничного режима (3) из f. На G_- функция Римана $v(s,\tau)=v(s,\tau;x,t)$ – решение задачи Гурса:

$$v_{\tau\tau}(s,\tau)-(a^2(s,\tau)v(s,\tau))_{ss}-(b(s,\tau)v(s,\tau))_\tau-(c(s,\tau)v(s,\tau))_s+$$

$$+q(s,\tau)v(s,\tau)=0,\ (s,\tau)\in\Delta MPQ,$$

$$v(s,\tau)=\exp\left\{\int\limits_t^\tau k_1(h_1\{g_1(x,t),\ \rho\},\rho)\,d\rho\right\},\ g_1(s,\tau)=g_1(x,t),$$

$$v(s,\tau)=\exp\left\{\int\limits_t^\tau k_2(h_2\{g_2(x,t),\rho\},\rho)\,d\rho\right\},g_2(s,\tau)=g_2(x,t),\tau\in[0,t],$$

с $k_1(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)-4a_\tau(s,\tau)+c(s,\tau)\}/\{4a(s,\tau)\}$ на QM и $k_2(s,\tau)=\{a(s,\tau)b(s,\tau)-4a(s,\tau)a_s(s,\tau)-c(s,\tau)\}/\{4a(s,\tau)\}$ на MP. На G_+ функция Римана $\tilde{v}(s,\tau)=\tilde{v}(s,\tau;x,t)$ задачи Гурса:

$$\hat{v}_{\tau\tau}(s,\tau)-(\hat{a}^2(s,\tau)\hat{v}(s,\tau))_{ss}-(\hat{b}(s,\tau)\hat{v}(s,\tau))_\tau-(\tilde{c}(s,\tau)\hat{v}(s,\tau))_s+$$

$$+\hat{q}(s,\tau)\hat{v}(s,\tau)=0,\ (s,\tau)\in\Delta MPQ,$$

$$\hat{v}(s,\tau)=\exp\left\{\int\limits_t^\tau \tilde{k}_1(h_1\{g_1(x,t),\rho\},\rho)\,d\rho\right\},\ g_1(s,\tau)=g_1(x,t),$$

$$\hat{v}(s,\tau)=\exp\left\{\int\limits_t^\tau \tilde{k}_2(h_2\{g_2(x,t),\rho\},\rho)d\rho\right\},g_2(s,\tau)=g_2(x,t),\tau\in[0,t],$$

с функциями $\tilde{k}_1(s,\tau)$ на кривой QM и $\tilde{k}_2(s,\tau)$ на кривой MP, соответственно равными функциям $k_1(s,\tau)$ и $k_2(s,\tau)$, в которых коэффициенты a, b, c, q соответственно заменены на четные $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{q}$ и нечетное $\tilde{c}$ продолжения по x коэффициентов a, b, c, q.

Следствие 1. *Если правая часть уравнения (1) зависит только от x или t и непрерывна $f\in C[0,+\infty[$, то теорема 1 справедлива без интегральных требований гладкости (4).*

Следствие 2. *В теореме 1 принадлежность интегралов (4) множеству $C^1(G_\infty)$ равносильна их принадлежности множеству $C^{(0,1)}(G_\infty)$ или $C^{(1,0)}(G_\infty)$, где $C^{(0,1)}(G_\infty)$ $[C^{(1,0)}(G_\infty)]$ – множество непрерывных [непрерывно дифференцируемых] по x и непрерывно дифференцируемых [непрерывных] по t функций на G_∞.*

Замечание. Формулы Римана единственных и устойчивых по входным данным классических решений и критерии корректности первой и второй смешанных задач для общего односкоростного волнового уравнения с переменными коэффициентами найдены в [1, 2]. Таким образом, смешанные задачи (1)–(3) решены и изучены при всех $|\beta(t)| + |\gamma(t)| \neq 0$, $t \geqslant 0$, так как при $\beta(t) = 0$, $\gamma \in C^2[0, +\infty[$, $\gamma(t) \neq 0$, $t \geqslant 0$, она фактически решена и изучена в [1].

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Формулы Римана первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта, – 2023, – № 2(62), – Серыя B. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія), – pp. 16–31.

2. F. Lomovtsev, Z. Liu. Riemann Formulas of the Classical Solution and a Correctness Criterion to the Second Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on a Segment. // Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2025, – pp. 1–32.

ПОТЕНЦИАЛЫ НЬЮТОНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА—КИПРИЯНОВА

Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин (Воронеж, ВГУ;
Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина; Липецк, ЛГПУ им. П.П.
Семенова-Тян-Шанского) (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
levnlya@mail.ru, y.bulatov@bk.ru, roshupkinsa@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}^n$=$\{x$=$(x_1, \ldots, x_n)\}$, $\mathbb{R}^n_+$=$\{x : \ x_i > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}^n_+}$=$\{x : \ x_i \geqslant 0\}$, $i = \overline{1, n}$, $-\gamma = (-\gamma_1, \ldots, -\gamma_n)$, $-\gamma_i \in (-1, 0)$.

Сингулярный дифференциальный оператор Киприянова имеет вид:

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^{n} B_{-\gamma_i}, \ B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{-\gamma_i}{x_i} \ \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Пусть ограниченная область Ω^+ в $\overline{\mathbb{R}^+_n}$ прилегает к координатным гиперплоскостям x_i=0, тогда её граница $\partial\Omega$=$\Gamma^+ \cup \Gamma^0$, где $\Gamma^+ \subset \mathbb{R}^+_n$, $\Gamma^0 \subset \{x \in \overline{\Omega} : x_i = 0$. Предполагается, что граница Γ^+ — кусочно гладкая.

Теорема 1. *Если четные по Киприянову [1, с.21] функции u и v дважды непрерывно дифференцируемы в области* Ω^+, *то справедливы следующие первая и вторая* $\Delta_{B_{-\gamma}}$*-формулы Грина*:

$$\int\limits_{\Omega^+} \Delta_{B_{-\gamma}} u(x)v(x)d\mu = \int\limits_{\Gamma^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \overline{\omega}} v(x) \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} d\Gamma - \int\limits_{\Omega^+} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \ \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} d\mu,$$

$$\int\limits_{\Omega^+} \left(\Delta_{B_{-\gamma}} u(x)v(x) - u(x)\ \Delta_{B_\gamma} v(x)\right) d\mu =$$

$= \int\limits_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \overline{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \overline{\nu}}\right) d\Gamma_\mu$, где $\overline{\nu}$ единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ^+, $d\Gamma_\mu = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} d\Gamma_\mu^+$.

В работе [2] получено следующее представление оператора Киприянова в сферических координатах $x = r\Theta$, $|\Theta = 1|$:

$$\Delta_{B-\gamma} = B_{n-|\gamma|-1} - \frac{1}{r^2} \Delta_{B_{-\gamma}}(\Theta), \tag{1}$$

где $B_{n-|\gamma|-1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r} \ \frac{\partial}{\partial r}$, а $\Delta_{B_{-\gamma}}(\Theta)$ — оператор Киприянова—Бельтрами на сфере. Используя (1) нетрудно доказать, что функция $v = |x|^{2-n+|\gamma|}$ при $n - |\gamma| > 2$ и $|x| \neq 0$ является K-гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа—Киприянова $\Delta_{B-\gamma} v = 0$ в каждой точке $\Omega^+ \setminus \{x : |x|=0\}$. Переходя в выражении $\Delta_{B_{-\gamma}} |x|^{2-n+|\gamma|}$ к сферическим координатам, учитывая (1), получим

$\Delta_{B_{-\gamma}} |x|^{2-n+|\gamma|} = B_{n-|\gamma|-1} r^{2-n+|\gamma|} = 0.$

Функция $|x|^{2-n+|\gamma|}$ при $n - |\gamma| > 0$ называется сингулярным (элементарным) решением оператора Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$.

Теорема 2. *Пусть* $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$, $v = |x|^{2-n+|\gamma|}$, $n - |\gamma| > 2$. *Тогда имеет место следующая формула представления решения уравнения Пуассона—Киприянова*

$$u(x) = \frac{(n+|\gamma|-2)^{-1}}{|S_1^+(n)|_{-\gamma}} \left[\int\limits_{\Gamma^+} \left(v(y) \frac{\partial \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x)}{\partial \overline{\nu}_y} - \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y u(x) \frac{\partial v(y)}{\partial \overline{\nu}} \right) y^{-\gamma} d\Gamma + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega^+} v(y)\ \Delta_{B_{-\gamma}}\ \overset{*}{\mathbb{T}}{}^y\ u(x)\ y^{-\gamma} dy \right], \tag{2}$$

где $S_1^+(n)|_{-\gamma}$ *— площадь части взвешенной единичной сферы в* $\mathbb{R}_n^+$ *с центром в начале координат, а оператор* $\mathbb{T}$*-сдвиг [3] определен следующим выражением:*

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y\ f(x) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \frac{x_i^{\gamma_i+1} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i}{\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i y_i\ \cos\alpha_i}\ \right)^{\gamma_i+1}} \times$$

$$\times f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right)\ d\alpha_i,$$

В формуле (1) первый интеграл справа называется *объемным $\Delta_{B_{-\gamma}}$ потенциалом Ньютона*, второй — $\Delta_{B_{-\gamma}}$ *потенциалом Ньютона двойного слоя*, третий $\Delta_{B_{-\gamma}}$ *потенциалом Ньютона простого слоя.*

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 200 с.

2. Ляхов Л.Н. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Диффер. уравн. — 2020. — Т. 56, № 12. —С. 1610–1620.

3. Ляхов Л.Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина, С.А. Рощупкин, Ю.Н. Булатов // Изв. ВУЗов. Матем. — 2023. — № 7. —С. 52–65.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕЛЬФАНДА—ШАПИРО ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ СО СЛАБО ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ВЕСАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ[1]

Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин, В.А. Калитвин (Воронеж, ВГУ, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, Москва, РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева, Липецк, РАНХиГС)
levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru, kalitvin@mail.ru

δ-Функции сосредоточенные в точке введены одним из основателей квантовой механика П.Дираком. Математическое обоснование введенного П.Дираком определения сделано советским математиком С.Л. Соболевым в 30-е годы прошлого века (см.[1] и имеющиеся там ссылки). В середине XX века появились конструкция δ-функций сосредоточенных на поверхностях размерности $n-1$ в евклидовом n-мерном пространстве (в работе [2], см. также книгу [3], гл. III). В этой заметке мы вводим весовые δ-функционалы, сосредоточенные на евклидовых поверхностях *псевдоевклидовой размерности* (введена в [4]), которая порождена интегральной мерой со слабой сингулярностью в интегральном весе. $\prod_{i=1}^{n} x_i^{-\gamma_i}$, когда все координаты мультииндекса $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, удовлетворяют неравенствам $-1{<}-\gamma_i{<}0$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

Введем обозначения $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1 \ldots, x_n)\}, \mathbb{R}_n^+ = \{x : x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$, $-\gamma_i = -2\mu_i + 1, \frac{1}{2} < \mu_i < 1$. Вводимое определение δ-распределения на (n-1)-р=мерной поверхности евклидова пространства основано на многомерном операторе преобразования Пуассона

$$\mathcal{P}_x^\mu f(x,t) = C(n,\mu) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi f(x_1 \cos a_1, x_2 \cos a_2, \ldots, x_n \cos a_n, t) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \sin^{2\mu_i} \alpha_i d\alpha_i, \quad C(n,\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\frac{\mu_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\mu_i+1}{2})}.$$

Через $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим подпространство пространства Л.Шварца пробных функций. Пространство соответствующих распределений, регулярные представители которых порождены интегральной мерой Лебега—Киприянова $\prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} dx_i$, обозначаем символом $S'_{ev,-\gamma}$.

Определение 1. Пусть $\varphi = \varphi(x) \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. Весовой обобщенной δ-функцией, сосредоточенной на поверхности $P(x)=0$ будем называть следующее распределение

$$(\mathcal{P}_x \delta(P(x)), \varphi)_{-\gamma} = C(n,\mu) \int\limits_{\Gamma=\{z: P(z)=0\}} \widetilde{\varphi}(z) Z_2^{-2\mu} d\Gamma(z), \qquad (1)$$

где $\gamma_i = 2\mu_i - 1$, $C(n,\mu)$ — константа, нормирующая многомерный оператор Пуассона и введены обозначения $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}, z_{2n})$, $Z_2^{-2\mu} = \prod_{i=1}^n z_{2i}^{-2\mu}$, $\quad Z_1 = (z_1, z_3, \ldots, z_{2n-1})$, $Z_2 = (z_2, z_4, \ldots, z_{2n})$,

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{2i-1} = x_i \cos\alpha_i, \\ z_{2i} = x_i \sin\alpha_i \end{array} \right| , \quad 0 < \alpha_i < \pi, i = \overline{1,n}, \quad -\infty < z_{2i-1} < \infty, \ 0 < z_{2i} < \infty.$$

$$\widetilde{\varphi}(z) = \varphi\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \ldots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2}\right),$$

Поверхность интегрирования в (1), полученная отображением через посредство оператора Пуассона, будем называть $\mathcal{P}$ - поверхностью ($\mathcal{P}$-сфера, $\mathcal{P}$-плоскость). Заметим, что если бы первоначально поверхность $P(x)=0$ была бы n-полусферой $|x|=R$, в $\mathbb{R}_n^+$, то $\mathcal{P}$-сфера — уже $2n$-полусфера $|z|=R$ в $\mathbb{R}_{2n}^+ = \{z : z_{2i} > 0\}$. Если $P(x)=0$ — плоскость в $\mathbb{R}_n$ с елиничным вектором нормали $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ то (1) — $\mathcal{P}$-плоскость в -$\mathbb{R}_{2n}$ с единичным вектором нормали $\Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \ldots, \theta_n) \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

Ранее в [4] для случая всех неотрицательных координат мультииндекса γ конструкция (1) применена при определении преобразования Радона—Киприянова.

Литература

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1988. — 256 с.

2. Гельфанд И. М. Я. Однородные функции и их приложения. / И. М. Гельфанд, З. Шапиро // УМН. — 1953. № 4. — С.3–70.

3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними./ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов // М.: ГИФМЛ. — С. 470.

4. Ляхов Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 517–528.

4. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона. / И. А. Киприянов, Л. Н. Ляхов // М.: Доклады АН СССР. 1974. — Т.218. № 2. — С 278–280.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА[1]

О.Х. Масаева (Нальчик, ИПМА КБНЦ РАН)
olesya.masaeva@yandex.ru

В области $\Omega = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y) + D_{0y}^{\beta} u(x,y) = 0, \quad 1 < \beta < 2, \tag{1}$$

где $D_{0y}^{\beta} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} D_{0y}^{\beta-2}$ – оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка β [1, с. 9], [2].

Результаты исследований, полученные в последнее время, позволяют делать вывод о важности и эффективности применения дифференциальных уравнений дробного порядка в математическом моделировании [1], [3], [4].

В работе [5] исследовалась первая краевая задача для уравнения (1) в области Ω.

В данной работе обсуждаются вопросы доказательства существования и единственности решения второй краевой задачи для уравнения (1) в первом квадранте.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект FEGS-2023-0003).

Задача. *Найти в области* Ω *функцию* $u = u(x,y)$ *из класса* $y^{2-\beta}u \in C(\bar{\Omega}), u_x, D_{0y}^{\beta-1} \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}, D_{0y}^{\beta} \in C(\Omega)$, *удовлетворяющую уравнению (1) и условиям*

$$u_x(0,y) = 0, \quad 0 < y < \infty,$$
$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\beta-1} u(x,y) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty,$$

где $\varphi(x)$*– заданная непрерывная функция на положительной полуоси.*

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. :Физматлит, 2003. — 272 с.

2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. —М. :Наука, 2005. — 199 с.

3. Нахушев А.М. О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием / А.М. Нахушев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2007. — Т. 9, № 1. – С. 128–137.

4. Учайкин В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. — Ульяновск : Артишок, 2008. — 512 с.

5. Масаева О.Х. Задача Дирихле в четверти плоскости для обобщенного уравнения Лапласа / О.Х. Масаева // Прикладная математика и физика. — 2024. — Т. 56, № 2. — С. 114–123.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОБОБЩЕННЫМ ДРОБНЫМ ПРОИЗВОДНЫМ АДАМАРА[1]

А. А. Махамуд[1], Э.Л. Шишкина[123]
([1]Белгород, НИУ «БелГУ»; [2]Воронеж, ВГУ; [3]Грозный, ЧГУ)
ilina_ dico@mail.ru

Одна из важнейших задач в дробном исчислении и его приложениях состоит в том, чтобы вывести формулу, которая для подходящих операторов A и диапазона параметров α порождает семейство операторов $\{A^\alpha\}$, обладающих свойствами, ожидаемыми от степеней. В частности, A^n должен совпадать с итерированной степенью $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n}$, когда $\alpha \in \mathbb{N}$ — положительное целое число n и

---

[1] Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № FEGS-2023-0003).

всякий раз, когда A^α, $A\beta$ и $A^{\alpha+\beta}$ определены, на некотором классе функций, должен выполнятся полугрупповой закон $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$. В настоящее время существует несколько методов построения таких семейств [1].

Рассмотрим метод определения дробных степеней, который применим даже тогда, когда исходный оператор A не порождает полугруппу или не имеет плотной области определения. Эта конструкция была впервые предложена в работе [2]. Балакришнан в [2] ввел новую конструкцию для дробных степеней замкнутого линейного оператора $(-A)$ для которой достаточно, чтобы для $\lambda > 0$ резольвента оператора A существовала и вела себя как $O(l/\lambda)$ для всех λ А именно, если A — замкнутый линейный оператор с областью определения и областью значений в банаховом пространстве X, для которого $||\lambda R(\lambda, A)|| < M < \infty$, $\lambda > 0$, то при $0 < \alpha < 1$

$$(-A)^\alpha = -\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1}R(\lambda; A)Axd\lambda, \quad x \in D(A). \tag{1}$$

Для такого α, что $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место формула

$$(-A)^\alpha = (-A)^{\alpha-n+1}(-A)^{n-1}x, \qquad x \in D(A^{n+1}).$$

Кроме того, в работе [2] были получены следующие свойства $(-A)^\alpha$: операторы $(-A)^\alpha$ могут быть расширены до замкнутой линейной области и для $0<\alpha+\beta<1$ верно, что $(-A)^{\alpha+\beta}=(-A)^\alpha(-A)^\beta$, $x\in D(A^2)$.

Будем использовать пространство вида

$$F_{p,\mu} = \{\varphi \in C^\infty(0,\infty) : ||x^k D^k(x^{-\mu}\varphi)||_p < \infty,\ \ k = 0, 1, 2, ...\},$$

где $1\leqslant p<\infty$, μ — любое вещественное число, $D=\frac{d}{dx}$, $||\cdot||_p$ — L_p-норма.

Рассмотрим оператор

$$(I_1^{\eta,1}f)(x) = \frac{1}{x^{1+\eta}}\int\limits_0^x t^\eta f(t)dt, \qquad x > 0.$$

При $\eta + \mu + 1 > 1/p$ оператор $I_1^{\eta,1}$ является гомеоморфизмом. Для $\varphi \in F_{p,\mu}$, при $\lambda > 0$, $\eta + \mu + 1 > 1/p$ имеем:

$$R(\lambda, -I_1^{\eta,1}) = \frac{1}{\lambda}I - \frac{1}{\lambda^2}I_1^{\frac{1}{\lambda}+\eta,1} \quad \Leftrightarrow \quad I - \lambda R(\lambda, -I_1^{\eta,1}) = \frac{1}{\lambda}I_1^{\frac{1}{\lambda}+\eta,1}.$$

Тогда по формуле (1)

$$((I_1^{\eta,1})^\alpha f)(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1} R(\lambda, -I_1^{\eta,1}) I_1^{\eta,1} f(x) d\lambda =$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (I - \lambda R(\lambda, -I_1^{\eta,1})) f(x) d\lambda =$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-2} I_1^{\frac{1}{\lambda}+\eta,1} f(x) d\lambda =$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-2} x^{-\left(\frac{1}{\lambda}+\eta+1\right)} \left(\int\limits_0^x t^{\frac{1}{\lambda}+\eta} f(t) dt \right) d\lambda =$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi x^{\eta+1}} \int\limits_0^x f(t) t^\eta dt \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-2} \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{\lambda}} d\lambda =$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi x^{\eta+1}} \int\limits_0^x f(t) t^\eta dt \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-2} e^{-\frac{1}{\lambda}\log\frac{x}{t}} d\lambda = \left\{ u = \frac{1}{\lambda} \log \frac{x}{t} \right\} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi x^{\eta+1}} \int\limits_0^x f(t) t^\eta \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} dt \int\limits_0^\infty u^{-\alpha} e^{-u} du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha) x^{\eta+1}} \int\limits_0^x f(t) t^\eta \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} dt.$$

Таким образом, мы получаем обобщение дробного интеграла Адамара:

$$((I_1^{\eta,1})^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x f(t) \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{t}{x}\right)^{\eta+1} \frac{dt}{t} = (H^{\eta,\alpha} f)(x).$$

При $\alpha > 0$, $\eta > -1$ и для бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, определенной для $x > 0$, такой, что ее ряд Тейлора сходится в каждой точке $x > 0$, выполняется следующее равенство

$$(I_1^{\eta,1})^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\eta+1} \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^\infty \left\{ \begin{matrix} -\alpha \\ k \end{matrix} \right\}_{\eta+1} x^k \frac{d^k f}{dx^k},$$

где

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\}_c = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} (c+j)^{\alpha}, \qquad \alpha, c \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2)$$

являются обобщенными числами Стирлинга второго рода.

Литература

1. Красносельский М.А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. — М. : Наука, 1966. — 499 с.

2. Balakrishnan A.V. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups / A. V. Balakrishnan // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — V. 91. — P. 330–353.

АСИМПТОТИКИ ТИПА ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ, ДИФФЕОМОРФНОЙ ПОЛНОТОРИЮ[1]

Д.С. Миненков (Москва, ИПМех РАН, МГУ)
minenkov.ds@gmail.com

Рассматривается задача на собственные функции для оператора Лапласа внутри трехмерной области вращения, диффеоморфной полноторию, с условиями Дирихле на границе. Построена серия асимптотических собственных чисел и функций (квазимод) типа шепчущей галереи (см. [1]). Именно, исследуются коротковолновые асимптотики, локализованные у границы или у части границы. Исходная задача сводится к решению одномерных уравнений с помощью адиабатического приближения, применяемого в виде операторного разделения переменных (см. [2]).

Литература

1. Minenkov, D. S., Asymptotics of the Whispering Gallery-Type in the Eigenproblem for the Laplacian in a Domain of Revolution Diffeomorphic To a Solid Torus / Minenkov, D. S., Sergeev, S. A. // Russ. J. Math. Phys. — 2023. — V. 30(4) — P. 599-620.

2. Доброхотов, С. Ю., Методы Маслова в линеаризованной теории гравитационных волн на поверхности жидкости / Доброхотов, С. Ю. // Докл. АН СССР — 1983. — Т. 269, вып. 1 — С. 76-80.

---

[1] Доклад поддержан грантом РНФ 25-71-10087.

ВОЛНЫ В КРУГЛОМ РЕЗОНАТОРЕ С ПРОЗРАЧНЫМИ СТЕНКАМИ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА[1]

Д.С. Миненков, П.С. Петров, А.А. Чернявский
(Москва, Курчатовский институт)
cherniavskii.aa@phystech.edu

Мы рассматриваем двумерное уравнение Гельмгольца с кусочнопостоянным коэффициентом, который моделирует круглый волновой резонатор с прозрачными стенками. Решение строится для неоднородного уравнения с дельта-силой, на бесконечности ставится условие Зоммерфельда, а на стенке резонатора — условие существования гладкой первой производной. Это решение связано с квазистационарными состояниями [1] (состояния Гамова [2]), которые похожи на волны типа шепчущей галереи внутри резонатора.

Как указано выше, мы иллюстрируем взаимосвязь между решением для задачи с точечным источником и для квазистационарных состояний. В частности рассматривается зависимость решения от двух факторов: 1) положение источника в пространстве; 2) частота точечного источника. Впоследствии мы показали, что для лучшей генерации волн необходимо использовать источник с частотой, близкой к вещественной части комплексных частот квазистационарных состояний.

В случае произвольного выпуклого резонатора с переменными коэффициентами эффективные асимптотики могут быть построены для подобных состояний как в [3].

Литература

1. Базь А.И. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике / А.И. Базь, Я.Б. Зельдович, А.М. Переломов. — М. : Наука, 1971. — 544 с.

2. Gamow G. The Quantum Theory of Nuclear Disintegration / G. Gamow // Nature. — 1928. — V. 122, № 3082. — P. 805–806.

3. Бабич В.М. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В.М. Бабич, В.С. Булдырев. — М. : Наука, 1972. — 456 с.

---

[1] Настоящая работа выполнена в рамках гранта РНФ 24-11-00213.

ОЦЕНКИ НОРМЫ ГЁЛЬДЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ ВИДА «КНИЖКА»[1]

Ф.Д. Мироненко (СПб, ПОМИ РАН)
mironenko.foma@gmail.com

Доклад посвящён получению локальной оценки нормы Гёльдера решения параболического уравнения, заданного на простейшем стратифицированном множестве вида «книжка». Такое множество $\mathbb{B}$ представляет собой объединение K полушаров размерности n («листов») $B_+^{[k]}$ $(k = 1, \dots, K)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, с общей плоской границей («переплётом») B_0. Декартовы координаты на «переплёте» обозначим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, а координаты на «листах» — $x^{[k]} = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{[k]})$

В цилиндре $\mathbb{Q} = (0,T) \times \mathbb{B}$ рассматривается параболическое уравнение второго порядка в недивергентной форме:

$$\mathcal{L}^{[k]} u = f^{[k]} \ \text{ на } (0,T) \times B_+^{[k]}, \quad \mathcal{B} u = f_0 \ \text{ на } (0,T) \times B_0,$$

где

$$\mathcal{L}^{[k]} = \partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{[k]} D_i D_j + \sum_{i=1}^{n} b_i^{[k]} D_i,$$

$$\mathcal{B} \ = \ \partial_t - \sum_{l,m=1}^{n-1} \alpha_{lm} D_l D_m + \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l D_l + \sum_{k=1}^{K} \beta_n^{[k]} D_n^{[k]}.$$

На коэффициенты операторов накладываются следующие ограничения: матрицы старших коэффициентов равномерно эллиптичны

$$a_{ij}^{[k]} \in L_\infty\big((0,T) \times B_+^{[k]}\big), \quad \alpha_{lm} \in L_\infty\big((0,T) \times B_0\big);$$

$$\nu I_n \leqslant (a_{ij}^{[k]})_{i,j=1}^{n} \leqslant \nu^{-1} I_n, \quad \nu I_{n-1} \leqslant (\alpha_{lm})_{l,m=1}^{n-1} \leqslant \nu^{-1} I_{n-1};$$

младшие коэффициенты принадлежат пространствам Лебега

$$b_i \in L_{n+2}\big((0,T) \times B_+^{[k]}\big), \quad \beta_l \in L_{n+1}\big((0,T) \times B_0\big);$$

$$\beta_n \in L_{n+1}\big((0,T) \times B_0\big), \quad \beta_n \leqslant 0.$$

---

[1] Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

При $K = 1$ (задача Вентцеля) локальные оценки нормы Гёльдера были получены в [1, теорема 1], при $K = 2$ (двухфазная задача Вентцеля) — в [2, теорема 4.2]. В случае $K > 2$ стратифицированный шар не вкладывается в $\mathbb{R}^n$, и рассуждения требуют существенной модификации.

Литература

1. Nazarov A.I. Holder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Wentzel boundary condition / D.E. Apushkinskaya, A.I. Nazarov. // Amer. Math. Soc. Transl. — 1995. — Vol. 164. — p. 1-13.

2. Назаров А.И. Квазилинейные двухфазные задачи Вентцеля / Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров. // Записки научных семинаров ПОМИ — 2000. — т. 271. — с. 11-38.

К ЗАДАЧАМ ТИПА ДАРБУ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова (Елабуга, КФУ)
miro73@mail.ru

Задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными рассматривалась многими авторами. Можно указать, например, монографии [1, гл. 3, § 1], [2].

Здесь для уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными (обобщения уравнения Баренблатта — Желтова — Кочиной)

$$\begin{aligned} L(u) \equiv u_{xxy} + a_{20}(x,y)u_{xx} + a_{11}(x,y)u_{xy}+ \\ +a_{10}(x,y)u_x + a_{01}(x,y)u_y + a_{00}(x,y)u = f(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

доказаны существование и единственность решения двух задач типа Дарбу в треугольных областях. Отметим, что указанное уравнение рассматривалось, в частности, в работах [3]–[7].

Определим класс функций $C^{(k,l)}(D)$, заданных на множестве D, следующим образом: функция $u \in C^{(k,l)}(D)$, если на D существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r+s}u}{\partial x^r \partial y^s}$ $(r = 0, \ldots, k;\ s = 0, \ldots, l)$. Если D — область, то решение уравнения (1) класса $C^{(2,1)}(\overline{D})$ назовем регулярным в замкнутой области $\overline{D}$.

Пусть D — область, ограниченная прямыми $x = 0, y = y_0 > 0, y = x$, то есть $D = OB_1B_2$, $O(0,0)$, $B_1(0,y_0)$, $B_2(y_0,y_0)$, коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ij} \in C^{(i,j)}(\overline{D})$, $f \in C(\overline{D})$.

Задача 1. *В замкнутой области $\overline{D}$ найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\begin{gathered} u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u_x|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=y} = \psi(x), \\ \varphi(0) = \psi(0), \quad \varphi'(0) + \varphi_1(0) = \psi'(0), \\ \varphi \in C^1([0,y_0]), \quad \varphi_1 \in C^1([0,y_0]), \quad \psi \in C^2([0,y_0]). \end{gathered} \tag{2}$$

Для доказательства существования и единственности решения задачи 1 используем известную формулу решения задачи Гурса [6], [7, с. 134] как представление произвольного регулярного решения уравнения (1). Из него выведем интегральное уравнение Вольтерра второго рода для определения условия Гурса $u(x,y_0)$, из существования и единственности решения которого будет следовать однозначная редукция задачи 1 к задаче Гурса, что обеспечивает существование и единственность решения задачи типа Дарбу (1)–(2).

Пусть D^* область, ограниченная прямыми $y = 0$, $x = x_0 > 0$, $y = x$, то есть $D^* = OB_3B_2$, $O(0,0)$, $B_3(x_0,0)$, $B_2(x_0,x_0)$.

Задача 2. *В замкнутой области $\overline{D}^*$ найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\begin{gathered} u|_{x=y} = \lambda(x), \quad u_x|_{x=y} = \lambda_1(x), \quad u|_{y=0} = \mu(x), \\ \lambda(0) = \mu(0), \quad \lambda_1(0) = \mu'(0), \\ \lambda \in C^1([0,x_0]), \quad \lambda_1 \in C^1([0,x_0]), \quad \mu \in C^2([0,x_0]). \end{gathered}$$

Существование и единственность решения задачи 2 доказаны путем ее редукции к задаче Коши в треугольнике D^*.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

2. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром / Е.И. Моисеев. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 149 с.

3. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable / D. Colton // J. Different. equations. — 1972. — V. 12, № 3. — P. 559–565.

4. Баренблатт Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 58–75.

5. Солдатов А.П. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка / А.П. Солдатов, М.Х. Шхануков // ДАН СССР. — 1987. — Т. 297, № 3. — С. 547–552.

6. Жегалов В.И. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка / В.И. Жегалов, Е.А. Уткина // Изв. вузов. Матем. — 1999. — № 10. — С. 73–76.

7. Жегалов В.И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов. — Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. — 226 с.

ЛИУВИЛЛЕВЫ СЛОЕНИЯ БИЛЛИАРДОВ, СКЛЕЕННЫХ ИЗ ЧЕТВЕРТЕЙ ЭЛЛИПСА

М.М. Михайлов (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)
matvei.mikhailov@math.msu.ru

Для биллиарда в эллипсе существует два функционально независимых почти всюду первых интеграла. Один из них – энергия системы, другой – параметр софокусной квадрики. То есть такая система интегрируема по Лиувиллю.

Рассмотрим объект — биллиардную книжку, представляющий собой CW-комплекс, составленный из нескольких биллиардных областей (листов). На рёбрах склейки определены правила перехода (подстановки) между листами. Динамика материальной точки в такой системе задаётся следующим образом: при достижении ребра точка переходит на тот лист, который соответствует значению подстановки на данном ребре. Для обеспечения корректности определения траектории в окрестности вершин требуется условие коммутативности подстановок, заданных на смежных рёбрах.

Рассмотрим класс биллиардных книжек, склеенных из трёх четвертей эллипса. Оказывается, что седловые бифуркации в таких динамических системах имеют не боттовский тип.

Теорема 1. *Рассмотрим интегрируемые биллиардные трехлистные книжки, склеенные из четвертей эллипса, такие, что фокальной прямой соответствует перестановка (123). Рассмотрим особый слой дополнительного интеграла, то есть все траектории, проходящие через фокусы. Тогда для любой такой книжки трехмерная окрестность особого слоя послойно гомеоморфна одному из следующих 3-Атомов:*

---

1. A^* типа $(3,1)$
2. $B_{3,1} \times S^1$
3. $B_{3,3} \times S^1$

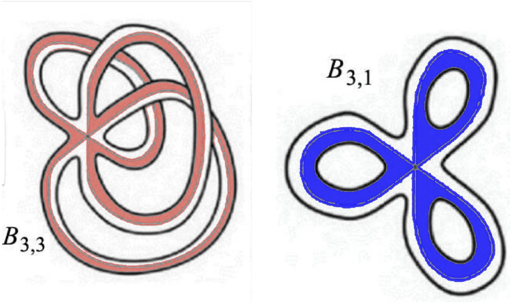


Рис. 1: Биллиардные трехлистные книжки

A^* типа $(3,1)$ получается из $B_{3,1} \times S^1$ после факторизации по группе $\mathbb{Z}_3$.

Литература

1. Ведюшкина В.В. Биллиардные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем / В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, № 1. — С. 53–82.

2. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. — Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. — 444 с.

3. Кузнецова А.А. Моделирование вырожденных особенностей интегрируемых бильярдных систем бильярдными книжками / А.А. Кузнецова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2023. — № 5. — С. 3–10.

О БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ИНДЕФИНИТНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Л.В. Насирова (Сумгаитский Государственный Университет, Баку, Азербайджан)
leyla.nasirova@sdu.edu.az

Рассмотрим следующую нелинейную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y + g(x, y, y'), \, 0 < x < 1, \\ a_0 y(0) - b_0 y'(0) = 0, \\ a_1 y(1) - b_1 y'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$б— спектральный параметр, $p-$ положительная непрерывно-дифференцируемая функция на $[0, 1]$, $q-$ неотрицательная непрерывная функция на $[0, 1]$, $r-$ непрерывная функция на $[0, 1]$, которая меняет знак, a_0, b_0, c_0, d_0 —действительные постоянные такие, что

$$|a_0| + |b_0| > 0, \; |a_1| + |b_1| > 0, \; a_0 b_0 \geqslant 0, \; a_1 b_1 \geqslant 0.$$

Кроме того, функция g непрерывна на $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ и удовлетворяет условиям:

$$g(x, y, v) = o(|y| + |v|) \tag{2}$$

при $|y| + |v| \to 0$ и

$$g(x, y, v) = o(|y| + |v|) \tag{3}$$

при $|y| + |v| \to \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$.

Отметим, что задача (1) возникает при разделении переменных в краевой задаче, описываеющей селекцию-миграцию в селекционной генетике (см., напр., [1]).

Пусть $E = \left\{ y \in C^1[0, 1] : a_i y(i) - b_i y'(i) = 0, \, i = 0, \, 1 \right\}$ – Банахово пространство с обычной нормой $||y||_1 = ||y||_\infty + ||y'||_\infty$, где $||y||_\infty = \max\{|y(x)| : x \in [0, 1]\}$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого $\sigma \in \{+, -\}$ и каждого $\nu \in \{+, -\}$, пусть $S^{\nu}_{k,\sigma}$ – множество функций $y \in E$ такие, что (i) нули функции $y(x)$, $x \in [0, 1]$, являются простыми и эта функция имеет $k - 1$ нулей в интервале $(0, 1)$; (ii) функция $\nu y(x)$ положительна в проколотой окрестности точки $x = 0$; (iii) $\sigma \int\limits_0^1 r(x) y^2(x) dx > 0$.

Рассмотрим линейную задачу

$$\left\{\begin{array}{l} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y,\ 0 < x < 1, \\ a_0 y(0) - b_0 y'(0) = 0, \\ a_1 y(1) - \ b_1 y'(1) = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

В силу [2, с. 319] существует бесконечная последовательность вещественных собственных значений этой задачи с предельными точками $+\infty$ и $-\infty$. Если положительные и отрицательные собственные значения расположить в порядке возрастающих числовых значений и обозначить через

$$\lambda_1^+,\, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_k^+, \ldots;\ \lambda_1^-,\, \lambda_2^-, \ldots, \lambda_k^-, \ldots,$$

а соответствующие собственные функции обозначить

$$y_1^+,\, y_2^+, \ldots, y_k^+, \ldots;\ y_1^-,\, y_2^-, \ldots, y_k^-, \ldots,$$

то при каждом $k \in \mathbb{N}$ собственные функции y_k^+ и y_k^- будут иметь $k-1$ простых нулей в интервале $(0, 1)$. Отметим, что в силу [2, § 10·71, с. 323] $y_k^+ \in S_{k,+}$ и $y_k^- \in S_{k,-}$, где $S_{k,\sigma} = S_{k,\sigma}^+ \cup S_{k,\sigma}^-$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ и каждом σ.

Глобальная бифуркация решений нелинейной задачи (1) при выполнении лишь условии (2), а также при выполнении лишь условии (3) изучена в [4]. В этой работе установлены следующие результаты.

Теорема 1 [3]. *Пусть выполняется лишь условие (2). Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого σ и каждого ν существует континуум $C_{k,\sigma}^{\nu}$ решений задачи (1), который ответвляется от точки $(\lambda_k^{\sigma}, 0)$, содержится в $\mathbb{R}^{\sigma} \times S_{k,\sigma}^{\nu} \cup \{(\lambda_k^{\sigma}, 0)\}$ и неограничен в $\mathbb{R} \times E$.*

Теорема 2 [3]. *Пусть выполняется лишь условие (3). Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого σ и каждого ν существует континуум $D_{k,\sigma}^{\nu}$ решений задачи (1), который ответвляется от точки $(\lambda_k^{\sigma}, \infty)$ и для него выполняется по крайней мере одно из следующих утверждений: (i) $D_{k,\sigma}^{\nu}$ пересекается с точкой $(\lambda_{k',\sigma}^{\nu'}, \infty)$ по множеству $\mathbb{R}^{\sigma} \times S_{k',\sigma}^{\nu'}$ при некотором $(k', \nu') \neq (k, \nu)$; (ii) $D_{k,\sigma}^{\nu}$ пересекается с точкой $(\lambda, 0)$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}^{\sigma}$; (iii) проекция $D_{k,\sigma}^{\nu}$ на $\mathbb{R}^{\sigma} \times \{0\}$ неограничен.*

Когда оба условия (2) и (3) выполняются, то возникает естественный вопрос: пересекаются ли континуумы $C_{k,\sigma}^{\nu}$ и $D_{k,\sigma}^{\nu}$? В работе [4] приведены примеры, которые показывают, что оба случая возможны. Отметим, что в [4] нелинейный член зависит от параметра λ.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Для каждого* $k \in \mathbb{N}$, *каждого* σ *и каждого* ν *континуумы* $C^{\nu}_{k,\sigma}$ *и* $D^{\nu}_{k,\sigma}$ *решений задачи (1) совпадают. Более того, они ответвляются от точек* $(\lambda^{\sigma}_k, 0)$ *и* $(\lambda^{\sigma}_k, \infty)$ *и содержатся в* $\mathbb{R}^{\sigma} \times S^{\nu}_{k,\sigma} \cup \{(\lambda^{\sigma}_k, 0)\} \cup \{(\lambda^{\sigma}_k, \infty)\}$.

Литература

1. Fleming W.H. A selection-migration model in population genetics / W.H. Fleming // J. Math. Biology — 1975. — V. 2, No. 3. — P. 219–233.

2. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. — Х. : ГНТИ, 1939. — 719 с.

3. Aliyev, Z.S., Nasirova L.V. Bifurcation from zero or infinity in nonlinearizable Sturm-Liouville problems with indefinite weight / Z.S. Aliyev, L.V. Nasirova // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.— 2021. — No. 55. — P. 1–16.

4. Алиев З.С. О глобальной бифуркации решений некоторых нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка / З.С. Алиев // Матем. сб. — 2016. — Т. 207, № 12. — С. 3–29.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А.В. Нестеров (Москва, РЭУ им. Г.В. Плеханова)

andrenesterov@yandex.ru

Строятся первые члены формального асимптотического разложения (АР) решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений в критическом случае [1]

$$\varepsilon^3(U_{tt} - KU_{xx}) = AU + \varepsilon F(U), |x| < \infty, 0 < t < T, T > 0 \qquad (1)$$

здесь решение $U(x,t,\epsilon) \subset R^M$, M- произвольное натуральное, $0 < \varepsilon << 1$ - малый параметр, $K = \{diag(k_i^2), i = 1, ..., M\}$, $K, A = const$, функция $F(U)$ достаточно гладкая, $F(0) = 0$, матрица A имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому отвечает

собственный вектор (с.в.) $h_0,(F, h_0*) = 0$, h_0* - с.в. A^T, отвечающий $\lambda_0 = 0$. К системе (1) ставятся начальные условия специального вида

$$U(x,0) = U^0(x/\epsilon)h_0, U_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

Функция $U^0(z)$-принадлежит пространству быстро убывающих функций $\tilde{S}(R^M)$, начальные условия имеют вид узкой «шапочки».

Работа является продолжением работы [2]. Построенное АР до порядка N имеет вид

$$U(x,t,\epsilon) = \sum_{i=0}^{N} \epsilon^i \left(S_i^I(\varsigma_1, t) + S_i^{II}(\varsigma_2, t)\right) + R. \tag{3}$$

Здесь $\varsigma_{1,2} = \dfrac{x \pm kt}{\epsilon}$, k выражается через K, h_0. Главные слагаемые в АР (3) $S_0^J(\varsigma_j, t), J = I, II, j = 1,2$ имеют вид $S_0^J(\varsigma_j, t) = \varphi_0^J(\varsigma_j, t)h_0, J = I, II, j = 1,2$, где $\varphi_0^J(\varsigma_j, t)$ есть решение обобщенного уравнения Кортевега - де Вриса [3]

$$-\varphi^J_{0,t} + D\varphi^J_0\varsigma\varsigma\varsigma - (F_{eff}(\varphi^J_0))_\varsigma = 0, J = I, II, \varsigma = \varsigma_j, j = 1,2 \tag{4}$$

с быстро убывающими начальными условиями.

Здесь $D, F_{eff}(z)$ определяются через данные системы (1). Оценка остаточного члена в АР (3) дана по невязке. При оценке остаточного члена по невязке для оценки решений уравнения (4) использовались результаты работ [4]-[6].

Литература

1. Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева , В.Ф. Бутузов — М. : Изд-во МГУ, 1978, —262 с.

2. Нестеров А. В. Об асимптотике решения задачи Коши для одной сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений / А.В. Нестеров // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронеж. зимн. мат. школы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2025, — С. 253.

3. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны /Д. Уизем. — М. : Мир,1977 — 622 с.

4. Якупов В. М. О задаче Коши для уравнения Кортевега–де Фриза /В.М. Якупов // Дифференц. уравнения. —1975. — № 3. — С. 556–561

5.Кружков С.Н. Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза / С.Н. Кружков, А. В. Фаминский // Математический сборник. —1983. —№3. — С. 396–425.

6. Фаминский А. В. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений / А. В. Фаминский // Труды семинара им. И.Г. Петровского. —1988. — Вып 13. — С. 57–105.

ОСОБЕННОСТИ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИ РАЗДЕЛИМЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ[1]

С.С. Николаенко (Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова)
nikostas@mail.ru

Хорошо известна теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, созданная А. Т. Фоменко и его школой [1]. Основной задачей в рамках этой теории является исследование топологии лиувиллева слоения интегрируемой системы (типичные слои которого — замыкания интегральных траекторий общего положения). Построены различные инварианты, дающие полную «картину» лиувиллева слоения в окрестности точки (локальные инваринаты), окрестности слоя (полулокальные инварианты) либо на инвариантных подмногообразиях (глобальные инварианты). Вычисление этих инвариантов в конкретных задачах может быть сопряжено с существенными техническими трудностями. Однако можно выделить класс интегрируемых систем, для которых топологические инварианты вычисляются алгоритмически, — так называемые *алгебраически разделимые системы* [2]. Алгебраическое разделение переменных в типичном случае означает, что:

1) на каждом слое лиувиллева слоения гамильтоновы уравнения сводятся к уравнениям Абеля – Якоби

$$\dot{u}_i = \frac{\sqrt{P(u_i)}}{u_1 - u_2}, \qquad i = 1, 2,$$

где P — многочлен, зависящий от констант первых интегралов системы;

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-71-10100).

2) исходные фазовые переменные выражены через переменные разделения u_1, u_2 как рациональные функции от радикалов вида $\sqrt{u_i - \alpha_j}$, где α_j — корни многочлена P.

Второе условие позволяет эффективно описывать структуру проекции каждого слоя лиувиллева слоения на плоскость $\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$ и тем самым в явном виде изучать бифуркации слоёв. В качестве примера приведём классификацию *элементарных* бифуркаций, т.е. бифуркаций, возникающих при совпадении двух корней многочлена P.

Теорема 1 ([3]). *Любая элементарная компактная топологически устойчивая невырожденная 3-мерная бифуркация лиувиллева слоения алгебраически разделимой системы с двумя степенями свободы имеет тип одного из атомов A, B, C_2, P_4, D_1, A^*, A^{**} (см. [1]).*

Литература

1. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1. / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко. — Ижевск: изд. дом «Удмуртский университет», 1999. — 444 с.

2. Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приложения к классическим системам / М.П. Харламов // Нелин. динамика. — 2010. — Т. 6, № 4. — С. 769–805.

3. Николаенко С.С. Топология алгебраически разделимых интегрируемых систем / С.С. Николаенко // Чебышевский сборник. — 2025. — Т. 26, вып. 2. — С. 198–217.

КРИТИЧЕСКИЕ ПОДСИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КОВАЛЕВСКОЙ – ЧАПЛЫГИНА В ДИНАМИКЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА[1]

С.С. Николаенко, С.В. Соколов (Москва, Московский физико-технический институт)
nikolaenko.s@phystech.edu, sokolov.sv@phystech.edu

Рассматривается задача описания фазовой топологии семейства гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, задаваемых на коалгебре $e(3)^*$ гамильтонианом

$$H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + \gamma\alpha_1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2$$

($\boldsymbol{M} = (M_1, M_2, M_3)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — стандартные переменные на $e(3)^*$, γ — параметр семейства). На симплектическом листе P^4,

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-21-00086).

выделяемом в $e(3)^*$ условиями $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$, $\boldsymbol{\alpha}^2 = 1$, данное семейство интегрируемо по Лиувиллю с помощью дополнительного интеграла

$$K = (M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1)^2 + (2M_1M_2 - \gamma\alpha_2)^2.$$

Этот интегрируемый случай является обобщением классических случаев Ковалевской [1] и Чаплыгина [2] в динамике твёрдого тела. С другой стороны, он вписывается в более общее многопараметрическое семейство интегрируемых систем (см. [3], [4]).

Ограничение интегрируемой системы на множество критических точек отображения момента $(H, K)\colon M^4 \to \mathbb{R}^2$, как правило, представляет собой совокупность нескольких систем с одной степенью свободы — так называемых *критических подсистем.* Их изучение является важным шагом на пути к исследованию фазовой топологии исходной системы. В данной работе получено явное описание критических подсистем для интегрируемого семейства Ковалевской – Чаплыгина, а также их решение в эллиптических квадратурах.

Теорема 1 ([5]). *В случае Ковалевской – Чаплыгина имеется пять критических подсистем* $\mathcal{M}_1$ — $\mathcal{M}_5$, *фазовые пространства которых выделяются в* P^4 *следующими уравнениями:*

$\mathcal{M}_1$: $M_1^2 - M_2^2 + \alpha_3^2 - \gamma\alpha_1 = 0, \ 2M_1M_2 - \gamma\alpha_2 = 0;$

$\mathcal{M}_2$: $M_1^2 + M_2^2 - \alpha_3^2 + \gamma\alpha_1 + \dfrac{\gamma^2}{4} = 0, \ 2M_1\alpha_3 + \gamma\alpha_3 = 0;$

$\mathcal{M}_3$: $M_1 = M_2 = \alpha_3 = 0;$

$\mathcal{M}_4$: $M_1 = \alpha_2 = M_3 = 0;$

$\mathcal{M}_5$: $M_2 = 0, \ 2M_1M_3 - \alpha_3(2\alpha_1 + \gamma) = 0, \ 2M_3^2 + \alpha_1(2\alpha_1 + \gamma) = 0.$

Теорема 2 ([5]). *Явные решения критических подсистем* $\mathcal{M}_1$ — $\mathcal{M}_5$ *имеют следующий вид* (h — *значение гамильтониана* H)*:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1\colon \quad & M_1^2 = (h-1)A(u)/2, \qquad \alpha_1 = (h+1-2u^2)A(u)/(2\gamma),\\
& M_2^2 = u^2A(u), \qquad \alpha_2^2 = 2(h-1)u^2(A(u))^2/\gamma^2,\\
& M_3^2 = (h-1)(h+1+2u^2)^2(A(u))^2/(8\gamma^2), \qquad \alpha_3^2 = A(u),\\
& A(u) = \frac{2\gamma^2}{\sqrt{\gamma^4 + \gamma^2((2u^2+h+1)^2 - 16u^2)} + \gamma^2};\\
& \dot{u}^2 = (2u^2+h+1)^2 - 16u^2 + \gamma^2, \qquad u \in [-\infty, +\infty];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2\colon\quad & M_1^2 = (1-\varkappa)u^2B(u)/\varkappa, \qquad \alpha_1 = -((u^2/\varkappa-1)B(u)+\gamma^2/4)/\gamma,\\
& M_2^2 = u^2B(u), \qquad \alpha_2^2 = (1-\varkappa)((u^2/\varkappa+1)B(u)+\gamma^2/4)/(\gamma^2\varkappa),\\
& M_3^2 = 4(1-\varkappa)u^2(B(u))^2/(\gamma^2\varkappa), \qquad \alpha_3^2 = B(u),\\
& \textit{где } \varkappa = (4(h+1)+\gamma^2)/8,\\
& B(u) = \frac{\gamma^2(16\varkappa-\gamma^2)}{4\gamma^2(u^2/\varkappa+1)+8\sqrt{\gamma^2(4\varkappa(u^2/\varkappa+1)^2+(\gamma^2-16\varkappa)u^2)}};\\
& \dot{u}^2 = \gamma^2u^2+4\varkappa((u^2/\varkappa+1)^2-4u^2), \qquad u\in[-\infty,+\infty];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_3\colon\quad & M_1 = 0, && \alpha_1 = u,\\
& M_2 = 0, && \alpha_2^2 = 1-u^2,\\
& M_3^2 = (h+1-\gamma u-2u^2)/2, && \alpha_3 = 0;\\
& \dot{u}^2 = 8(1-u^2)(h+1-\gamma u-2u^2), &&\\
& u\in[-1,1]\cap[\chi_-,\chi_+], \quad \chi_\pm = (-\gamma\pm\sqrt{8(h+1)+\gamma^2})/4; &&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_4\colon\quad & M_1 = 0, && \alpha_1 = u,\\
& M_2^2 = h-\gamma u-u^2, && \alpha_2 = 0,\\
& M_3 = 0, && \alpha_3^2 = 1-u^2;\\
& \dot{u}^2 = 4(1-u^2)(h-\gamma u-u^2), &&\\
& u\in[-1,1]\cap[\nu_-,\nu_+], \quad \nu_\pm = (-\gamma\pm\sqrt{4h+\gamma^2})/2; &&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_5\colon\quad & M_1^2 = (h+1)(2u+\gamma)/\gamma, && \alpha_1 = u,\\
& M_2 = 0, && \alpha_2^2 = 1+2(h+1)u/\gamma-u^2,\\
& M_3^2 = -u^2-\gamma u/2, && \alpha_3^2 = -2(h+1)u/\gamma;\\
& \dot{u}^2 = 8u(2u+\gamma)(u^2-2(h+1)u/\gamma-1), &&\\
& u\in[0,\tau] \textit{ при } \gamma<0, \quad u\in[-\tau,0] \textit{ при } \gamma>0, &&\\
& \textit{где } \tau = \min\{|\gamma|/2, (\sqrt{(h+1)^2+\gamma^2}-(h+1))/|\gamma|\}. &&
\end{aligned}$$

Литература

1. Kowalevski S. Sur le probl‘eme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe / S. Kowalevski // Acta Math. — 1889. — Vol. 12. — P. 177–232.

2. Чаплыгин С.А. Новое частное решение задачи о движении твёрдого тела в жидкости / С.А. Чаплыгин // Тр. отд. физ. наук общ-ва любителей естествознания. — 1903. — Т. 11, № 2. — С. 7–10.

3. Yehia H.M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration: I. The case of axisymmetric forces / H.M. Yehia // Mech. Res. Com. — 1996. — Vol. 23, no. 5. — P. 423–427.

4. Ryabov P.E. Bifurcation Sets in an Integrable Problem on Motion of a Rigid Body in Fluid / P.E. Ryabov // Regul. Chaotic Dyn. — 1999. — Vol. 4, no. 4. — P. 59–76.

5. Николаенко С.С. Явное решение критических подсистем интегрируемого семейства Ковалевской – Чаплыгина / С.С. Николаенко, П.Е. Рябов, С.В. Соколов // Чебышевский сборник (в печати).

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ ОЛДРОЙДОВСКОГО ТИПА С ПАМЯТЬЮ[1]

В.П. Орлов (Воронеж, ВГУ)
orlov_vp@mail.ru

Изучается движение несжимаемой жидкости Олдройдовского типа, заполняющей ограниченную область Ω в $\mathbb{R}^N$ с границей $\partial\Omega \in C^2$, $N = 2, 3$, на промежутке времени $(-\infty, T]$, $T > 0$.

Рассматривается задача

$$\partial v/\partial t + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial v/\partial x_i - \mu_0 \Delta v -$$

$$\sum_{k=1}^{L} \beta_k \mathrm{Div} \int_{T_0}^{t} \exp(\lambda_k (s-t))\, \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x)) ds +$$

$$+\nabla p = f(t,x),\ (t,x) \in Q; \quad \mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q; \qquad (1)$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^{\tau} v(s, z(s;t,x))\, ds, \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \overline{\Omega}; \qquad (2)$$

$$v(t,x)|_{\Gamma} = 0, \quad (t,x) \in \Gamma = (-\infty, T] \times \partial\Omega. \qquad (3)$$

Здесь $v(t,x) = (v_1, \dots, v_N)$ вектор скорости, $p = p(t,x)$ — давление в точке x в момент времени t, σ — девиатор тензора напряжений, f — плотность внешних сил. Знак Div обозначает дивергенцию матрицы-функции, т.е. $\mathrm{Div}\,\sigma$ является вектором, координатами которого являются дивергенции векторов — строк матрицы σ. Предполагается, что $-\lambda_1, \dots, -\lambda_L$, $\lambda_i > 0$, а $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, L$.

---

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00056.

Траектория движения частицы жидкости, занимающей в момент времени $t \in [0,T]$ положение $x \in \overline{\Omega}$, описывается вектор-функцией $z(\tau;t,x)$ переменной $\tau \in [0,T]$, которая является решением задачи Коши (2). Решение $z(\tau;t,x)$ задачи Коши понимается как регулярный лагранжев поток (РЛП), порожденный v (см. [1]).

Введем следующие функциональные пространства

$$W_1 \equiv L_2(-\infty,T;V) \cap L_\infty(-\infty,T;H) \cap W_2^1(-\infty,T;V^{-1}) \text{ при } N=2,$$

$$W_2 \equiv L_2(-\infty,T;V) \cap L_\infty(-\infty,T;H) \cap W_{4/3,loc}^1(-\infty,T;V^{-1}) \text{ при } N=3.$$

Здесь H и V гильбертовы пространства (см. [2]). Пусть $W = W_1$ при $N=2$ и $W = W_2$ при $N=3$.

Определение. *Пусть $f \in L_2(-\infty,T;V^{-1})$. Слабым решением задачи (1)-(3) называется функция $v \in W$, удовлетворяющая тождеству*

$$d(v,\varphi)/dt - \sum_{i=1}^{n}(v_i v, \partial\varphi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v),\mathcal{E}(\varphi)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{L}\beta_k(\int_{-\infty}^{t}\exp\left((s-t)\lambda_k\right)\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi)) = \langle f,\varphi\rangle$$

при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in (-\infty,T]$. Здесь z — РЛП, порожденный v.

Через $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)^{N\times N}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(-\infty,T;V^{-1})$. Тогда задача (1)-(3) имеет по крайней мере одно слабое решение.*

Литература

1. Crippa G. Estimates and regularity results for the diPerna-Lions flow / G. Crippa, C. de Lellis // J. Reine Angew. Math. — 2008. — V. 616, — № 3. —P. 15–46.

2. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса / Р. Темам. — М. : Мир, 1981. — 408 с.

3. Zvyagin V.G. On the Weak Solvability of High-order Viscoelastic Fluid Dynamics Model /V.G. Zvyagin, A.V. Zvyagin, V.P. Orlov, M.V. Turbin // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — V. 45. № 4. — P. 1524–1543.

ФОРМУЛА ЛЕФШЕЦА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, АССОЦИИРОВАННЫХ С РАССЛОЕНИЕМ

Н.Р. Орлова (Москва, РУДН)
izvarinanat@gmail.com

Классическая формула Лефшеца выражает число Лефшеца диффеоморфизма гладкого замкнутого многообразия в терминах вкладов его неподвижных точек. Позже Атья и Ботт [2] обобщили классический результат на случай эндоморфизмов комплексов псевдодифференциальных операторов. Цель настоящей работы — дать формулу Атьи-Ботта-Лефшеца для комплексов операторов, ассоциированных с расслоением.

Рассмотрим гладкие замкнутые многообразия X и Y и локально-тривиальное расслоение со слоем G и проекцией $\pi : X \to Y$.

Рассмотрим далее последовательность ограниченных операторов, действующих в пространствах Соболева

$$0 \to \begin{array}{c} H^{s_0}(X,\pi^*E_0) \\ \oplus \\ H^{s_0}(Y,F_0) \end{array} \xrightarrow{d_0} \begin{array}{c} H^{s_1}(X,\pi^*E_1) \\ \oplus \\ H^{s_1}(Y,F_1) \end{array} \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{m-1}} \begin{array}{c} H^{s_m}(X,\pi^*E_m) \\ \oplus \\ H^{s_m}(Y,F_m) \end{array} \to 0, \tag{1}$$

где E_j и F_j — комплексные векторные расслоения над Y. Операторы

$$d_j = \begin{pmatrix} A_j & C_j \\ B_j & D_j \end{pmatrix}$$

содержат псевдодифференциальные операторы (ПДО) A_j на X и D_j на Y, и операторы $B_j = D''_{Y,j}\pi_* D''_{X,j}, C_j = D'_{X,j}\pi^* D'_{Y,j}$, где $D'_{X,j}, D''_{X,j}$ — ПДО на X, а $D'_{Y,j}, D''_{Y,j}$ — ПДО на Y.

Оператор поднятия и соответствующий оператор опускания (интегрирования по слою) определяются как

$$\begin{array}{ll} \pi^* : H^s(Y) \longrightarrow H^s(X), & (\pi^* f)(x', x'') = f(x'), \\ \pi_* : H^s(X) \longrightarrow H^s(Y), & (\pi_* f)(x') = \int_{G_{x'}} f(x', x'') dx'', \quad \pi_* 1 = 1, \end{array}$$

где dx'' — гладкое семейство форм объёма на слоях $G_{x'}$.

Предполагается, что последовательность (1) является комплексом, то есть $d_{j+1} d_j = 0, \forall j, \quad 0 \leqslant j \leqslant m-2$.

Пусть дан послойный диффеоморфизм $g : X \to X$ и индуцированный диффеоморфизм g_0 базы Y. Пусть также даны изоморфизмы векторных расслоений

$$\Phi^j_X : g^*(\pi^* E_j) \longrightarrow \pi^* E_j \text{ над } X, \qquad \Phi^j_Y : g_0^* F_j \longrightarrow F_j \text{ над } Y.$$

Определим геометрический эндоморфизм

$$T^j = \begin{pmatrix} \Phi^j_X \circ g^* & 0 \\ 0 & \Phi^j_Y \circ g_0^* \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(X, \pi^* E_j) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_j) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(X, \pi^* E_j) \\ \oplus \\ C^\infty(Y, F_j) \end{matrix}.$$

Определение 1. Неподвижная точка x диффеоморфизма g ($g(x) = x$) называется *невырожденной*, если единица не является собственным значением дифференциала $dg(x) : T_x X \to T_x X$.

Мы будем считать, что все неподвижные точки невырожденные и диффеоморфизмы g и g_0 имеют конечное число неподвижных точек.

Теорема 1. *Предположим, что все неподвижные точки диффеоморфизмов g и g_0 невырождены. Тогда справедлива следующая формула Лефшеца*

$$L_d(g) = \sum_{x \in \Omega_X} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \mathrm{tr} \Phi^{\mathrm{k}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{x})}{|\det(1 - dg(x))|} + \sum_{x' \in \Omega_Y} \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \mathrm{tr} \Phi^{\mathrm{k}}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{x}')}{|\det(1 - dg_0(x'))|}, \quad (2)$$

где $L_d(g)$ — число Лефшеца эндоморфизма g комплекса (1), $\Omega_X = \{x \in X \mid g(x) = x\}$, $\Omega_Y = \{x' \in Y \mid g_0(x') = x'\}$ — множества неподвижных точек на X и на Y соответственно. Комплекс (1) является эллиптическим.

Представленные результаты опубликованы в работе [2].

Литература

1. Atiyah M.F. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I / M.F. Atiyah, R. Bott // Ann. of Math. —1967. —T. 86, № 3. —C. 347–407.

2. Орлова Н.Р. Формула Лефшеца для нелокальных эллиптических задач, ассоциированных с расслоением / Н.Р. Орлова // Современная математика. Фундаментальные направления. —2025. —Т. 71, № 3. —С. 417–442.

О КОСОСОПРЯЖЁННОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ОПЕРАТОРА ЭЙЛЕРА[1]

Е.Ю. Панов (Великий Новгород, НовГУ)
eugeny.panov@novsu.ru

Пусть $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x)) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ — соленоидальный вектор, то есть $\operatorname{div} a(x) = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим линеаризованное стационарное уравнение Эйлера

$$u + \lambda a \cdot \nabla u + \nabla p = v, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{1}$$

где соленоидальный вектор $v = v(x) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и константа $\lambda \in \mathbb{R}$ заданы. Введём вещественное гильбертово пространство H, состоящее из соленоидальных квадратично интегрируемых векторных полей на $\mathbb{R}^n$. Известно, что H является замкнутым подпространством $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и что ортогональное дополнение $H^\perp$ состоит из потенциальных векторных полей $u = \nabla p(x) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Определение 1. Функция $u(x) \in H$ называется обобщённым решением (о.р.) системы (1), если $\forall f(x) \in C^1_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H$

$$(u, f - \lambda a \cdot \nabla f) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \Big(f(x) - \lambda \sum_{j=1}^n a_j(x) f_{x_j}(x) \Big) dx = 0. \tag{2}$$

Здесь $u \cdot v$ обозначает стандартное скалярное умножение векторов $u, v \in \mathbb{R}^n$. Выбор соленоидальных пробных вектор-функций позволил исключить давление p из системы (1).

Пусть $A = PB$, где B — замыкание оператора переноса $B_0 u(x) = a(x) \cdot \nabla u(x)$, $u \in C^1_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H$, а P — оператор ортогональной проекции $X \doteq L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ на H. Тогда A является кососимметричным оператором на H и значит $-A \subset A^*$, где A^* — сопряжённый к A оператор. Легко видеть, что $u = u(x) \in H$ является о.р. уравнения (1) тогда и только тогда, когда $u - \lambda A^* u = v$. Из этого свойства вытекает следующая

Теорема 1. *Существует о.р. уравнения (1). Это решение единственно (при любом $\lambda \in \mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда оператор A кососопряжён, то есть, когда $-A = A^*$.*

Основным результатом работы является

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание, проект «Математическое моделирование природных процессов»)

Теорема 2. *При условии* $a(x) \in W^1_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *оператор* A *кососопряжён в* H.

Для доказательства Теоремы 2 заметим, что в случае $a(x) \in W^1_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ справедливо равенство $A = B + T$, где T — ограниченный линейный оператор на X, заданный равенствами

$$\mathcal{F}(Tu)^l(\xi) = -\sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}\Big(\sum_{k=1}^{n} (a_j)_{x_k} u^k\Big)(\xi) \frac{\xi_l \xi_j}{|\xi|^2},$$

здесь $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье на X.

Оператор переноса $Bu(x) = a(x) \cdot \nabla u(x)$ также может рассматриваться на пространстве X и является замыканием оператора, изначально заданного на гладких векторах $u \in C^1_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Устанавливается кососопряжённость этого оператора на пространстве X (она вытекает из кососопряжённости оператора переноса на пространстве скалярных функций). Заметим, что оператор A совпадает с сужением оператора $\tilde{A} = B + T$ на его инвариантное подпростанство H. Ввиду кососопряжённости B операторы $E + \lambda B$ обратимы при всех вещественных λ (здесь E обозначает единичный оператор), причём $\|(E + \lambda B)^{-1}\| \leqslant 1$. Так как $\tilde{A} = B + T$ — ограниченное возмущение B, то операторы $E + \lambda \tilde{A}$ обратимы (и потому сюръективны) при достаточно малых $|\lambda|$. На следующем этапе устанавливается, что пространство H инвариантно для резольвенты $(E + \lambda \tilde{A})^{-1}$, где $|\lambda|$ достаточно мало. Это следует из леммы:

Лемма 1. *Пусть* $u + \lambda \tilde{A} u = v \in H$ *и* $|\lambda| \|\nabla a\|_\infty < 1$. *Тогда и* $u \in H$.

Доказательство: Пусть $\psi(x) \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi(x)$ — единственное решение резольвентного уравнения $\varphi - \lambda a \cdot \nabla \varphi = \psi$. Можно показать, что при $|\lambda| < 1/\|\nabla a\|_\infty$ это решение лежит в соболевском классе $W^1_2(\mathbb{R}^n)$. Непосредственные вычисления показывают, что при $u = u(x) \in C^1_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$(\tilde{A}u, \nabla\varphi) = (Bu + Tu, \nabla\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u(x) a(x) \cdot \nabla\varphi(x) dx,$$

откуда следует тождество

$$(u + \lambda \tilde{A} u, \nabla\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u(x)(\varphi(x) - \lambda a(x) \cdot \nabla\varphi(x)) dx =$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \nabla\psi(x) dx. \tag{3}$$

Поскольку $C_0^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ плотно в области определения $D(\tilde{A}) = D(B)$ оператора $\tilde{A}$ по норме графика этого оператора, тождество (3) справедливо при всех $u \in D(\tilde{A})$. Если $u+\lambda\tilde{A}u = v \in H$, то левая часть (3) равна нулю. Поэтому, и правая часть $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\cdot\nabla\psi(x)dx = 0$ при всех $\psi(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Итак, $\operatorname{div} u(x) = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, то есть $u \in H$. Лемма доказана.

Учитывая Лемму 1 и сюръективность $E + \lambda\tilde{A}$, получим, что при достаточно малых $|\lambda|$ и любых $v \in H$ существует такое $u \in D(A) = H \cap D(B)$, что $u + \lambda Au = u + \lambda\tilde{A}u = v$. Это означает, что индексы дефекта кососимметричного оператора A нулевые, то есть, этот оператор кососопряжён. Это завершает доказательство Теоремы 2.

Дадим приложение к разрешимости регуляризованной нелинейной системы Эйлера

$$u + \lambda u^h \cdot \nabla u + \nabla p = v, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{4}$$

где $u^h(x) = h^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\rho(y/h)dy$, $h > 0$, — средние функции, построенные по ядру $\rho(z) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ со стандартными свойствами $\rho \geqslant 0$, $\int \rho(z)dz = 1$. Понятие о.р. системы (4) определяется тождеством, аналогичным (2). Существование о.р. системы (4) естественно доказывать с помощью принципа неподвижной точки. Пусть K это замкнутый шар $\|u\| \leqslant R = \|v\|$ в пространстве H. Определим отображение $F : K \mapsto K$, сопоставляющее вектору $w = w(x) \in K$ единственное о.р. $u = u(x)$ системы (1) с коэффициентами $a = w^h(x)$. По свойствам средних функций $a(x) \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \cap H$, значит справедливо утверждение Теоремы 2 и по Теореме 1 отображение F корректно определено. Так как линейный оператор Эйлера A_h с коэффициентами $a = w^h(x)$ кососопряжён, то $\|u\|^2 = (u,u) + \lambda(A_h u, u) = (v,u) \leqslant \|v\|\|u\|$, откуда следует, что $\|u\| \leqslant \|v\| = R$ и $u = F(w) \in K$. Нетрудно проверить, что отображение F слабо непрерывно. Так как шар K слабо компактен, то по теореме Шаудера-Тихонова существует неподвижная точка $u \in K$. Ясно, что вектор $u = u(x)$ будет тогда о.р. системы (4). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *При любых $v \in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ существует о.р. системы (4).*

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПУТИ НА ГРАФЕ С ВЫДЕЛЕННОЙ ВЕРШИНОЙ И МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СЕТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОДСТАНЦИЙ

В.Е. Пархоменко (Белгород, БГТУ)
vlad.parhomenko-2013@yandex.ru

В сообщении рассмотрена задача генерации и анализа сети подстанций в виде математической модели на основе графа с фиксированным начальным узлом. Предложен алгоритм построения маршрутов различной длины, включающий как независимые пути на графе, так и пути с контролируемыми пересечениями и петлями. Особое внимание уделяется корректной классификации путей по типу связанности вершин графа и исключению ложных пересеченийпутей, обусловленных общим начальным элементом. Разработанный алгоритм может быть использован для вычисления оптимального пути для распределённых энергетических систем и анализа их структурных свойств.

На практике структура энергетической сети редко является полностью связной или однородной. Напротив, она характеризуется наличием общих узлов, альтернативных маршрутов, замкнутых контуров и изолированных ветвей. Это усложняет ее моделирование и анализ, и поэтому требует специальных алгоритмов, способных различать принципиально разные типы связанности электрических подстанций: независимые и, наборот, пересекающиеся маршруты, а также петли, возникающие между одинаковыми конечными подстанциями.

Предлагается алгоритм генерации математических моделей электрических сетей, ориентированный на постановку задач расчета надежности их работы [1]. В отличие от известных моделей случайных графов [2], рассматриваемые нами модели графов имеют выделенную вершину для всех анализируемых маршрутов, что отражает архитектуру реальных энергосистем, где значительная часть потоков исходит из одного крупного распределительного центра.

Пусть $V = \{1, 2, \ldots, N\}$, $N \in [50, 60]$ — множество вершин, где каждая из них интерпретируется как подстанция энергетической сети. Все связи в системе представлены в виде упорядоченных наборов вершин (маршрутов), начинающихся в фиксированнойвершине $v_s = 2$. Требуется построить конечное множество маршрутов $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_K\}$, где каждый маршрут имеет вид $P_i =$

$(2, v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,m})$ так, что вершины внутри одного маршрута не повторяются; все маршруты упорядочены по возрастанию номеров узлов, за исключением фиксированного начального элемента.

Дополнительно необходимо обеспечить наличие в системе следующих типов путей:

1. Независимые маршруты, не имеющие общих узлов (кроме начального).
2. Пересекающиеся маршруты, обладающие хотя бы одним общим внутренним узлом.
3. Петли, определяемые как пары маршрутов с одинаковыми начальным и конечным узлами, но различным набором внутренних вершин.

После генерации графа со связями,обладающими перечисленными свойствами, требуется провести анализ множества маршрутов, классифицировать их по указанным типам и сгруппировать соответствующие подмножества путей.

Для формального описания сети используется ориентированный граф, в которой каждая связь моделируется не отдельным ребром, а последовательностью вершин, образующих маршрут. Такой подход позволяет учитывать не только факт соединения подстанций, но и порядок их следования, что важно при анализе путей передачи мощности и возможных альтернативных маршрутов.

Во всех маршрутах сети фиксируется единый начальный узел $v_s = 2$, который интерпретируется как центральная подстанция или распределительный узел. Это допущение отражает типичную архитектуру реальных энергетических систем, где значительная часть линий электропередачи исходит из одного или нескольких опорных центров.

Наличие общего начального узла приводит к важному следствию: совпадение маршрутов по данной вершине не должно рассматриваться как пересечение в структурном смысле. Поэтому при дальнейшем анализе общие элементы, совпадающие с v_s, исключаются из рассмотрения при поиске пересечений и петель.

Каждый маршрут задаётся упорядоченным набором вершин: $P_i = (v_s, v_{i,1}, v_{i,2}, \ldots, v_{i,k})$, где $k \geqslant 1$, а все вершины различны. После генерации маршрут приводится к нормализованному виду: начальный узел v_s фиксируется на первой позиции; все остальные вершины упорядочиваются по возрастанию их номеров.

Такое упорядочивание не меняет состава маршрута, но позволяет: упростить сравнение маршрутов между собой; избежать неоднозначности при анализе пересечений; обеспечить воспроизводимость результатов при статистическом анализе.

Важно отметить, что в описанной модели порядок внутренних вершин интерпретируется не как временная или физическая последовательность, а как каноническая форма представления множества вершин маршрута.

Внутренние и граничные вершины. Для каждого маршрута выделяются три типа вершин: начальная вершина — фиксированный узел v_s; конечная вершина — последний элемент маршрута; внутренние вершины — все остальные узлы маршрута.Такое разделение необходимо для корректной классификации связей. В частности,

- пересечение по внутренним вершинам свидетельствует о структурной зависимости маршрутов;
- совпадение только по конечной вершине при общем старте интерпретируется как наличие петли;
- отсутствие общих вершин (кроме начальной) означает независимость маршрутов.

Формирование петель. Под петлёй в конструируемой модели понимается пара маршрутов, имеющих: общий начальный узел v_s; одинаковую конечную вершину; различные множества внутренних узлов.

Формально два маршрута P_i и P_j образуют петлю, если:

$$P_i = (v_s, A, v_e), P_j = (v_s, B, v_e), A \neq B,$$

где A и B — наборы внутренних вершин, а v_e — общий конечный узел.

При генерации таких маршрутов конечная вершина выбирается заранее, после чего формируются два различных набора внутренних узлов. Это гарантирует существование альтернативных путей между одними и теми же граничными элементами сети, что соответствует принципу резервирования линий в энергетических системах. Отдельное конструирование петель позволяет избежать ситуации, когда когла такого рода структуры появляются лишь случайно.

Пересечения по внутренним узлам моделируют ситуацию, при которой различные маршруты используют общие промежуточные подстанции. Такие структуры характерны для сетей с ограниченным числом транзитных узлов или для региональных распределительных центров. Для формирования пересекающихся маршрутов выбирается фиксированная внутренняя вершина $v_c \neq v_s$, которая включается в несколько маршрутов. При этом: конечные вершины маршрутов могут различаться; дополнительные внутренние узлы выбираются случайным образом и не повторяются внутри одного маршрута. Таким образом, пересечение возникает строго по внутреннему узлу и не связано с общим стартом или совпадением конечных точек. Это позволяет корректно отличать подобные случаи от петель и независимых связей.

Литература

1. Тараканов К. В. Аналитические методы исследования систем / К. В.Тараканов, Л. А. Овчаров, А.Н. Тырышкин. — М. : Советское радио, 1974. — 240 с.

2. Рязанов Ю. Д. Дискретная математика / Ю. Д. Рязанов. — Белгород: БГТУ, 2016. — 298 с.

ОБ АПОСТЕРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА p-ПУАССОНА

С.Е. Пастухова (Москва, РТУ – МИРЭА)
pas-se@yandex.ru

Пусть X — рефлексивное сепарабельное банахово пространство, X^* – двойственное пространство. Рассмотрим задачу отыскания такого элемента $u \in X$, что

$$Au = h, \quad h \in X^*, \tag{1}$$

где $A : X \to X^*$ – ограниченный коэрцитивный семинепрерывный строго монотонный оператор. Хорошо известно [1], что операторное уравнение (1) имеет единственное решение. Оно понимается в слабом смысле, т.е. решение u удовлетворяет тождеству

$$\langle Au - h, w\rangle = 0 \quad \text{для любого } w \in X, \tag{2}$$

где $\langle f, w\rangle$ – действие функционала $f \in X^*$ на элементе $w \in X$.

Часто оператор A является производной по Гато некоторого выпуклого функционала J, определённого на X. Тогда оператор A называют потенциальным. В этом случае задача (1) эквивалентна минимизации в пространстве X функционала $F(v){=}J(v){-}\langle h, v\rangle$ и для исследования уравнения (1) можно привлечь средства вариационного исчисления, в частности теорию двойственности.

Решение u задачи (1) (или (2)) находится явно в редких частных случаях. Возникает вопрос: можно ли для произвольной функции

$v \in X$, выступающей как приближение к u, оценить какую-либо меру отклонения её от u лишь в терминах v и данных самой задачи? Оценки такого рода называют *апостериорными.* Им посвящена обширная литература (см. [2–4] и указанную там библиографию).

В качестве меры отклонения v от u можно взять норму $\|u-v\|_X$. Тогда апостериорной считаем оценку $\|u-v\| \leqslant M(v)$, $v \in X$, с любым мажорирующим функционалом $M : X \to \mathbb{R}$, который может зависеть от данных задачи (от правой части h, характеристик оператора A, геометрии области, если уравнению (1) соответствует краевая задача в области, и т.д.) помимо v, но не от самого решения u. Желательно иметь свойства

$$M(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = u; \quad M(v) \to 0 \quad \text{при } v \to u \ \text{ в } X.$$

Наличие такой мажоранты, вычисляемой явно, позволяет оценить качество приближенных решений v, их близость к решению u.

Нас интересуют подобные оценки для нелинейных уравнений типа p-Пуассона. Модельным примером является задача Дирихле

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^p \nabla u\right) = h & \text{в } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с p-лапласианом Δ_p и $h \in L^{p'}(\Omega)$. Напомним, что на гладкой функции u действие Δ_p определяется поточечным равенством $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Формат задачи (1) требует ввести пространство X так, чтобы оператор $A = -\Delta_p : X \to X^*$ обладал перечисленными выше свойствами, обеспечивающими её однозначную разрешимость. Это будет соболевское пространство $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ обобщенных функций в области Ω (т.е. интегрируемых по области Ω вместе со своим градиентом в степени p и имеющих нулевой след на границе $\partial\Omega$), так что $X^* = W^{-1,p'}(\Omega)$, $p' := p/(p-1)$, а в качестве (2) получим интегральное тождество

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\xi \, dx = \int_\Omega h\xi \, dx \quad \text{для любого } \xi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Заметим, что функция $h \in L^{p'}(\Omega)$ принадлежит $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Оператор задачи (3) можно усложнить, переходя к лапласиану $\Delta_{p(\cdot)}$ переменного порядка нелинейности $p(\cdot)$ (как в [4]) или (как в [5]) к анизотропному $p(\cdot)$-лапласиану вида $\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\mathcal{A}\nabla u\right)$, где матрица $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\cdot)$ является измеримой, симметричной и подчинённой условию типа Кордеса. Для последнего оператора условие типа

Кордеса обеспечивает его строгую монотонность; это не потенциальный оператор, для него не приемлем вариационный подход получения апостериорных оценок, использующий теорию двойственности. Здесь применим метод интегральных тождеств, см. [7].

Сформулируем одну из полученных нами теорем об апостериорных оценках для задачи с переменным порядком нелинейности

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u\right) = h & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

где правая часть h из пространства Лебега переменного порядка $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ с нормой $\|\cdot\|_{p'(\cdot)}$. Для слабой постановки этой задачи имеем оператор $A{=}{-}\Delta_{p(\cdot)} : X{\to}X^*$, где $X{=}W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ – пространство Соболева переменного порядка, причем свойства этого оператора обеспечивают однозначную разрешимость задачи (4). Необходимые сведения о пространствах Лебега и Соболева переменного порядка можно почерпнуть в [6].

Введём пространство $Q^*{=}\{\eta{\in}L^{p'(\cdot)}(\Omega;\mathbb{R}^N) \ : \ \operatorname{div}\eta{\in}L^{p'(\cdot)}(\Omega)\}$, а также неравенство Фридрихса $\|v\|_{p(\cdot)}{\leqslant}C_F\|\nabla v\|_{p(\cdot)} \ \forall v{\in}W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ $(\mathbf{F})$, где $C_F{=}const(N,p(\cdot),\Omega)$, которое верно, например, если $p{\in}C(\overline{\Omega})$.

Теорема. *Пусть* $2{\leqslant}\alpha{\leqslant}p(\cdot){\leqslant}\beta{<}\infty$ *в области* Ω *и верно неравенство* $(\mathbf{F})$; u *– решение задачи (4). Тогда для любых* $v{\in}W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ *выполнена оценка*: $\min\{\|\nabla(u-v)\|_{p(\cdot)}^{\alpha-1}, \|\nabla(u-v)\|_{p(\cdot)}^{\beta-1}\} \leqslant$

$$2^{\beta-1}\inf_{\eta^*\in Q^*}\left(\|(|\nabla v|^{p(\cdot)-2}\nabla v - \eta^*\|_{p'(\cdot)} + C_F\,\|\operatorname{div}\eta^* + h\|_{p'(\cdot)}\right).$$

Тематика апостериорных оценок для нелинейных задач разрабатывается совместно с В.Е. Бобковым из Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН (г. Уфа, РФ), см. [7].

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.-Л. — М. : Мир, 1972. — 588 с.

2. Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations / Repin S. — Walter de Gruyter GmbH Co. KG, Berlin, 2008. — 316 p.

3. Pastukhova S.E. A posteriori estimates for the accuracy of approximations in variational problems with power functionals / S.E. Pastukhova // J. Math. Sciences. — 2020. — V. 244, № 3. — P. 509–523.

4. Пастухова С.Е. Апостериорные оценки отклонения от точного решения в вариационных задачах с нестандартными условиями коэрцитивности и роста / С.Е. Пастухова // Алгебра и анализ. — 2020. — Т. 32, № 1. — С. 51–77.

5. Pastukhova S.E. Galerkin approximations in problems with anisotropic $p(\cdot)$-Laplacian / S.E. Pastukhova, D.A.Yakubovich // Applicable Analysis. — 2019. — V. 98, № 1-2. — P. 345–361.

6. Diening L. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents / Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ruzicka M. // — Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. — 514 p.

7. Bobkov V., Pastukhova S. A posteriori estimates for problems with monotone operators / V. Bobkov, S. Pastukhova // arXiv:2504.09931

ТОЧНОСТЬ КЛАСТЕРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ НА ДЕРЕВЕ КЭЙЛИ

В.С. Пашкова (Белгород, БГТУ им. В.Г. Шухова)
valerypashkova@yandex.ru

Получение строгих математических результатов на основе аналитических методов для дискретных перколяционных моделей связано, главным образом, с вычислением вероятности перколяции $P(c)$ бернуллиевского случайного поля на плоских периодических графах, используя т.н. кластерное разложение. Однако оценка точности получаемых приближений, связанная с решением комбинаторной задачи оценки числа кластеров с заданной длиной границы, содержащих фиксированную вершину (см., например, [1]), оказывается настолько грубой, что она не позволяет установить оценку остатка ряда, порождаемого кластерным разложением во всем интервале изменения вероятности $c \in (0, 1)$. В представленном сообщении предлагается решение задачи об оценке точности приближений вероятности $P(c)$, получаемых на основе кластерного разложения для графов типа деревьев Кэйли.

Пусть $G = \langle V, \Phi \rangle$ — бесконечный неориентированный граф, $|V| = \infty$ типа дерева Кэйли со степенью вершин s. На этом графе задано бернуллиевское случайное поле $\{\tilde{\rho}(x) \in \{0, 1\}; x \in V\}$ с вероятностью заполнения вершин графа $\Pr\{\tilde{\rho}(x) = 1\} = c$. Граф G образуется склейкой s графов G_j, $j = 1 \div s$ в «начальной» вершине $\mathbf{0}$. Вероятность перколяции $P(c)$ для такого графа не зависит от выбора

вершины x_0. Эта вероятность определяется формулой

$$P(\mathrm{c}) = (\mathrm{c}(1 - Q^s(\mathrm{c}))\,,$$

где $Q(c)$ — условная вероятность того, что бесконечное множество W, реализующее перколяцию, не имеет бесконечного пересечения с множеством V_j вершин подграфа G_j при условии, что $\{\tilde{\rho}(\mathbf{0}) = 1\}$.

Достаточно вычислить вероятность $Q(c)$ отсутствия «перколяции» на каком-то одном из графов G_j. Эта вероятность удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$Q(c) = 1 - c + cQ^s(c)\,.$$

Оно имеет не более двух корней $Q \in [0, 1]$, где один из них всегда равен 1. Нас в этой работе интересует, построение приближений для корня $Q \neq 1$, каждое из которых заключено в $[0, 1]$. Такие приближения строятся на основе кластерного разложения

$$Q(c) = (1 - c)^2 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n\,, \tag{1}$$

где Q_n — вероятность перколяции из вершины $\mathbf{0}$ на расстояние n. Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Для вероятностей Q_n, $n \geqslant 2$ при $s = 3$ справедлива оценка*

$$Q_n < \left(\frac{8}{3}\eta\right)^{n-2} \eta^2 \big(2(1+\eta)(2+\eta) + (1+\eta^2)^2 - 1\big)\,, \tag{2}$$

где $\eta = c(1 - c)$.

Следствием полученной оценки точности частичных сумм ряда является

Теорема 2. *Вероятность перколяции $P(c)$ бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{\rho}(x); x \in V\}$ на дереве Кэйли со степенью вершин $s = 3$ представляется в форме $P(c) = c(1 - Q^3(c))$, где для функции $Q(c)$ имеет место сходящееся при $c \in (0, 1)$ разложение, в которомдля вероятностей Q_n справедлива оценка (2).*

Литература

1. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians / H. Kesten. — New York: Springer Science+Business Media, 1982. — 424 p.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ИММУНННО-ОНКОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТЕПАНОВОЙ

А.Г. Пегливанян (Майкоп, АГУ)
alenapeglivanan@gmail.com

В работе аналитически вторым методом Ляпунова изучаются вопросы стохастической устойчивости нулевого решения системы двух нелинейных дифференциальных уравнений, возмущенных белым шумом, моделирующих взаимодействие между ростом опухолевых клеток и активностью иммунной системы во время развития рака. Полученные коэффициентные условия устойчивости обобщают отдельные результаты работ [1-4]. Рассматриваемые системы интерпретируются как системы стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито. Выводы основаны на теоремах из монографий [5, 6]. Сформулируем один из полученных результатов.

Теорема 1. *Рассмотрим стохастическую модель Степановой, заданную системой в форме Ито:*

$$\left\{\begin{array}{l} dx(t) = x(1-y-\nu/k)\,dt, \\ dy(t) = \mu\left[(x-x^2-k)(y-\nu/k)+\nu\right]dt+ \\ \qquad\qquad +\sigma\left[(x-x^2-k)(y-\nu/k)+\nu\right]dW_t, \end{array}\right. \tag{1}$$

где $x(t)$ — концентрация опухолевых клеток, $y(t)$ — активность иммунных клеток; μ — детерминированная часть коэффициента иммунной реакции, $\sigma \geqslant 0$ — интенсивность шума, W_t — стандартный винеровский процесс, $k, \nu > 0$ — параметры модели. Тогда состояние $(x^* = 0,\ y^* = \nu/k)$ является положением равновесия системы. Если выполнено условие $\nu > k$, а интенсивность шума σ достаточно мала, то данное равновесие является экспоненциально устойчивым по вероятности (или почти наверное) для системы (1).

Отметим, что шум может стабилизировать систему, даже если детерминированный случай неустойчив. Но это весьма редкое событие для аддитивного шума. В то же время для мультипликативного шума (σ умножается на состояние) может возникать стохастическая бифуркация, когда при интенсивности шума выше некоторого критического значения система меняет свое поведение.

Литература

1. Степанова Н.В. Динамика иммунной реакции при развитии злокачественной опухоли / Н.В. Степанова // Биофизика. — 1979. — Т. 24, № 5. — С. 890–896.

2. Ledzewicz U. An optimal control approach to cancer treatment under immunological activity / U. Ledzewicz, M. Naghnaeian, H. Schattler // Applicationes mathematicae. — 2011. — Vol. 38, No 1. — P. 17–31.

3. Bashkirtseva I. Stochastic dynamics of nonlinear tumor-immune system with chemotherapy / I. Bashkirtseva, A. Chukhareva, L. Ryashko // Physica A. Statistical Mechanics and its Applications. — 2023. — Vol. 622, No 11. — 128835.

4. Wang A. Dynamics of a stochastic tumorimmune interaction system / A. Wang, D. Xue, Z. Wang, J. Zhao, F. Rao // The European Physical Journal Plus. — 2024. — Vol. 139. — 1081.

5. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. — М. : МИР, 1969. — 200 с.

6. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях. — М. : Наука, 1969. — 367 с.

КОМБИНАТОРНЫЕ ПОТОКИ РИЧЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МНОГОГРАННИКОВ НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ

Р.Ю. Пепа (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет космических исследований)
pepa@physics.msu.ru

Комбинаторный поток Риччи [1] для метрики упаковки кругов Тёрстона получил своё развитие в работах [2,3,4]. Несмотря на то, что удалось обобщить результаты Чоу и Луо для случаев евклидовой и гиперболической метрик [5,6], на сегодняшний день по-прежнему остается открытым вопрос существования решения в общем виде комбинаторного потока Риччи для поверхности со сферической метрикой.

Пусть $\mathfrak{T}$ триангуляция сферы S^2, $V = v_1, v_2, \ldots, v_N$ — множество вершин, триангуляции $\mathfrak{T}$. Функция $\Phi : E \to [0, \pi/2]$, где E — множество ребер триангуляции $\mathfrak{T}$, задает набор весов на $w_{ij} =$

$\cos\big(\Phi(e_{ij})\big),\ \forall e_{ij} \in E$. Таким образом пара $(\mathfrak{T}, \Phi)$ определяет упаковку кругов Тёрстона [7] на S^2. Далее, каждой вершине v_i триангуляции $\mathfrak{T}$ сопоставив положительное число r_i. Длину ребра e_{ij}, соединяющую вершины v_i, v_j, вычислим с помощью сферической теоремы косинусов

$$\cos(l_{ij}) = \cos(r_i)\cos(r_j) + \sin(r_i)\sin(r_j)w_{ij}.$$

Тогда набор $r_i,\ i = 1, \ldots, N$ задает метрику для триангуляции сферы S^2. Обозначим за $a_i = \sum\limits_{\Delta v_j v_i v_k \in F} \angle v_j v_i v_k,\ i = 1, \ldots, N$ сумму всех плоских углов вершины v_i, где F — множество граней триангуляции $\mathfrak{T}$. Гауссова кривизна K_i в вершине v_i определяется соотношением $K_i = 2\pi - a_i$. Далее, комбинаторным потоком Риччи для триангуляции S^2 будем называть систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i \sin r_i,\ i = 1, \ldots, N.$$

Представленные в работе результаты численного моделирования позволяют предположить, что под действием потока грани триангулированной сферической поверхности стремятся стать плоскими, а кривизны в вершинах стремятся к $K_i = \frac{4\pi\chi(S^2)}{N}, i = 1, \ldots, N$.

Литература

1. Chow B. The Ricci flow on the 2-sphere. / Journal of Differential Geometry. / B. Chow// — 1991. — Т. 33, № 2. — С.325-334.

2. Pepa R. Yu. Equilibrium for a combinatorial Ricci flow with generalized weights on a tetrahedron / R. Yu. Pepa, Th. Yu. Popelensky // Regular and Chaotic Dynamics — 2017. — Т. 22, № 5. — С. 566–578.

3. Pepa R. Yu. On Combinatorial Geometric Flows of Two Dimensional Surfaces / R. Yu. Pepa, Th. Yu. Popelensky // Regular and Chaotic Dynamics — 2021. — Т. 65, № 5. — С. 60–68.

4. Luo F. Combinatorial Yamabe flow on surfaces / F. Luo// Communications in Contemporary Mathematics — 2003. — № 6. — С. 765–780.

5. Pepa R. Yu. On convergence of combinatorial Ricci flow on surfaces with negative weights. / R. Yu. Pepa, Th. Yu. Popelensky // Lobachevskii Journal of Mathematics — 2017. — Т. 38, № 6. — С. 1061–1068.

3. Popelensky Th.Yu. A note on the weighted Yamabe flow / Th.Yu. Popelensky // Regular and Chaotic Dynamics — 2023. — T. 28, №. 3. — C. 309–320.

7. Thurston W. The geometry and topology of 3-manifolds / W Thurston. — , 1979.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ[1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим задачу на собственные значения в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathbf{H}_0 + \hbar^2(q_1^2 q_2^2 + Q q_1 q_2))\psi = \lambda\psi, \qquad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор, $\hbar > 0$ — малый параметр, Q — вещественный параметр. Задача (1) относится к классу резонансных: обе частоты двумерного осциллятора $\mathbf{H}_0$ равны 1.

Метод построения квазиклассических асимптотик для уравнений с частотными резонансами был разработан в серии работ М.В. Карасева. Он основан на квантовом усреднении возмущения, последующем переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе.

В работе [1] на примере задачи (1) был предложен общий метод нахождения серий асимптотических собственных значений вблизи границ спектральных кластеров. Он основан на новом интегральном представлении для соответствующих асимптотических собственных функций. С помощью этого метода в [1] при $\ell \to \infty$ была найдена асимптотика спектральной серии $\lambda_{k,\ell}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и соответствующие асимптотические собственные функции $\psi_{k,\ell}(q_1, q_2)$ вблизи верхних границ спектральных кластеров.

---

[1] Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2026-0010).

В данной работе будет изучено поведение функций $\psi_{k,\ell}(q_1, q_2)$ при $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$. Кроме того будет найдено новое асимптотическое разложение для этих функций. Чтобы определить $\psi_{k,\ell}$, воспользуемся когерентным преобразованием

$$I_\ell(g) = \frac{\ell+1}{2\pi} \int g(\overline{z}) \mathfrak{H}_z \frac{d\overline{z}\, dz}{(1+ \mid z \mid^2)^{\ell+2}}.$$

Тогда $\psi_{k,\ell}$ представимы в виде $\psi_{k,\ell}(q_1, q_2) = I_\ell(\Phi_{k,\ell}(\overline{z})) + O(\hbar)$, $\hbar \to 0$. Здесь $z \in \mathbb{C}$, $g(\overline{z})$ — многочлен степени не выше ℓ, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{H}_z$ — когерентные состояния алгебры $\mathbf{su(2)}$, которые имеют вид

$$\mathfrak{H}_z = \frac{(1-z^2)^{\ell/2}}{\sqrt{\pi 2^\ell \ell! \hbar}} H_\ell\big(\frac{q_1 - izq_2}{\sqrt{\hbar(1-z^2)}}\big) \exp\left(-\frac{q_1^2 + q_2^2}{2\hbar}\right),$$

$H_\ell(q)$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ — многочлены Эрмита. Кроме того, многочлен $\Phi_{k,\ell}(\overline{z})$ задается формулой

$$\Phi_{k,\ell}(\overline{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\overline{u}^{\ell+1} - \overline{z}^{\ell+1}}{\overline{u}^{\ell+1}(\overline{u} - \overline{z})} p(\overline{u}) d\overline{u}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $u \in \mathbb{C}$, $p(\overline{u})$ — асимптотическое решение многоточечной спектральной задачи (см. [1]), а γ — цикл вокруг точки $\overline{u} = 0$, ориентированный против часовой стрелки.

В работе [2] с помощью метода перевала было найдено квазиклассическое приближение когерентных состояний $\mathfrak{H}_z$, а также получено асимптотическое разложение $\mathfrak{H}_z$ при $\hbar \to 0$, которое справедливо вблизи $z = 1$,

$$|q| = \sqrt{2a}. \tag{2}$$

Здесь число a определено формулой $a = \ell\hbar/2$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$.

Выберем параметр Q в уравнении (1) в виде $Q = b\sqrt{a(a+\hbar)}$, где $b > \sqrt{6}$. Пусть (r, φ) — полярные координаты в $\mathbb{R}^2$. Введем новую переменную $\xi = (r - \sqrt{2a})/\sqrt{\hbar}$. В данной работе при ℓ порядка $\hbar^{-1}$, $\hbar \to 0$ построено асимптотическое разложение асимптотических собственных функций $\psi_{k,\ell}$ вблизи окружности (2) в $\mathbb{R}^2$, где локализованы асимптотические собственные функции. Оно имеет вид

$$\psi_{k,\ell} = \frac{(a\beta)^2 \alpha_1 \mu}{\pi^{3/2} \sqrt{\ell!} \hbar^{(\ell+1)/2}} \left(\frac{a}{e}\right)^{\ell/2} e^{-i\ell\varphi} e^{-\xi^2} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \exp(\Theta_0 + \Theta_1 + i\Theta_2)$$

$$\times H_k(it - y) dt dy (1 + O(\hbar) + O(\hbar\xi^6)) + \sqrt{\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{\xi^3}{3\sqrt{2a}} - \frac{\beta(t - iy)}{\sqrt{2}}$$

$$\times(1-3\xi^2)e^{2i\varphi}+\sqrt{2a}\beta^2(t-iy)^2\xi(e^{2i\varphi}+2e^{4i\varphi})-4\sqrt{2}a\beta^3(t-iy)^3$$
$$\times g(\varphi)-2\sqrt{2}\beta t-\frac{2\sqrt{2}}{3}\beta^3at(t^2-3y^2)+\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{2a\beta^2(8+3b)}{3}-1\right)$$
$$\left.\times(t+iy)^3\right)\exp(\Theta_0+\Theta_1+i\Theta_2)H_k(it-y)dtdy-\frac{\sqrt{\hbar}\,i\beta}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}^2}(t+iy)^2$$
$$\left.\times\exp(\Theta_0+\Theta_1+i\Theta_2)H_k'(it-y)dtdy(1+O(\sqrt{\hbar})+O(\sqrt{\hbar}\xi^3))\right).\qquad(3)$$

Здесь α_1, μ — константы (см. [1]), число β определено равенством $\beta=1/(\sqrt{2a}\sqrt[4]{b^2+5b+6})$,

$$\Theta_0=-\frac{\sqrt{2}\xi}{\sqrt[4]{(b+2)(b+3)}}[t\cos 2\varphi+y\sin 2\varphi+i(t\sin 2\varphi-y\cos 2\varphi)],$$

$$\Theta_1=-\frac{1}{2\sqrt{(b+2)(b+3)}}\left(t^2\left[\frac{\sqrt{b+3}}{\sqrt{b+2}+\sqrt{b+3}}+\cos^2 2\varphi\right]\right.$$
$$\left.+2ty\cos 2\varphi\sin 2\varphi+y^2\left[\frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b+2}+\sqrt{b+3}}+\sin^2 2\varphi\right]\right),$$
$$\Theta_2=\frac{1}{2\sqrt{(b+2)(b+3)}}\left((-t^2+y^2)\cos 2\varphi\sin 2\varphi\right.$$
$$\left.+2ty\left[-\frac{\sqrt{b+3}}{\sqrt{b+2}+\sqrt{b+3}}+\cos^2 2\varphi\right]\right),$$
$$g(\varphi)=-\frac{i}{3}\sin^3\varphi\; e^{3i\varphi}-\frac{\sin\varphi}{2}(i\cos\varphi-2\sin\varphi)e^{4i\varphi}$$
$$+\frac{1}{2}(\cos\varphi+3i\sin\varphi)e^{5i\varphi}-\frac{5}{6}e^{6i\varphi}.$$

Отметим, что разложение (3) значительно проще найденных ранее в [1] формул для $\psi_{k,\ell}$, справедливых глобально, т.е. во всем пространстве $\mathbb{R}^2$.

Литература

1. Перескоков А.В. Асимптотика спектра и квантовых средних возмущенного резонансного осциллятора вблизи границ спектральных кластеров / А.В. Перескоков // Изв. РАН, сер. мат. — 2013. — Т. 77, № 1. — С. 165–210.

2. Pereskokov A.V. Asymptotics of eigenfunctions of perturbed resonance oscillator near upper boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2025. — V. 291, № 4. — P. 544–553.

О ГЛАДКОСТИ В ТЕОРЕМЕ САРДА

И.Г. Петров (Долгопрудный, МФТИ)
petrov.ig@phystech.edu

Согласно классической теореме Сарда, если функция $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}^2)$, то множество её критических значений имеет меру нуль. Оказывается, что в определённом смысле улучшить этот результат нельзя.

Гринберг построил пример функции из класса $C^1(\mathbb{R}^2)$, у которой множество критических значений имеет положительную меру [1]. В [2] Феррера построил пример функции, принадлежащей $C^{1,1/2}(\mathbb{R}^2)$, у которой мера множества критических значений положительна. В статье Нортона [3] утверждается, что для любого $\alpha\in(0,1)$ существует функция класса $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, у которой множество критических значений имеет положительную меру. Мы построили пример функции, при любом $\alpha\in(0,1)$ принадлежащей пространству Гёльдера $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, у которой множество критических значений имеет положительную меру.

Доклад основан на совместной работе с Н.А. Гусевым.

Литература

1. Grinberg E.L. On the Smoothness Hypothesis in Sard's Theorem / E.L. Grinberg // The American Mathematical Monthly. — 1985. — P. 733–734.

2. Ferrera J. An elementary example of Sard's Theorem sharpness / J. Ferrera // URL: - https://arxiv.org/pdf/2202.08000

3. Norton A. Functions not constant on fractal quasi-arcs of critical points / A. Norton // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — P. 397–405.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ВКЛЮЧЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

Г.Г. Петросян (Воронеж, ВГУ, ВГПУ)
garikpetrosyan@yandex.ru

В докладе вначале мы рассматриваем в банаховом пространстве E следующую задачу Коши

$$^{GC}D_0^{\alpha}x(t)+x'(t)=Ax(t)+f(t),\ t\geqslant 0,$$

$$x(0)=x_0,$$

где $^{GC}D_0^{\alpha}$ — дробная производная Герасимова-Капуто порядка $0<\alpha<1$, $x_0\in E$ наперед задано, $A:D(A)\subset E\to E$ — линейный замкнутый оператор (необязательно ограниченный), порождающий равномерно ограниченную C_0-полугруппу операторов $\{T(t),t\geqslant 0\}$. Предполагается, что $f:[0,+\infty)\to E$ – непрерывная или существенно ограниченная на любом конечном промежутке функция. Отметим, что в таком случае удается выписать решение в явном виде:

$$x(t)=\left(\sigma(t)+I_0^{1-\alpha}\sigma(t)\right)x_0+\int_0^t\sigma(t-s)f(s)ds,$$

где $I_0^{1-\alpha}$ обозначает дробный интеграл порядка $1-\alpha$, оператор-функция

$$\sigma(t)=\int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}}\alpha s^{\alpha-2}\Phi_{\alpha}\left(\frac{t-s^{\alpha}}{s}\right)T(s^{\alpha})ds,$$

и Φ_{α} – функция Райта-Маинарди.

Затем на основе полученных результатов для линейной задачи, мы исследуем в сепарабельном банаховом пространстве E задачу Коши для нелинейного дифференциального включения

$$^{GC}D_0^{\alpha}x(t)+x'(t)\in Ax(t)+F(t,x(t)),\ t\in[0,a],$$

$$x(0)=x_0,$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проекты № 23-71-10026, № 25-11-00056).

также полагая, что $x_0 \in E$ наперед задано, A — линейный оператор, порождающий равномерно ограниченную C_0-полугруппу операторов $\{T(t), t \geqslant 0\}$, а также, что $F : [0, a] \times E \multimap E$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями.

Приводится приложение полученных результатов для решения краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Литература

1. Kilbas A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. — Amsterdam: Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, 2006.

2. Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М.: Либроком, 2011. — 224 С.

3. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca P. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2001. — 232 p.

4. Afanasova M. A controllability problem for causal functional inclusions with an infinite delay and impulse conditions / M. Afanasova, V. Obukhovskii, G. Petrosyan // Advances in Systems Science and Applications. — 2021. — Vol. 21, № 3. — P. 40-62.

5. Афанасова М.С. Об обобщенной краевой задаче для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием / М.С. Афанасова, В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2021. — Т. 31, № 2. — С. 167-185.

6. Петросян Г.Г. О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием / Г.Г. Петросян, М.С. Афанасова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2017. — № 1. — С. 135-151.

7. Петросян Г.Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора / Г. Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1355-1358.

8. Петросян Г.Г. О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования / Г.Г. Петросян // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т. 25, № 131. — С. 284-289.

9. Петросян Г.Г. О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник Удмуртского университета. Мате-

матика. Механика. Компьютерные науки. — 2022. — Т. 32, № 3. — С. 415-432.

10. Obukhovskii V. On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, V. Bocharov, C. F. Wen // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. — 2022. — Vol. 6, № 3. — P. 185-197.

11. Kamenskii M. On a controllability problem for a feedback control system governed by a semilinear differential equation and a sweeping process / M. Kamenskii, G. Petrosyan // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2024. — Vol. 132. — P. 107889.

12. Каменский М.И. О принципе усреднения для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве с отклоняющимся аргументом и малым параметром / М.И. Каменский, Г.Г. Петросян // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — Т. 204. — С. 74-84.

13. Kamenskii M. A Continuous Dependence of a Solution Set for Fractional Differential Inclusions of an Order $q \in (1, 2)$ on Parameters and Initial Data / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Т. 44, № 8. — С. 3331-3342.

14. Obukhovskii V. On Impulsive Fractional Differential Inclusions with a Nonconvex-valued Multimap in Banach Spaces / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, M. Soroka // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, No. 4. — P. 1482-1494.

15. Обуховский В.В. О начальной задаче для невыпуклозначных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве / В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян, М.С. Сорока // Математические заметки. — 2024. — Т. 115, № 3. — С. 392-407.

16. Петросян Г.Г. О системах управления, описываемых дифференциальными включениями дробного порядка с обратной связью / Г.Г. Петросян // Дифференциальные уравнения. – 2024. — Т. 60, № 11. — С. 1499-1518.

ГОМЕОМОРФИЗМ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ С УСЛОВИЕМ СОХРАНЕНИЯ МЕРЫ[1]

И.С. Пилипенко (Донецк, ДонГУ)
irinasergeevnapilipenko@yandex.ru

Введение и постановка задачи. Пусть X — непустое открытое подмножеств вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$. Будем говорить, что гомеоморфизм $F : X \to \mathbb{R}^n$ сохраняет меру, если для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset X$ его n–мерная лебегова мера $m_n(A)$ совпадает с $m_n(F(A))$, где

$$F(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : F^{-1}(x) \in A\}.$$

Обозначим через $MP(X)$ множество всех гомеоморфизмов $F : X \to \mathbb{R}^n$, сохраняющих меру. Отображения со свойством сохранения меры играют важную роль в теории информации, эргодической теории и других областях (см., например, [1, гл. 5,§7]).

В монографии [1, гл. 5,§7] поставлена следующая проблема 1.

Проблема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая совокупность измеримых подмножеств X. Пусть также гомеоморфизм $F : X \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию*

$$m_n(A) = m_n(F(A)) \text{ для любого } A \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

При каких условиях на $\mathcal{A}$ можно утверждать, что $F \in MP(X)$?

Например, если $\mathcal{A}$ состоит из всех подмножеств X нулевой меры, то этого утверждать нельзя (условие (1) выполняется для любого C^1– диффеоморфизма $F : X \to \mathbb{R}^n$). В этом случае (1) является известным N-условием Лузина, введённым в 1915 г.

Далее будем обозначать через $HN(X)$ множество всех гомеоморфизмов $F : X \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих N–условию. Очевидно, $MP(X) \subset HN(X)$.

В данной работе рассматривается случай , когда $n = 2$, а $\mathcal{A}$ состоит из всех замкнутых единичных квадратов и всех замкнутых единичных полукругов, лежащих в области $X \subset \mathbb{R}^2$.

Основная часть.Перейдём к формулировкам основных результатов работы. Нам потребуются следующие определение.

---

[1] Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 1023020800027-5-1.1.1 и тема № 124012400352-6).

Определение 1. *Пусть* $r_1, r_2 > 0$. *Открытое множество* $G \subset \mathbb{R}^n$ *будем называть* (r_1, r_2)*-областью, если выполняются следующие условия:*

1. *G содержит замкнутый шар радиуса r_1;*
2. *G является объединением замкнутых шаров радиуса r_2;*
3. *центры двух любых замкнутых шаров радиуса r_2, содержащихся в G, можно соединить ломаной так, что всякий замкнутый шар радиуса r_2 с центром на этой ломаной содержится в G.*

Теорема 1. *Пусть множество* $X \subset \mathbb{R}^2$ *является* (r_1, r_2)*-областью при* $r_1 = \frac{\sqrt{65}}{8}, r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. *Пусть также* $F \in HN(X)$ *и условие (1) выполнено для всех замкнутых единичных квадратов и всех замкнутых единичных полукругов, лежащих в* X. *Тогда* $F \in MP(X)$.

Теорема 2. *Пусть* $r_1 > 0, r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. *Тогда существует область* $X \subset \mathbb{R}^2$*, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *X содержит замкнутый круг радиуса r_1;*
2. *X является объединением замкнутых кругов радиуса r_2;*
3. *для области X утверждение теоремы 1 не выполняются даже для C^∞-диффеоморфизмов F.*

Заключение. Таким образом, в работе установлены условия на открытое множество $X \subset \mathbb{R}^2$, при которых гомеоморфизм $F : X \to \mathbb{R}^2$, сохраняющий меру любого замкнутого единичного квадрата и замкнутого единичного полукруга из X, будет сохранять меру любого измеримого по Лебегу подмножества X. Также показано, что установленные условия существенно ослабить нельзя.

Литература

1. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations / V.V. Volchkov. — Dordrecht : luwer Academic Publishers, 2003. — 454 p.

2. Volchkov V.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V.V. Volchkov, Vit.V.Volchkov. — London : Springer, 2009. — 671 p.

3. Volchkov V.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V.V. Volchkov, Vit.V.Volchkov. — New York : Birkhäuser, Basel, 2013. — 592 p.

4. Очаковская О. А. Теоремы о двух радиусах для гомеоморфизмов, сохраняющих меру / О.А. Очаковская // ДАН. — 2006. — Т. 408, № 4. — С. 1–3.

5. Волчков В.В. Аппроксимация функций в Lp линейными комбинациями индикаторов / В.В. Волчков, И.С. Пилипенко// Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. — 2024— № 2. — С.3-8

АППРОКСИМАЦИЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.И. Пискарев (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, МТУСИ)
piskarev@gmail.com

В докладе изучается аппроксимация как по пространству, так и по времени, траекторий абстрактных параболических задач Коши

$$\mathbf{D}_t^{\alpha} u(t) = Au(t),\, t \geqslant 0, u(0) = u^0 \in E$$

с дробной по времени [1] производной по Капуто—Джрбашяну. Подробно обсуждается [1] коэцитивная корректность задач

$$\mathbf{D}_t^{\alpha} u(t) = Au(t) + f(t),\, t \geqslant 0, u(0) = u^0 \in E$$

в ряде абстрактных пространств. Наконец, в окрестности гиперболической стационарной точки рассматривается затенение [2-4] для задач

$$\mathbf{D}_t^{\alpha} u(t) = Au(t) + f(u(t)),\, t \geqslant 0, u(0) = u^0 \in E^{\beta}.$$

Будут затронуты вопросы представления решений дробных уравнений через решения задач с целой производной.

Литература

1. Liu Ru, Miao Li, Sergey Piskarev. The Order of Convergence of Difference Schemes for Fractional Equations/ Miao Li, Sergey Piskarev// Numerical Functional Analysis and Optimizatio. — 2017, — 38, № 6, — C. 754–769.

2. Siegmund S. Approximations of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points for fractional differential equations / Siegmund S., Piskarev S. // Nonlinear Dynamics (NODY). — 2019, — 95, № 1. — C. 685–697.

3. Piskarev S., Siegmund S. Unstable manifolds for fractional differential equations / Piskarev S., Siegmund S. // Eurasian journal

---

of mathematical and computer applications. — 2022, 10, — № 3. — С. 58 – 72.

4. Piskarev S. Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations / Piskarev S., Ovchinnikov A. — World Scientific, 2023. — 204 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ДОСТАТОЧНО БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА

С.П. Плышевская (Симферополь, КФУ им. В.И. Вернадского)
splyshevskaya@mail.ru

Будем исследовать решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial v}{\partial x} + \beta v + \gamma v^2 - v^3\right], \tag{1}$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \tag{2}$$

$$M(v(t,x)) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(t,x)dx = 0 \tag{3}$$

при достаточно больших значениях параметра $|\lambda|$.

Без потери общности можно считать, что параметр λ отрицателен. Предположим, что выполняется неравенство: $-\lambda \gg 1$.

В (1) поделим левую и правую части на $(-\lambda)$. Произведём замену $t \to (-\lambda)^{-1}t$ и положим $\varepsilon = (-\lambda)^{-1}$, т. е. $0 < \varepsilon \ll 1$. В результате приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v + \gamma v^2 - v^3\right), \tag{4}$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \qquad M(v) = 0. \tag{5}$$

Исследуем поведение решений этой краевой задачи при малых ε и при $t \to \infty$.

В случае $\varepsilon = 0$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \qquad v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \qquad M(v) = 0. \tag{6}$$

Все корни λ_k характеристического уравнения для (6) являются чисто мнимыми: $\lambda_k = -ik^3$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Тем самым в (4), (5) реализуется критический в задаче об устойчивости случай бесконечной размерности. Методика изучения такого типа критических случаев разработана в (1,2). Применим её для рассматриваемой задачи.

Положим в (4), (5)

$$v = v_0(t, \tau, x) + \varepsilon v_1(t, \tau, x) + \ldots, \qquad \tau = \varepsilon t, \tag{7}$$

$$v_0(t, \tau, x) = \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx - ik^3 t). \tag{8}$$

Зависимость от t и x в (7) предполагается 2π-периодической и $M(v_0(t, \tau, x)) = 0$. Подставим (7) в (4). Тогда для определения $v_1(t, \tau, x)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \beta v_0 + \gamma v_0^2 - v_0^3\right). \tag{9}$$

Из условия разрешимости (9) в указанном классе функций для определения элементов $\xi_k(\tau)$ формального ряда (8) приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = -\alpha k^4 \xi_k + k^2 \beta \xi_k - 3k^2 \xi_k \left(2 \sum_{j=-\infty,\ j\neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 - |\xi_k|^2\right), \tag{10}$$

$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Система (10) играет роль нормальной формы. Её нелокальная динамика определяет, на основе соотношения (8), поведение решений исходной краевой задачи (2), (3) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Систему (10) можно записать в компактной форме. Для этого введём несколько обозначений. Во-первых, отметим, что

$$\sum_{j=-\infty,\ j\neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 = M(v_0^2(t, \tau, x)). \tag{11}$$

Через $\omega(\tau, x)$ обозначим функцию

$$\omega(\tau, x) = \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx), \tag{12}$$

где коэффициенты Фурье ξ_k те же, что и в формуле (8). Поэтому

$$\sum_{j=-\infty,\ j\neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 = M([\omega(\tau, x)]^2). \tag{13}$$

Обозначим через $N(\omega)$ бесконечномерный вектор

$$N(\omega) = (\ldots,\ \xi_{-2}\exp(-2ikx),\ \xi_{-1}\exp(-ikx),\ \xi_1\exp(ikx),\ \xi_2\exp(2ikx),\ \ldots).$$

Тогда

$$\bar{N}(\omega) = (\ldots,\ \xi_2\exp(2ikx),\ \xi_1\exp(ikx),\ \xi_{-1}\exp(-ikx),\ \xi_{-2}\exp(-2ikx),\ \ldots).$$

Умножение векторов считаем ниже покоординатным. Поэтому

$$N(\omega)\bar{N}(\omega) = (\ldots,\ |\xi_2|^2,\ |\xi_1|^2,\ |\xi_1|^2,\ |\xi_2|^2,\ \ldots).$$

Для скалярного произведения $(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\omega))$ в итоге приходим к формуле

$$(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\omega)) = \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \xi_k |\xi_k|^2 \exp(ikx).$$

После этого систему (9) можно представить в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = -\alpha\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} - \beta\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + 3\left[2M(\omega^2) - 3\left(N(\omega)\bar{N}(\omega), N\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)\right)\right]. \tag{14}$$

Это уравнение следует дополнить периодическими краевыми условиями

$$\omega(\tau, x + 2\pi) \equiv \omega(\tau, x). \tag{15}$$

Теорема 1. *Пусть краевая задача (14), (15) имеет решение* $\omega(\tau, x)$, *которое ограничено при* $\tau \to \infty,\ x \in [0, 2\pi]$ *вместе с* $\frac{\partial^2\omega(\tau,x)}{\partial x^2}$. *Тогда краевая задача (1)— (3) при всех достаточно малых* ε *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon)$ *решение* $v(t, x, \varepsilon) = v_0(t, \tau, x) + O(\varepsilon)$, *где* $v_0(t, \tau, x)$ *является соответствующей для* $\omega(\tau, x)$.

Литература

1. Кащенко С.А. Бифуркации в уравнении Курамото — Сивашинского / С.А. Кащенко // Теоретическая и математическая физика. — 2017. —Т. 192, № 1. — С. 23–40.

2. Кащенко С. А. Бифуркации в обобщенном уравнении Кортевега — де Фриза / С.А. Кащенко, М.М. Преображенская // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2018. — № 2. — С. 54–58.

MOR ЭФФЕКТ В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КОЛЕБАНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ГРАФА

А.А. Поздняков (Воронеж, ВГУ)
andruwapozd@gmail.com

В докладе обсуждается метод понижения размерности (MOR – method of order reduction). Данный метод заключается в переходе к задаче меньшей размерности, но обладающей свойствами изначальной системы. Оказывается, что при одинаковой точности применение MOR-подхода к вычислению первого собственного значения колебаний мембраны требует на порядок меньше вычислений, чем стандартная разностная схема.

Пусть имеется сетка из струн с квадратными ячейками, натянутая в плоскости xOy и закреплённая по контуру квадрата $Q = [0; l] \times [0; l]$.

Узлы сетки — точки примыкания струн друг к другу — имеют координаты $(ih; jh)$, где $i, j \in \mathbb{N}$ меняются от 0 до $n = l/h$ (предполагается, что l нацело делится на h). Мы считаем, что к внутренним узлам сетки прикреплены грузы одинаковой массы μ; вдоль струн распределена масса постоянной плотности ρ и они имеют постоянное натяжение τ. Будем моделировать эту механическую систему метрическим графом G, составленным из рёбер e_i и вершин v_j, изображающих соответственно струны и места их стыковки. Множество вершин v_j, лежащих на границе квадрата Q, обозначим ∂G_0. Эти вершины будем называть граничными, а остальные — внутренними. Множество, составленное из внутренних вершин и точек всех рёбер, обозначим через G°.

Квадраты частот собственных колебаний этой системы являются собственными значениями следующей задачи Штурма-Лиувилля на графе G:

$$\tau u''(x) + \lambda \rho u(x) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j \in I(v_i)} \tau u'_{\nu_j}(v_i) + \lambda \mu u(v_i) = 0, \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial G_0} = 0. \tag{3}$$

При достаточно малых размерах ячеек данная механическая система близка по своим свойствам к мембране(в смысле близости спектров частот собственных колебаний), растянутой в квадрате $Q = [0, l] \times [0, l]$, если её напряжение σ_0 связано с натяжением τ формулой $\tau = \sigma_0 h$, а плотность ρ_0 связана с плотностью сетки ρ формулой $2\rho h + \mu = \rho_0 h^2$.

Мы изучим поведение первого собственного значения λ_0 при изменении ρ от его максимального значения — $\rho = h^2/2$ до минимального — $\rho = 0$. Все промежуточные распределения масс будем обозначать парой (ρ, μ). Крайние случаи тогда описываются парами: $(0,\ \rho_0 h^2)$ и $(\rho_0 h/2,\ 0)$.

Напомним, что квадраты частот собственных колебаний мембраны являются собственными значениями следующей краевой задачи:

$$\sigma_0 \Delta u + \lambda \rho_0 u = 0, \tag{4}$$

$$u\Big|_{\partial Q} = 0. \tag{5}$$

Главным инструментом для изучения поведения первого собственного значения колебания системы (1) - (3) является принцип Рэлея.

$$\lambda(\rho) = \inf_U \frac{\int\limits_G \tau u'^2 dl}{\int\limits_G \rho u^2 dl + \sum\limits_{v_i \in V} \mu u^2(v_i)} = \inf \Phi_u(\rho),$$

здесь $\lambda(\rho)$ - первое собственное значение задачи (1) - (3), U - набор функций, непрерывно дифференцируемых на каждом ребре графа G и обнуляющихся на границе ∂G_0.

Теорема 1. *Первое собственное значение $\lambda(\rho)$ является возрастающей функцией переменной ρ на отрезке* $[0, \rho_0 h/2]$

Отсюда следует, что самое большое отклонение $\lambda_0(\rho)$ от точного значения первого собственного значения λ_0 задачи (4) - (5) получается при распределении масс $(0,\rho_0 h^2)$, а самое маленькое — равное нулю — при распределении $(\rho_0 h/2,\ 0)$.

Теорема 1 позволяет довольно быстро получить оценку этого отклонения. В самом деле, имеем:

$$\delta = \lambda_0 - \lambda(0) = \frac{2\sigma_0 \pi^2}{\rho_0 l^2} - \frac{8\sigma_0 \sin^2(\frac{\pi}{2n})}{\rho_0 h^2} = \frac{\pi^4 \sigma_0}{6\rho_0 l^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Отсюда получаем оценку требуемого числа узлов для обеспечения заданной точности (погрешности) ϵ Для обеспечения наперёд заданной погрешности ϵ нужно взять число частей n, на которые разбивается отрезок длины l целую часть последнего числа, исходя из следующего соотношения:

$$n^2 \approx \frac{1}{\epsilon}\frac{\pi^4\sigma_0}{6\rho_0 l^2}.$$

Однако, MOR-эффект возникает при следующем подходе к вычислениям: сначала мембрана аппроксимируется сеткой из струн, а затем к полученной сетке применяется разностная схема.

Анализ показывает, что система уравнений для вычисления λ_0 разностным методом с двухмасштабной схемой будет содержать в k^2 раз меньше уравнений, чем это имеет место в обычной схеме для вычисления λ_0 с той же точностью.

Литература

1. Пенкин О.М. Некоторые вопросы качественной теории краевых задач на графах: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / О.М. Пенкин — М., 1988 — 28 с.

2. Kaldybekova B.K. A numerical solution of the membrane eigenvalue problem by model order reduction. / B.K. Kaldybekova, G.V. Reshetova // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — Т. 14 — 1088—1099с.

3. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах/ Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев , С.А. Шабров — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 272 с.

4. Курант Р., Методы математической физики Т.1 / Р. Курант, Д. Гильберт — 3-е изд. — 1951. — 476 с.

5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский — 1971. — 552 с.

6. Кулешов П.А. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе/ А.Т. Диаб, П.А. Кулешов, О.М. Пенкин // Математические заметки. — 2014. — №6. — С. 885–895.

ТОПОЛОГИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ РАНГА 0 ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО БИЛЛИАРДА С ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

С.Е. Пустовойтов (Москва, МГУ)
pustovoitovse1@mail.ru

Математическим биллиардом называется динамическая система, задающая движение безразмерной точки в замкнутой области $\mathcal{B}$ с абсолютно упругим отражением от границы. Такая система является гамильтоновой на своем фазовом пространстве. В качестве гамильтониана выступает полная энергия H движущейся точки. Дж. Биркгофом [1] было доказано, что плоский биллиард, ограниченный эллипсом, без действия сторонних сил является вполне интегрируемой системой, т.е. он допускает дополнительный закон сохранения, независимый с гамильтонианом. Добавление сторонних сил изменяет динамику системы и может, вообще говоря, нарушить интегрируемость. В.В. Козловым [2] был предложен критерий интегрируемости биллиарда с потенциалом.

Критерий (Козлов). *Биллиард в эллипсе с полуосями $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$, снабженный потенциалом $W \in C^{\infty}(\mathcal{B})$, допускает первый интеграл вида*

$$F = \frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_x y)^2}{ab} + f(x,y),$$

если и только если потенциал W удовлетворяет уравнению

$$(a-b)W_{xy} + 3(yW_x - xW_y) + W_{xy}(y^2 - x^2) + xy(W_{xx} - W_{yy}) = 0$$

Решение уравнения Козлова в классе многочленов было предложено С.Е. Пустовойтовым [3].

Теорема (Пустовойтов). *Уравнение Козлова в эллиптических координатах имеет вид*

$$x(\lambda_1,\lambda_2)y(\lambda_1,\lambda_2)(\frac{W_1 - W_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - W_{12}) = 0,$$

где W_i — частная производная функции W по λ_i.

Общее решение уравнения в классе полиномов имеет вид

$$W = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

---

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 25-71-10087).

где P – произвольный многочлен.

Рассмотрим многочлен P общего положения, т.е. такой, чтобы при любом $C = const$ функция $P(t) + Ct$ не принимала равные значения в трех своих экстремумах. Для биллиардов с таким потенциалом изучим особенности слоения Лиувилля, содержащие невырожденные точки ранга 0. Для этого применим конструкцию почти прямого произведения 2-атомов, описанную в [4].

Теорема. *Невырожденные особые точки ранга 0 эллиптического биллиарда с полиномиальным потенциалом имеют тип центр-центр, центр-седло или седло-седло. Слоение Лиувилля четырехмерной окрестности точек центр-центр послойно гомеоморфно прямому произведению двух 2-атомов A. Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки центр-седло, послойно гомеоморфно прямому произведению 2-атома A и одного из 2-атомов B, B_2, C_2 или C_4. Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки седло-седло, послойно гомеоморфно почти прямому произведению $B \times B$, $B \times B_2$, $B \times C_2$, $B \times C_4$, $B_2 \times B_2$, $B \times B_2/\mathbb{Z}_2$, $B \times C_2/\mathbb{Z}_2$, $B_2 \times C_2/\mathbb{Z}_2$ или $B \times C_4/\mathbb{Z}_2$.*

Литература

1. Биркгоф Дж. Динамические системы / Дж. Биркгоф — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999

2. Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде / В.В. Козлов// Прикладная математика и механика — 1995 — Т. 59 вып. 1

3. Пустовойтов С.Е. Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического биллиарда с полиномиальным потенциалом / С.Е. Пустовойтов// Чебышевский сборник. — 2024 — Т. 25, вып. 1 — С. 62–102.

4. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко — Ижевск: РХД, 1999.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГЛТУ)
raetskaya@inbox.ru

Рассматривается возмущенная система

$$\varepsilon\frac{\partial x(t,s,\varepsilon)}{\partial t}=B\frac{\partial x(t,s,\varepsilon)}{\partial s}+Du(t,s,\varepsilon) \tag{1}$$

с условиями

$$x(0,s,\varepsilon)=\alpha_0(s), \tag{2}$$

$$x(\frac{T}{2},s,\varepsilon)=\beta_0(s), \tag{3}$$

$$x(T,s,\varepsilon)=\gamma_0(s), \tag{4}$$

где $t\in[0,T], s\in[0,S], \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$; $x(t,s,\varepsilon)\in\mathbb{R}^n$; $u(t,s,\varepsilon)\in\mathbb{R}^m$; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Наряду с возмущенной системой (1) рассматривается предельная система ($\varepsilon=0$)

$$B\frac{\partial\overline{x}(t,s)}{\partial s}+D\overline{u}(t,s)=0, \tag{5}$$

с условиями

$$\overline{x}(0,s)=\overline{\alpha}_0(s),\qquad \overline{x}(\frac{T}{2},s)=\overline{\beta}_0(s),\qquad \overline{x}(T,s)=\overline{\gamma}_0(s). \tag{6}$$

Одной из целей исследования является установление влияния малого параметра на возможность перевода системы (1) из произвольного состояния (2) в произвольное состояние (4) под влиянием какого либо управления $u(t,s,\varepsilon)$, при наличии дополнительного условия (3).

Исследование проводится методом каскадной декомпозиции [1]-[7], базирующемся на свойствах нетеровости прямоугольного матричного коэффициента D. В общем случае процесс декомпозиции полностью завершается за число шагов p, не превышающее размерности исходного пространства ($0\leqslant p\leqslant n$).

В данной работе рассматривается случай $p=1$.

Решается задача построения в явном виде пары функций $x(t,s,\varepsilon),u(t,s,\varepsilon)$ - решения задачи управления (1)-(4).

Устанавливаются связи между соответствующими функциями в условиях (2)-(4) и (6). При выполнении условий разрешимости предельной задачи (5), (6), строится решение предельной задачи - пара функций $\overline{x}(t,s)$, $\overline{u}(t,s)$.

Основной целью исследования сингулярно возмущенной системы (1) является построение управления, генерирующего явление погранслоя. Для любого решения предельной задачи строится такое решение возмущенной задачи, что функция состояния имеет вид

$$x(t,s,\varepsilon) = \overline{x}(t,s) + v(t,s,\varepsilon), \tag{7}$$

где $v(t,s,\varepsilon)$ - функция погранслоя вблизи границ $t = 0$, $t = \frac{T}{2}$, $t = T$.

Определяющая функция возмущенной системы первого шага также строится в виде

$$x_1(t,s,\varepsilon) = \overline{x}_1(t,s) + v_1(t,s,\varepsilon), \tag{8}$$

где $\overline{x}_1(t,s)$ - определяющая функция предельной системы первого шага декомпозиции.

Метод построения определяющих функций подробно изложен в работе [7].

Слагаемое $v_1 = v_1(t,s,\varepsilon)$ в (8) - это функция погранслоя вблизи границ $t = 0$, $t = \frac{T}{2}$, $t = T$, удовлетворяющая шести, полученным в процессе декомпозиции, условиям вида

$$\frac{\partial^j v_1}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\varepsilon^j}\mu_j, \quad \frac{\partial^j v_1}{\partial t^j}\Big|_{t=\frac{T}{2}} = \frac{1}{\varepsilon^j}\nu_j, \quad \frac{\partial^j v_1}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = \frac{1}{\varepsilon^j}\eta_j, \tag{9}$$

где $\mu_j = \mu_j(0,s), \quad \nu_j = \nu_j(\frac{T}{2},s), \quad \eta_j = \eta_j(T,s), \quad j = 0,1.$

Функция $v_1(t,s,\varepsilon)$ строится в виде

$$v_1(t,s,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{3} c_i(s,\varepsilon)\cdot e^{q_i(t,\varepsilon)} + \sum_{i=1}^{3} c_{i+3}(s,\varepsilon)\cdot\varphi_i(t,\varepsilon)\cdot e^{q_i(t,\varepsilon)}, \tag{10}$$

с показателями $q_1(t,\varepsilon) = -\frac{t^2}{\varepsilon}$, $q_2(t,\varepsilon) = -\frac{(t-\frac{T}{2})^2}{\varepsilon}$, $q_3(t,\varepsilon) = -\frac{(t-T)^2}{\varepsilon}$; с коэффициентами $\varphi_1(t,\varepsilon) = \frac{t}{\varepsilon}$, $\varphi_2(t,\varepsilon) = \frac{(t-\frac{T}{2})}{\varepsilon}$, $\varphi_3(t,\varepsilon) = \frac{(t-T)}{\varepsilon}$.

Подстановка выражения (10) в условия (9) приводит к системе для нахождения векторных коэффициентов $c_j(s,\varepsilon)$, $j = \overline{1,6}$.

В процессе обратного хода декомпозиции восстанавливается функция состояния возмущенной системы (1) в виде (7). Затем строится функция управления возмущенной задачи в виде

$$u(t,s,\varepsilon) = \overline{u}(t,s) + w(t,s,\varepsilon), \tag{11}$$

где $w(t,s,\varepsilon)$ в (11) - это функция погранслоя вблизи границ $t=0$, $t=\frac{T}{2}$, $t=T$.

Литература

1. Zubova S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Mathematical Methods in the Applied Sciences. AIMS Press, New York. — 2021. — V. 44, № 15. — P. 11998–12009.

2. Zubova S.P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System derivatives / S.P. Zubova, E.V Raetskaya // Automation and Remote Control. — 2018. — 79 (5) — P. 774–791.

3. Zubova, S.P. Control problem for dynamical systems with partial derivatives / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya, L.H. Trung // J. Math. Sci. — 2020. —V. 249, № 6. —P. 941–953.

4. Zubova S.P. Solution of the spectrum allocation problem for a linear control system with closed feedback/ S.P. Zubova, E.V Raetskaya // Differential equation*s. —2024. —T. 60. № 6. —P. 763–781.

5. Раецкая Е.В. Решение задачи управления для сингулярно возмущенной динамической системы с частными производными /Е.В. Раецкая // Дифференциальные уравнения. —2025. —Т. 61. № 12. —С. 1699–1718.

6. Зубова С.П. Алгоритм построения матриц обратной связи в задаче размещения спектра для линейной системы управления / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Автоматика и Телемеханика. — 2025. — № 12. —С. 42–65.

7. Раецкая, Е.В. Общая схема построения определяющей функции в задаче управления для динамической системы в частных производных разного порядка /Е.В. Раецкая // Итоги науки и техники. Совр. математика и ее прил. Темат. обзоры. —2024. —Т. 232. —С. 78–88.

К ТЕОРИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КОШИ–РИМАНА С СИЛЬНОЙ ПОЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

А.Б. Расулов (Москва, МЭИ)
rasulzoda55@gmail.com

Общеизвестно, насколько важную роль в приложениях играет теория обобщенных аналитических функций, созданная И.Н. Векуа [1]. Она имеет глубокие связи со многими разделами анализа, геометрии и механики, включая квазиконформные отображения, теорию поверхностей, теорию оболочек и газовую динамику.

Многие результаты, полученные для обобщенных аналитических функций в скалярном случае, были обобщены на системы с несколькими неизвестными функциями при регулярных коэффициентах (см., например, [2], [3]).

Системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с несколькими неизвестными функциями, коэффициенты младших порядков которых имеют полярные особенности, исследованы недостаточно.

В настоящей работе для одной такой системы уравнений найдены интегральные представления и исследованы граничные задачи.

Пусть односвязная область D содержит начало координат и ограничена простым кусочно-гладким ляпуновским контуром Г.

Для краткости обозначим

$$\rho(z) = \bar{z}\,|z|^{n-1}, \quad n > 1.$$

В стандартной записи, где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $u_k(z) = u_{1k}(x,y) + iu_{2k}(x,y)$, $k = 1, 2, \dots, n$, в области $D_0 = D \setminus \{0\}$ рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сильной особой точкой следующего вида:

$$\frac{\partial u_k}{\partial \bar{z}} - \frac{a}{\rho}\,u_k + a_{k1}(z)\,u_1 + a_{k2}(z)\,u_2 + \dots + a_{kn}(z)\,u_n = f_k, \qquad (1)$$
$$k = 1, 2, \dots, n,$$

где a — комплексное число, а $a_{kl}(z) \in C(D)$, $k, l = \overline{1, n}$, являются аналитическими функциями комплексного переменного z в области D.

Получено явное интегральное представление решений системы (1). Эти результаты применяются для решения краевых задач Римана–Гильберта.

Заметим, что интегральное представление решений системы (1) получено и для более общего случая, а именно, когда коэффициент $a \in C(D)$ — комплекснозначная функция, а коэффициенты $a_{kl}(z) \in L^p(D)$, $p > 2$, $k, l = \overline{1, n}$.

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 510 с.

2. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I / А. П. Солдатов // Соврем. матем. Фундам. напр. — 2017. — Т. 63, № 1. — С. 1–189.

3. Виноградов В.С. Краевая задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости / В. С. Виноградов // Дифф. уравнения. —1971. — Т. 7, № 8. — С. 1440–1448.

О КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССАХ М. ДЖРБАШЯНА

Е.Г. Родикова (Брянск, БГУ имени акад. И.Г. Петровского)
evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D, $a^+ = \max(0, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Обозначим через $T(r, f)$ характеристику Р. Неванлинны функции $f \in H(D)$ [2], а через $T_\alpha(r, f)$ – α-характеристику М.М. Джрбашяна [1]:

$$T_\alpha(r, f) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{2\pi \cdot \Gamma(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln |f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi, \alpha > -1,$$

где Γ — функция Эйлера, $\lim\limits_{\alpha \to -1} T_\alpha(r, f) = T(r, f)$.

Рассмотрим класс М.М. Джрбашяна (см. [1])

$$N_\alpha := \left\{ f \in M(D) : \sup_{0<r<1} T_\alpha(r, f) \leqslant C \right\}, \alpha > -1,$$

где $C > 0$ - положительная константа, значения которой зависят разве что от функции f.

Сформулируем задачу кратной интерполяции в классе N_α: пусть $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ и $\{w_k\}_1^\infty \subset \mathbb{C}$; p_j — кратность появления числа z_j в $\{z_k\}_1^\infty$, $s_j \geqslant 1$ — кратность появления числа z_j на отрезке $\{z_k\}_1^j$.

Выясним, при каких условиях на $\{z_k\}$ и $\{w_k\}$ можно построить в явном виде функцию $f \in N_\alpha$, такую что

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, \ldots? \tag{1}$$

Для любого $\alpha > -1$ символом $\pi_\alpha(z, z_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_1^\infty \subset D$, $0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. [1]). Обозначим $\pi_{\alpha,n}(z, z_k)$ произведение $\pi_\alpha(z, z_k)$ без n-го фактора. Если $\alpha = m \in \mathbb{Z}_+$ произведение Джрбашяна имеет вид:

$$\pi_m(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{z}_k(z_k - z)}{1 - \overline{z}_k z} \exp \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j+1} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \overline{z}_k z} \right)^{j+1}.$$

Произведение $\pi_\alpha(z, z_k)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \tag{2}$$

Последовательность $\{z_k\}_1^\infty$, удовлетворяющую условиям (2) и

$$\sup_{k \geqslant 1} \{p_k\} < +\infty,$$

$$|\pi_{\alpha,k}(z_k, z_j)| \geqslant \exp \frac{-M}{(1 - |z_k|)^{\alpha+2}},$$

где $M > 0$, отнесем к классу Δ.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ находится в конечном числе углов Штольца. Если $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, то для любой последовательности $\{w_k\}_1^\infty$ такой, что*

$$\ln^+ |w_k| = O\left((1 - |z_k|)^{-(\alpha+2)} \right),\ k \to +\infty, \tag{3}$$

можно построить функцию $f \in N_\alpha$, являющуюся решением задачи (1) при всех $s_k \geqslant 1$.

Обратно, если задача (1) с условием (3) разрешима, то $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$.

Замечание. Аналогичные результаты в классах типа Неванлинны были получены в работах [3-4].

Литература

1. Джрбашян М. М. О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге / М. М. Джрбашян // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157. — № 5. — С. 1024–1027.

2. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции / Р. Неванлинна — М.-Л.: ГИТТЛ, 1941. — 388 с.

3. Bednazh V. A. Multiple interpolation and principal parts of a Laurent series for meromorphic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic / V. A. Bednazh, E. G. Rodikova, F. A. Shamoyan // Complex Analysis and Operator Theory. — 2017. — V. 11. — Issue 1. — P. 197-215.

4. Rodikova E. G. Multiple interpolation in the Privalov classes in a disk. / E. G. Rodikova // Filomat. — 2021. — V. 35. —№1. — P. 271–286.

КОНЦИРКУЛЯРНО-РЕКУРРЕНТНЫЕ ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

А.Р. Рустанов (Москва, НИУ МГСУ)
aligadzhi@yandex.ru

Определение 1. [1] *Почти эрмитовой (короче, AH-) структурой на многообразии M называется пара (J,g), где J — почти комплексная структура на M, g — (псевдо) риманова метрика на M. При этом* $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. *Эндоморфизм J называется структурным эндоморфизмом. Многообразие, на котором фиксирована почти эрмитовая структура, называется почти эрмитовым (короче, AH-) многообразием.*

Определение 2. [1] *AH-структура на многообразии M называется приближенно (nearly) келеровой (короче, NK-) структурой, если на M выполняется тождество* $\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Лемма 1. *На NK-многообразии имеет место тождество* $B^{ag}_{bc}B_{dhg} = -B^{ag}_{dh}B_{bcg}$.

Основным конциркулярным инвариантом псевдориманова многообразия является тензор конциркулярной кривизны, вычисляемый по формуле [2]:

$$\mathcal{Z}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{\chi}{n(n-1)}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y),$$

где χ — скалярная кривизна, $n = \dim M$ — размерность многообразия.

Для NK-многообразия не более двух из основных концциркулярных инвариантов могут быть отличны от нуля, а именно, концициркулярные инварианты $\mathcal{Z}_1$ с компонентами $\left\{\mathcal{Z}_{\hat{a}bc\hat{d}}, \mathcal{Z}_{a\hat{b}\hat{c}d}\right\}$ и $\mathcal{Z}_2$ с компонентами $\left\{\mathcal{Z}_{\hat{a}\hat{b}cd}, \mathcal{Z}_{ab\hat{c}\hat{d}}\right\}$.

Предложение 1. *NK-многообразие концциркулярно-плоско тогда и только тогда, когда* $\mathcal{Z}_1 = 0$.

Предложение 2. *Концциркулярный инвариант* $\mathcal{Z}_2$ *NK-многообразия вычисляется по формуле* $\mathcal{Z}_2(X,Y)Z = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{Z}(X,Y)Z - \mathcal{Z}(JX,JY)Z\right\};\ X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$.

Определение 3. *NK-многообразие, для которого* $\mathcal{Z}_2 = 0$*, назовем NK-многообразием класса* $\mathcal{Z}_2$*, или концциркулярно-паракелеровым многообразием.*

Теорема 1. *Концциркулярно-паракелерово NK-многообразие нулевой скалярной кривизны изометрично комплексному евклидову пространству* $\boldsymbol{C}^n$*, снабженному стандартной эрмитовой метрикой. Класс концциркулярно-паракелеровых NK-многообразий ненулевого постоянного типа совпадает с классом шестимерных собственных NK-многообразий.*

Теорема 2. *Концциркулярно-паракелерово NK-многообразие* M *является римановым многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом его скалярная кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда* M *— келерово многообразие.*

Теорема 3. *Концциркулярно-плоское шестимерное NK-многообразие является пространством постоянной положительной кривизны* $c = \frac{\chi}{2n(2n-1)}$*, равной постоянной типа многообразия.*

Определение 4. *Риманово многообразие* M *называется концциркулярно-рекуррентным, если для его тензора концциркулярной кривизны* $\mathcal{Z}$ *выполнено соотношение* $\nabla\mathcal{Z} = r \otimes \mathcal{Z}$*, где* r *— ковариантный вектор на* M*. Случай* $r \neq 0$ *называется нетривиальным. В случае* $r = 0$*, т.е. если* $\nabla\mathcal{Z} = 0$*, многообразие называется концциркулярно симметричным.*

Теорема 4. *Концциркулярно-рекуррентное NK-многообразие является келеровым.*

Теорема 5. *Концциркулярно рекуррентное NK-многообразие либо концциркулярно-симметрично, либо локально изоморфно произведению комплексного евклидова пространства* $\boldsymbol{C}^n$ *и двумерного келерова многообразия. В случае односвязности многообразия, указанные изометрии являются глобальными.*

Литература

1. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В.Ф. Кириченко. — Одесса : Печатный дом, 2013. — 458 с.

2. Yano K. Concircular geometry, I–IV / K. Yano // Proceedings of the Imperial Academy. — 1940. — Vol. 16. — P. 195–200, 354–360, 442–448, 505–511.

ДИСКРИМИНАНТНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ИНТЕГРИРУЕМОГО СЕМЕЙСТВА КОВАЛЕВСКОЙ-ГОРЯЧЕВА-ЧАПЛЫГИНА-ЯХЬИ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА[1]

П.Е. Рябов (Москва, Финансовый университет,
МФТИ, РТУ МИРЭА)
peryabov@fa.ru, ryabov.pe@mipt.ru, ryabov_p@mirea.ru

В работе рассматривается интегрируемый случай Ковалевской-Горячева-Чаплыгина-Яхьи в динамике твердого тела с нулевой постоянной площадей. Данная система представляет собой вполне интегрируемую по Лиувиллю гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Гамильтониан системы имеет вид

$$\begin{aligned} H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 - \\ -b_1b_2\alpha_1\alpha_2 - \tfrac{1}{4}(b_1^2 - b_2^2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + c\tfrac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2}. \end{aligned}$$

Здесь $\boldsymbol{p} = \{a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda, c\}$ – вектор параметров, $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ – фазовые переменные. Функция

$$\begin{aligned} F = &\left[M_1^2 - M_2^2 - a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 - \frac{1}{4}(b_1^2 - b_2^2)\alpha_3^2 - c\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2}\right]^2 + \\ &+ \left[2M_1M_2 - a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 - \frac{1}{2}b_1b_2\alpha_3^2 - 2c\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3^2}\right]^2 - \\ &-4\lambda(M_3 + \lambda)\left[M_1^2 + M_2^2 + c\left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\alpha_3^2}\right)\right] \\ &+\lambda\alpha_3\left\{\left[4a_1 - 2b_1b_2\alpha_2 - (b_1^2 - b_2^2)\alpha_1\right] + \right. \\ &\left. + M_2\left[4a_2 - 2b_1b_2\alpha_1 + (b_1^2 - b_2^2)\alpha_2\right]\right\} \end{aligned}$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-21-00086) в Московском физико-техническом институте (национальном исследовательском университете).

является дополнительным интегралом на симплектическом листе, определяемого условиями: $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \boldsymbol{\alpha}^2 = 1$ ([1], [2]). Кроме того, в работе [2] была рассмотрена задача построения переменных разделения для произвольных значений параметров вектора $\boldsymbol{p}$.

Спектральная кривая $\mathcal{E}(z, \zeta)$, коэффициентами которой являются функции H, F и $\boldsymbol{\alpha}^2$, имеет следующий явный вид [2]:

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(z, \zeta) = \zeta^2 + d_1\zeta + d_0,\\
&d_1 = z^6 - 2(h+\lambda^2)z^4 +\\
&+ \left[f + 2(c+\lambda^2)(h+\lambda^2) - \tfrac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)\boldsymbol{\alpha}^2 - (c-\lambda^2)^2\right] z^2 +\\
&+\tfrac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)(c-\lambda^2)\boldsymbol{\alpha}^2,\\
&d_0 = \tfrac{1}{16}[(a_1-b_1z)^2 + (a_2-b_2z)^2][(a_1+b_1z)^2 + (a_2+b_2z)^2]\times\\
&\times[(z-\lambda)^2 - c][(z+\lambda)^2 - c]\boldsymbol{\alpha}^4.
\end{aligned}$$

Кривую (1) можно рассматривать как нулевой уровень отображения $\mathcal{E} : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Дискриминантная поверхность $\widetilde{\Sigma}$ определяется как множество таких значений интегральных постоянных f, h и параметров вектора $\boldsymbol{p}$, для которых система уравнений

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{E}(z, \zeta) = 0.$$

имеет решение в $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, то есть когда 0 является критическим значением отображения $\mathcal{E}$.

В настоящей работе впервые получена явная параметризация дискриминантной поверхности $\widetilde{\Sigma}$. В частном случае, когда $c = 0$, эта поверхность распадается на три компоненты: параметрические поверхности $\Gamma_{1,2}$ и $\Gamma_3 : f = a_1^2 + a_2^2$. Поверхности Γ_i $(i = 1, 2)$ задаются формулами:

$$\begin{aligned}
f(t) &= (t-\lambda^2)^2 \pm \frac{\left[(a_1^2+a_2^2)^2 - [(a_1b_1+a_2b_2)^2 - (a_1b_2-a_2b_1)^2]t\right](t-\lambda^2)^2}{2t^2\sqrt{4(a_1b_2-a_2b_1)^2t + [a_1^2+a_2^2-(b_1^2+b_2^2)t]^2}} +\\
&+ \frac{(a_1^2+a_2^2)[(t+\lambda^2)^2 - 2\lambda^4]}{2t^2},\\
h(t) &= t - \lambda^2 + \frac{(a_1^2+a_2^2)\lambda^2}{4t^2} \mp\\
&\mp \frac{(b_1^2+b_2^2)^2t^3 + (a_1^2+a_2^2)^2\lambda^2 - [(a_1b_1+a_2b_2)^2 - (a_1b_2-a_2b_1)^2]t(t+\lambda^2)}{4t^2\sqrt{4(a_1b_2-a_2b_1)^2t + [a_1^2+a_2^2-(b_1^2+b_2^2)t]^2}},
\end{aligned}$$

где верхние знаки соответствуют Γ_1, а нижние — Γ_2.

В общем случае, когда $c \neq 0$, дискриминантная поверхность $\widetilde{\Sigma}$ представляет собой объединение двух поверхностей $\widetilde{\Gamma}_i$ $(i = 1, 2)$. Введём обозначения:

$$A = a_1^2 + a_2^2, \quad B = b_1^2 + b_2^2, \quad C = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

$$R_1 = \sqrt{4(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 t + (A - Bt)^2},$$

$$R_2 = \sqrt{(c-t)^2 - 2(c+t)\lambda^2 + \lambda^4},$$

$$M = \lambda^2 (c + t - \lambda^2)^2 + (c - t) R_2^2, \quad N = (c - \lambda^2)^2 - t(c + \lambda^2),$$

$$F_f = \frac{4ct^2[B^2 t - 4a_1 a_2 b_1 b_2 - (a_1^2 - a_2^2)(b_1^2 - b_2^2)]\lambda^2 + (A^2 - Ct)M}{2t^2 R_1 R_2},$$

$$F_h = \frac{B^2 t^3 (c - t + \lambda^2) + A^2 N - Ct[(c-\lambda^2)^2 - t^2]}{4t^2 R_1 R_2}.$$

Тогда параметризация поверхностей $\widetilde{\Gamma}_{1,2}$ принимает вид:

$$\widetilde{\Gamma}_{1,2} : \begin{cases} f(t) = R_2^2 + \dfrac{A[(c-t)^2 + 2t\lambda^2 - \lambda^4]}{2t^2} \pm F_f, \\ h(t) = t - \lambda^2 - \dfrac{A(c - \lambda^2)}{4t^2} \mp F_h, \end{cases}$$

где верхние знаки соответствуют $\widetilde{\Gamma}_1$, а нижние — $\widetilde{\Gamma}_2$.

Дискриминантная поверхность $\widetilde{\Sigma}$ может быть положена в основу исследования фазовой топологии всего интегрируемого семейства Ковалевской-Горячева-Чаплыгина-Яхьи, в частности, анализа бифуркаций торов Лиувилля в компактном случае и цилиндров – в некомпактном.

Литература

1. Yehia H.M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration: I. The case of axisymmetric forces // Mech. Res. Commun. — 1996. — T. 23, № 5. — C. 423–427.

2. Tsiganov A.V. On the Kowalevski-Goryachev-Chaplygin gyrostat // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2002. — T. 35, № 22. — C. L309–L318.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИМПУЛЬСНОЙ ТЕРМОКОНВЕКТИВНОЙ МИГРАЦИИ ПОТОКА В РЕЖИМЕ ИДЕАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В.И. Ряжских, О.В. Куликова, А.В. Ряжских
(Воронеж, ВГТУ)
ryazhskih_vi@mail.ru

В соответствии с гипотезой о взаимопроникающих континуумах при описании явлений переноса в изотропных пористых средах [1] синтезирована математическая модель ламинарного просачивания в гидродинамическом режиме идеального вытеснения, причем поток имеет более высокую температуру по сравнению с пористой матрицей при выполнении локального терморавновесия фаз:

$$\partial T\left(X,\theta\right)/\partial\theta+\partial T\left(X,\theta\right)/\partial X=\partial^2 T\left(X,\theta\right)\big/\partial X^2; \tag{1}$$

с начальным и граничными условиями

$$T\left(X,\theta\right)=0, T\left(0,\theta\right)=1\left(\theta\right)-1\left(\theta-\theta_0\right), \partial T\left(\infty,\theta\right)/\partial X=0, \tag{2}$$

где θ_0 - относительное время длительности импульса; $1\left(\theta\right)$ - функция Хэвисайда

К системе (1), (2) применено интегральное преобразование Лапласа [2] по переменной θ:

$$d^2 T_L\left(X,s\right)\big/dX^2-dT_L\left(X,s\right)/dX-sT_L\left(X,s\right)=0; \tag{3}$$

$$T_L\left(X,s\right)=s^{-1}, dT_L\left(0,s\right)/dX=0, \tag{4}$$

где s, T_L - изображения θ_0 и T.

Из (3) и (4) следует

$$T_L\left(X,s\right)=s^{-1}\left[1-\exp\left(-\theta_0 s\right)\right]\exp\left(-X\sqrt{s+1/4}\right)\exp\left(X/2\right). \tag{5}$$

Оригинал изображения (5) с учетом операции свертки оригиналов принимает вид

$$T\left(X,\theta\right)=\frac{X}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{X}{2}\right)\int_0^\theta \exp\left(-\frac{\xi}{4}-\frac{X^2}{4\xi}\right)\xi^{-3/2}d\xi-$$

$$\left.-\int_0^\theta 1\left(\theta-\eta-\theta_0\right)\eta^{-3/2}\exp\left(-\frac{\eta}{4}-\frac{X^2}{4\eta}\right)d\eta\right]$$

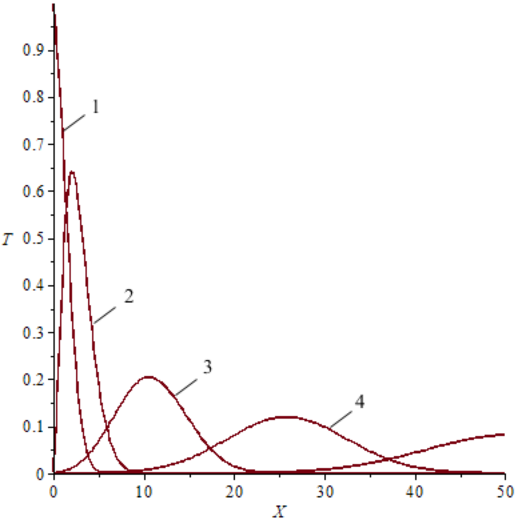


Рис. 1: Безразмерные профили температур в пористом слое по глубине при различных значениях θ (θ_0): 1 - 2,5; 2 - 10; 3 - 25; 4 - 50

Результаты расчета по (см.рис.1) показывают динамику трансформации температуры по глубине пористого слоя с нивелированием теплового возмущения.

Литература

1. Bear J. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media / J. Bear., Y. Bachmat. — D. : Kluwer, 1991. — 553 p.

2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. / Г. Деч. — М. : Наука, 1971. — 289 с.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

К.Б. Сабитов (Уфа, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН; Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий)
sabitov_fmf@mail.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = u_{xxtt} - Cu = f(x,t), \tag{1}$$

в области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < l, \quad 0 < t < T\}$, где $l > 0$, $T > 0$ и C – заданные действительные числа. Прямые $x = \mathrm{const}$ и $y = \mathrm{const}$ являются двукратными характеристиками уравнения (1).

Задача 1 (Первая начально-граничная задача). *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u, u_{tt}, u_{xtt} \in C(\overline{D}), \ \ u_{xxtt} \in C(D), \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t), \quad (x,t) \in D; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \ \ u_t(x,0) = \nu(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{5}$$

где $f(x,t)$, $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом

$$\tau(0) = \tau(l) = 0, \ \ \nu(0) = \nu(l) = 0.$$

Задача 2 (Вторая начально-граничная задача). *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям* (2), (3), (5) *и*

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \ \ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

при этом

$$\tau'(0) = \tau'(l) = \nu'(0) = \nu(l) = 0.$$

Задача 3 (Третья начально-граничная задача). *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям* (2), (3), (5) *и*

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \ \ u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0, \ \ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где h_1, h_2 – заданные неотрицательные постоянные, при этом

$$\tau'(0) - h_1\tau(0) = 0, \ \ \tau'(l) + h_2\tau(l) = 0,$$

$$\nu'(0) - h_1\nu(0) = 0, \ \ \nu'(l) + h_2\nu(l) = 0.$$

Отметим, что задачи 1 и 3 изучены в монографии [1, с. 87 – 90] для общего гиперболического уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами. Исходя из общего решения такого уравнения поставленные задачи при определенных условиях на коэффициенты, правую часть, граничные и начальные условия сведены к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Задачи 1 и 2 изучены в работе [2] для уравнения

$$u_{xxtt} - u_{tt} + u_{xx} = 0,$$

где решения задач построены в виде суммы ортогональных рядов. Приведены теоремы существования решений этих задач с указанием достаточных условий относительно начальных функций без соответствующих обоснований.

Следует отметить, что краевые задачи для дифференциальных уравнений четвертого порядка изучены мало по сравнению с уравнениями второго порядка.

В данной статье, следуя книгам [3, гл. 2], [4, §9, 10], решения задач 1 – 3 построены в виде суммы рядов и доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости при всех значениях коэффициента C.

Литература

1. Джураев Т.Д. К теории диффернциальных уравнений в частных производных четвертого порядка / Т.Д. Джураев, А.С. Сопуев. Ташкент: Фан. — 2000. — 144с.

2. Габов С.А. Об уравнениях $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задач / С.А. Габов, Б.Б. Оразов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1986. — Т.26. — №1. — С. 92 - 102.

3. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа / К.Б. Сабитов. М.: Наука. — 2016. — 272с.

4. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики /К.Б. Сабитов. М.: Лаборатория знаний. — 2024. — 569с. (изд.3)

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А.М. Савчук, С.А. Северцов
(Москва, МГУ им.М.В.Ломоносова)
artem_savchuk@mail.ru, stanislav.severtcov@math.msu.ru

История изучения дифференциально-разностных уравнений восходит к работам Бернулли. Основы современной теории этих уравнений были заложены А.Д.Мышкисом, С.Б.Норкиным, Л.Э.Эльсгольцем и другими. Однако во всех работах потенциал был гладким. В работах С.И. Митрохина потенциал предполагался уже лишь суммируемой функцией.

Цель настоящей доклада — дать корректное определение оператора $-y'' + q(x)y(x-b)$ для потенциалов $q \in W_2^{-1}$ и изучить базовые свойства таких операторов.

Определение 1. С дифференциальным выражением $\ell(y) = -(y^{[1]}(x))' - u(x)y^{[1]}(x-b) - u(x)u(x-b)y(x-2b)$, где $y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x-b)$ свяжем максимальный оператор $L_{u,M}$ с областью определения

$$D(L_{u,M}) = \Big\{y(x) \in AC[0,\pi] : \ y^{[1]}(x) \in AC[0,\pi], \ \ell(y) \in L_2[0,\pi]\Big\}$$

и минимальный оператор $L_{u,m}$ с областью

$$D(L_{u,m}) = \{y \in D(L_{u,M}) : \ y(0) = y^{[1]}(0) = y(\pi) = y^{[1]}(\pi) = 0\}.$$

Теорема 1. *Пусть $u(x) \in L_2[0,\pi]$. Для любого $\lambda \in C$ и произвольной функции $f \in L_1[0,\pi]$ уравнение $\ell(y) = \lambda^2 y + f$ с начальными условиями $y(0) = \alpha$, $y^{[1]}(0) = \beta$ имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций: $y(x)$, $y^{[1]}(x) \in AC[0,\pi]$. Это решение непрерывно зависит в метрике пространства $AC[0,\pi] \times AC[0,\pi]$ от параметра λ, от чисел α и β и от функции f (в смысле $\|f\|_{L_1}$).*

Теорема 2. *Операторы $L_{u,M}$ и $L_{u,m}$ плотно определены и замкнуты в пространстве $L_2[0,\pi]$. Операторы $L_{u,m} - \lambda$ и $L_{u,M} - \lambda$ при любом $\lambda \in C$ являются фредгольмовыми с индексами (размерность ядра и коразмерность образа)* $(0,2)$ *и* $(2,0)$ *соответственно,*

то есть непустое резольвентное множество будут иметь операторы, полученные двумерным расширением $L_{u,m}$ (или, что то же самое, двумерным сужением $L_{u,M}$).

Определение 2. Регулярным оператором Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом и запаздыванием в аргументе назовем оператор $L = L_{u,U}$, порожденный дифференциальным выражением $\ell(y) = -y'' + q(x)y(x-b)$, $\int q \in L_2[0,\pi]$, на области $D(L_{u,U}) = \{y \in D(L_{u,M}) : U(y) = 0\}$ с регулярными по Биркгофу краевыми условиями U.

Теорема 3. *Любой регулярный оператор L имеет непустое резольвентное множество, спектр его дискретен, а резольвента (в точках резольвентного множества) компактна в $L_2[0,\pi]$.*

Теорема 4. *Пусть число b и регулярные краевые условия U фиксированы. Пусть последовательность L_2 функций u_n сходится по норме L_2 к функции u. Обозначим $L = L_{u,U}$, а $L_n = L_{u_n,U}$. Пусть точка λ лежит в резольвентном множестве оператора L. Тогда, начиная с некоторого номера N, λ попадет в резольвентные множества всех операторов L_n. Кроме того, $(L_n - \lambda I)^{-1} \to (L - \lambda I)^{-1}$ в смысле сильной операторной сходимости в $L_2[0,\pi]$.*

Теорема 5. *Для всякого оператора L найдется такое число $a > 0$, что все точки с $|Im\lambda| > a$ относятся к резольвентному множеству (напомним, что спектральный параметр мы обозначили λ^2, т.е. обратимым является оператор $L - \lambda^2 I$). При этом, норма резольвенты допускает оценки:*

$$\|R(\lambda^2)\|_{L_2} \leqslant \frac{C}{|\lambda|^2}, \quad \|R(\lambda^2)\|_{L_2\to W_2^1} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}, \quad \|R(\lambda^2)\|_{W_2^{-1}\to L_2} \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

Таким образом, спектр оператора L лежит внутри некоторой параболы вдоль вещественной оси.

Литература

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом /А.Д. Мышкис. — М. : Наука, 1972. — 352 с.

2. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / С.Б. Норкин. — М. : Наука, 1965. — 354 с.

3. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1964. — 127 с.

4. Савчук А. М., Садовничая И. В. Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентами - распределениями / Савчук А. М., Садовничая И. В.. — М. ООО «МАКС Пресс», 2022. — 332 с.

5. Митрохин С. И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом /С.И. Митрохин // Уфимск. матем. журн. — 2011. —Т. 3, № 4. — С. 95–115

6. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами /Савчук А. М., Шкаликов А. А.// Матем. заметки. — 1999. — Т. 66. № 6. — С. 741–753.

ОЦЕНКИ ДЛЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ ЯДЕР ДИРИХЛЕ И УЛУЧШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ФЕЙЕРА-ТУРАНА

С.Ю. Садов (Москва)

serge.sadov@gmail.com

Напомним, что n-е ядро Дирихле — это функция с периодом 2π

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Рассмотрим пилообразную 2π-периодическую функцию, заданную на основном периоде формулой

$$S(x) = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 \leqslant x < 2\pi.$$

Частичные суммы ее ряда Фурье суть

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{2}\int_0^x (D_n(y) - 1)\, dy.$$

Равномерная по nx асимптотика $S_n(x) - S(x) \sim \mathrm{si}\,((n+1/2)x)$ при $n \to \infty$ объясняет явление Гиббса в теории рядов Фурье [1].

Л. Фейер в 1910 г. заметил неравенство $S_n(x) \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; первые доказательства опубликовали Джексон и Гронуолл, см. [2]. С этого неравенства началась теория положительных тригонометрических и алгебраических многочленов, см., напр. [3], Ch. XXI.

Туран [4] дополнил оценку Фейера симметричной верхней:

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant S(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{T}$$

Неоднократно предлагались уточнения, в основном — с фокусом на нижние оценки в контексте исследований положительности.

Фейер [5] улучшил свое исходное неравенство при $\frac{\pi}{n} < x < \pi - \frac{\pi}{n}$:

$$S_n \geqslant \frac{\sin x}{2n} + \frac{\sin nx}{3}, \quad n \geqslant 3. \tag{F}$$

Десятилетия спустя, Алцер и Кумандос [6] нашли неравенство

$$S_n \geqslant x^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2} \right). \tag{AK}$$

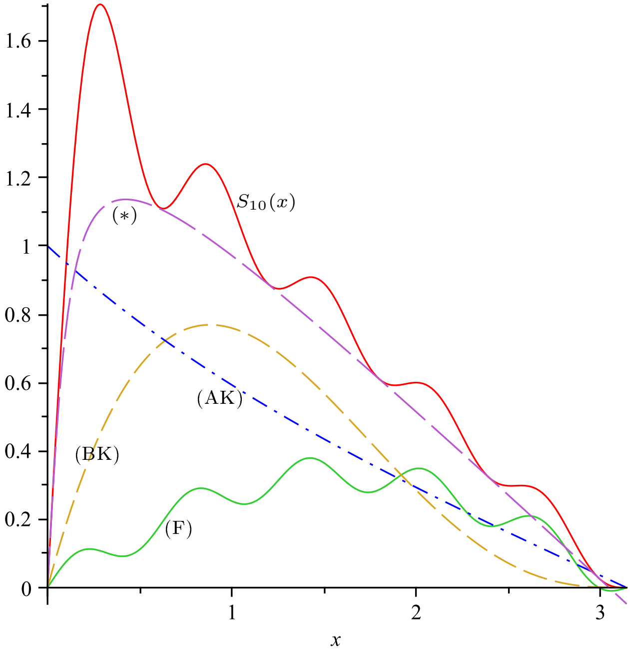


Рис. 1:Функция $S_{10}(x)$ и ее нижние оценки

Браун и Кумандос [7] доказали, что вне $O(1/n)$-окрестностей концов интервала $(0, \pi)$ (выписаны конкретные границы) выполнено

$$S_n(x) > \sec \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \tag{BK}$$

Наш результат [8] дает тесную огибающую функции $S_n(x)$:

Теорема 1. *При* $0 \leqslant x \leqslant \pi$ *справедливо неравенство*

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \operatorname{arcctg}\left((2n+1)\sin\frac{x}{2}\right). \qquad (*)$$

Графическое сравнение оценок (F), (AK), (BK) и нижней оценки из $(*)$ представлено на рис. 1.

Найдены и другие оценки, описывающие тесные огибающие осциллирующих функций сходной природы. Примером является

Теорема 2. *При любых вещественных* t, φ *и* $0 < x < \pi/2$ *справедливо неравенство*

$$\left| t \int_0^x \frac{\cos(ty - \varphi)}{\cos y}\, dy - \sin\varphi \right| < \frac{1}{\cos x}.$$

Литература

1. Fikioris G. Asymptotic approximations elucidating the Gibbs phenomenon and Fejér averaging / G. Fikioris, P. Andrianesis // Asymptotic Analysis 2017. V. 102. —P. 1–19.

2. Milovanović G.V. Topics in Polynomials / G.V. Milovanović, D.S. Mitrinovic, Th.M. Rassias.— World Scientific, 1994. — P. 302.

3. Mitrinović D.S. Classical and New Inequalities in Analysis / D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink.— Springer, Dordrecht, 1993.

4. Turán P. On a trigonometrical sum / P. Turán // Ann. Soc. Polon. Math. —1952. —V. 25. —P. 155–161.

5. Fejér L. Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen / L. Fejér // Monatsch. Math. Physik. —1928. —Bd. 35. —S. 305–344.

6. Alzer H., Inequalities of Fejér-Jackson type / H. Alzer, S. Koumandos // Monatsh. Math. —2003. —V. 139. —P. 89–103.

7. Brown G. A new bound for the Fejér-Jackson sum / G. Brown, S. Koumandos // Acta Math. Hungar. —1998. —V. 80. —P. 21–30.

8. Sadov S. Around the Fejér-Jackson inequality: Tight bounds for certain oscillatory functions via Laplace transform representations / S. Sadov //arXiv:2512.23001.

ЕЩЕ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СЕГЕ И ФЕКЕТЕ

Г.Д. Садритдинова (Томск, НИ ТГУ)
dolina725@gmail.com

На классе S голоморфных однолистных в единичом круге E функций $f : E \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \ldots + c_nz^n + \ldots$$

рассматривается функционал $J = c_3 - \gamma c_2^2$, $\gamma \in \mathbb{C}$. Задача о нахождении множества D значений этого функционала называется задачей Фекете и Сеге. Задача решена для некоторых зачений γ, но не решена для $\forall\gamma \in \mathbb{C}$.

Так как известно, что множество значений функционала J — замкнутый круг с центром в начале координат, то достаточно найти множество значений его вещественной части

$$\mathrm{Re}J = \mathrm{Re}c_3 - \gamma_1(\mathrm{Re}c_2)^2 + \gamma_1(\mathrm{Im}c_2)^2 + 2\gamma_2\mathrm{Re}c_2\mathrm{Im}c_2,$$

где $\gamma_1 = \mathrm{Re}\gamma$, $\gamma_2 = \mathrm{Im}\gamma$. Возникает задача нахождения множества значений другого функционала $I = S \to \mathbb{R}^3$,

$$I(f) = (\mathrm{Re}c_2, \mathrm{Im}c_2, \mathrm{Re}c_3).$$

Вариационный метод дает следующее уравнение на граничную функцию функционала I:

$$f'^2(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^4(1 + qf(z)) = 1 + qz + bz^2 + \bar{q}z^3 + z^4, \qquad (1)$$

где

$$q = \beta_1 - i\beta_2 + 2c_2, b = \beta_1\mathrm{Re}c_2 + \beta_2\mathrm{Im}c_2 + 2\mathrm{Re}c_3, \beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — направляющие косинусы вектора с началом в граничной точке множества D и с концом во внешней точке множества D.

Исследован случай, когда правая часть уравнения (1) имеет вид $(z - \zeta_1)^2(z - \zeta_2)^2$, $|\zeta_1| = 1$, $|\zeta_2| = 1$, $\zeta_1\zeta_2 = 1$. Получено, что

$$\mathrm{Im}c_2 = \frac{\beta_2}{2},$$

$\mathrm{Re}c_2$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\beta_2}{2}+\mathrm{Re}c_2\right)\ln\left|\frac{\beta_1}{4}+\frac{\mathrm{Re}c_2}{2}\right|=\frac{\beta_1}{2},$$

и

$$\mathrm{Re}c_3=\frac{(\mathrm{Re}c_2)^2}{2}+\frac{(\beta_1)^2}{2}-\frac{(\beta_2)^2}{4}+1.$$

При этом

$$\frac{\beta_1}{2}<\mathrm{Re}c_2<-2-\frac{\beta_1}{2}\text{ при }-2<\frac{\beta_1}{2}<-\sqrt{e};$$

$$-2<\mathrm{Re}c_2<\frac{\beta_1}{2}\text{ при }-\sqrt{e}<\frac{\beta_1}{2}<0;$$

$$\frac{\beta_1}{2}<\mathrm{Re}c_2<2\text{ при }0<\frac{\beta_1}{2}<\sqrt{e};$$

$$2-\frac{\beta_1}{2}<\mathrm{Re}c_2<\frac{\beta_1}{2}\text{ при }\sqrt{e}<\frac{\beta_1}{2}<2;$$

$$\mathrm{Re}c_2=\pm\sqrt{e}\text{ при }\frac{\beta_1}{2}=\pm\sqrt{e};$$

$$\mathrm{Re}c_2\approx\pm1,526\text{ при }\frac{\beta_1}{2}=\pm2;$$

$$\mathrm{Re}c_2=c\left(\ln\frac{c}{2}\pm1\right)\text{ при }\frac{\beta_1}{2}=\pm c\ln\frac{c}{2},\text{ где }0<c<2.$$

При $\frac{\beta_1}{2}<-2e$ и $2<\frac{\beta_1}{2}<2e$ реальная часть c_2 положительна, при $-2e<\frac{\beta_1}{2}<-2$, и $\frac{\beta_1}{2}>2e$ — отрицательна, $\mathrm{Re}c_2=0$ при $\frac{\beta_1}{2}=\pm2e$.

Литература

1. Борисова Я.В. Решение задачи Фекете и Сеге вариационным методом / Я.В. Борисова, И.А. Колесников, С.А. Копанев, Г.Д. Садритдинова // Дальневосточный математический журнал. — 2021. — Т. 21, № 2. — С. 133–150.

2. Pfluger A. The Fekete–Szeg"o inequality by a variational method / A. Pfluger // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.I. Math. — 1985. — № 10. — P. 447–454.

3. Schaeffer A.C. Coefficient regions of schlicht functions / A.C. Schaeffer, D.S. Spencer // Am. Math. Soc., Colloquium Publ. — 1950. — V. 35. — P. 208–225.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.В. Семенов (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики)
ksemen@mech.math.msu.su

В слое $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 < t \leqslant T\}$ ($T > 0$ фиксировано) рассматривается равномерно-параболическое уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - c(x,t)u = f(x,t), \quad (1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

(a) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\sigma_i\sigma_j \geqslant \delta|\sigma|^2$, для некоторого $\delta > 0$ и для всех $(x,t) \in \bar{D}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$;

(b) a_{ij}, b_i $(i,j = 1,\ldots,n)$ и c непрерывны, ограничены в $\bar{D}$ и выполненяются неравенства

$$|\Delta_x a_{ij}(x,t)|, |\Delta_x b_i(x,t)|, |\Delta_x c(x,t)| \leqslant \omega(|\Delta x|), (x,t), (x+\Delta x, t) \in \bar{D},$$

где ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий *условию Дини*: $\int\limits_0^z y^{-1}\omega(y)dy < +\infty,\ z > 0$.

Множество модулей непрерывности, удовлетворяющих условию Дини, обозначим $\mathcal{D}_1$.

Множество модулей непрерывности, удовлетворяющих *двойному условию Дини* $\int\limits_0^z y^{-1}dy \int\limits_0^y \omega(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty$, $z > 0$, обозначим $\mathcal{D}_2$.

Известно (см. [1]), что если $\omega \in \mathcal{D}_2$, то для уравнения (1) существует классическое решение, представимое в виде суммы двух потенциалов (потенциала Пуассона и объёмного потенциала). С другой стороны, в [2] доказано, что если $\omega \notin \mathcal{D}_1$, то уравнение $Lu = 0$ может не иметь классического решения, представимого в виде потенциала Пуассона.

Мы показываем, что условие $\omega \in \mathcal{D}_1$ является достаточным для существования классического решения задачи Коши в виде суммы двух потенциалов.

Через $C^2(\mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство функций $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до второго порядка включительно, с нормой

$$\|h;\mathbb{R}^n\|^2 = \sum_{|k|=0}^{2} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial^{|k|}h}{\partial x^k}(x)\right|.$$

Здесь и далее $k = (k_1, \ldots, k_n), k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, — мультииндекс, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$.

Рассмотрим задачу Коши: найти ограниченную функцию u, являющуюся классическим решением уравнения (1) и удовлетворяющую начальному условию

$$u(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Через $\widehat{C}^{2,1}(\bar{D})$ обозначаем пространство функций u, непрерывных и ограниченных вместе со своими первыми по x_i, t и вторыми производными по x_i, x_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ в $\bar{D}$, с нормой:

$$\|u;D\|^{(2)} = \sum_{|k|=0}^{2} \sup_{(x,t)\in D} \left|\frac{\partial^{|k|}u}{\partial x^k}(x,t)\right| + \sup_{(x,t)\in D} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| +$$

$$+ \sup_{\substack{(x,t),\\ (x,t+\Delta t)\in D\\ \Delta t \neq 0,\, l=1,\ldots,n}} \frac{1}{|\Delta t|^{1/2}} \cdot \left|\Delta_t \frac{\partial u}{\partial x_l}(x,t)\right|.$$

Пространство $\widehat{C}^{2,1}(\bar{D})$ совпадает с пространством $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{D})$ при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$, при этом нормы в этих пространства эквивалентны.

Рассмотрим потенциал Пуассона $Ph(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t;\xi,0)h(\xi)d\xi$ и объемный потенциал $Vf(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi$, $(x,t) \in \bar{D}$, где Γ — фундаментальное решение для уравнения $Lu = 0$, построенное в [3].

Не ограничивая общности, положим $\omega_1 \not\equiv 0$ — некоторый модуль непрерывности. Через $H^{\omega_1}(\bar{D})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных в $\bar{D}$ функций, для которых конечна величина

$$\|f;\,D\|^{\omega_1}=\sup_{(x,t)\in D}|f(x,t)|+\sup_{\substack{(x,t),(x+\Delta x,t)\in D\\ \Delta x\neq 0}}\frac{|f(x+\Delta x,t)-f(x,t)|}{\omega_1(|\Delta x|)}.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия* **(a)**, **(b)** *для коэффициентов оператора* L. *Тогда для любой* $f\in H^{\omega_1}(\bar{D})$, *где* $\omega_1\in\mathcal{D}_1$, *и для любой* $h\in C^2(\mathbb{R}^n)$ *сумма потенциалов* $u(x,t)=Ph(x,t)+Vf(x,t)$ *является решением задачи (1), (2). Это решение принадлежит пространству* $\widehat{C}^{2,1}(\bar{D})$, *и справедлива оценка:*

$$\|u;D\|^{(2)}\leqslant C\Big(\|h;\mathbb{R}^n\|^2+\|f;D\|^{\omega_1}\Big).$$

В случае $\omega\in\mathcal{D}_2$ и $n=1$ утверждение теоремы следует из работы [4].

Литература

1. Черепова М.Ф. О гладкости решения задачи Коши для параболического уравнения с Дини-непрерывными коэффициентами / М.Ф. Черепова, И.В.Женякова // Дифференц. уравнения. — 2025. — Т. 61, № 10. — С. 1326—1339.

2. Ильин А.М. О фундаментальном решении параболического уравнения / А.М. Ильин // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 147, № 4. — С. 768—771.

3. Baderko E.A. Regular fundamental solution to parabolic equation with Dini continuous coefficients in many spatial variables / E.A. Baderko, K.V. Semenov // J. of Math. Sci. — 2023. — T. 274, № 4. — C. 441—459.

4. Бадерко Е.А. О гладкости потенциала Пуассона для параболических систем второго порядка на плоскости / Е.А. Бадерко, К.Д. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1606—1618.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ВЕКОВОЙ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

В.В. Сидоренко (Москва, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН)
vvsidorenko@list.ru

Задачей трех тел называют задачу о движении в соответствии с законами Ньютона трех точечных масс, испытывающих взаимное гравитационное притяжение. Исследование вековой эволюции движения в задаче трех тел состоит в изучении изменения параметров движения тел на временных интервалах, существенно превышающих характерную величину периодов орбитального движения. Подобные исследования важны для понимания долговременной динамики планет и малых тел как в Солнечной системе, так и в планетных системах в окрестности других звезд. Достаточно часто при исследовании вековой эволюции рассматривается «усредненная задача трех тел», возникающая после усреднения уравнений слабовозмущенной кеплеровской динамики по орбитальным движениям. В докладе будет предпринята попытка дать обзор известных случаев полной или частной интегрируемости усредненной задачи трех тел, обнаруженных Х.Цейпелем, М.Л.Лидовым, Й.Козаи и другими специалистами. Также предполагается обсудить обоснование данной модели вековой эволюции с помощью КАМ-теории и интерпретацию обнаруженных случаев интегрируемости в рамках теории интегрируемых гамильтоновых систем.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА[1]

А.Л. Скубачевский, Р.А. Байраш (Москва, РУДН)
alskubachevskii@yandex.ru

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $2m$ на интервале $(0, 1)$ со спектральным параметром и «чисто интегральными условиями», т.е. условиями, содержащими лишь интегралы Лебега от неизвестной функции и ее производных с некоторыми весами. Впервые такие задачи рассматривались А. Зоммерфельдом в 1908г. в связи с проблемой турбулентности. Основная

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-11-00073, https://rscf.ru/project/24-11-00073/).

трудность в исследовании этих задач заключается в том, что область определения соответствующего дифференциального оператора не является плотной в $L_2(0,1)$. Вопрос о разрешимости и спектральных свойствах указанных задач был сформулирован в 1975г. известным американским математиком А.М. Кролом как нерешенная проблема, см. [1]. При некоторых условиях на весовые функции, стоящие в интегральных условиях, получена априорная оценка решений в соболевских нормах, зависящих от спектрального параметра. Следствием этого результата является дискретность спектра дифференциального оператора и его секториальная структура, см. [2]. Показано, что при нарушении упомянутых условий на весовые функции спектр занимает всю комплексную плоскость.

Литература

1. Krall A.M. The development of general differential and general boundary systems / A.M. Krall // Rocky Mountian J.Math. — 1975. — V.5. —P.493–542.

2. Байраш Р.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения четного порядка с интегральными условиями / Р.А. Байраш, А.Л. Скубачевский // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. — 2025. —Т.522. —С. 7–10.

О ПРИМЕНЕНИИ ПОЛИНОМОВ КРЫЛОВА-ШТАЕРМАНА К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Ю.С. Солиев (Москва, МТУСИ)
su1951@mail.ru

Рассмотрим понимаемый в смысле главного значения по Коши сингулярный интеграл

$$If = I(f;x) = \int_{-1}^{1} p(t)\frac{f(t)}{t-x}dt, \quad -1 < x < 1, \tag{1}$$

где $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, а $f(x)$ — заданная плотность интеграла.

Через $K_{4n-1}f = K_{4n-1}(f;x)$ обозначим полином Крылова - Штаермана [1],[2] степени $4n-1$, удовлетворяющий условиям $K_{4n-1}(f;x_k)$

$= f(x_k)$, $K^{(j)}_{4n-1}(f;x_k) = 0$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,3}$, где x_k $(k = \overline{1,n})$ — нули полинома Якоби $\omega_n(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Тогда полином $K_{4n-1}f$ можно представить [2] в виде

$$K_{4n-1}f = K_{4n-1}(f;x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)(l_k(x))^4 f(x_k),$$

где

$$u_k(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_k^{(i)}(x-x_k)^i,\ \alpha_k^{(0)} = 1,\ \alpha_k^{(1)} = -4l'_k(x_k),$$

$$a_k^{(2)} = 10(l'_k(x_k))^2 - 2l''_k(x_k),$$

$$a_k^{(3)} = 10l'_k(x_k)l''_k(x_k) - 20(l'_k(x_k))^3 - \frac{2}{3}l'''_k(x_k),$$

а $l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_k)(x-x_k)}$ — фундаментальные полиномы интерполирования Лагранжа по узлам x_k $(k = \overline{1,n})$.

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $K_{4n-1}f$, получим квадратурную формулу

$$If = I(K_{4n-1}f;x) + R_nf = \sum_{k=1}^{n} B_k(x)f(x_k) + R_nf, \tag{2}$$

где

$$B_k(x) = I(u_k(x)(l_k(x))^4) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_k^{(i)} I((t-x_k)^i(l_k(t))^4) =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \frac{\alpha_k^{(i)}}{(\omega'_n(x_k))^4} I((t-x_k)^{i-4}\omega_n^4(t)).$$

Через c_m обозначим коэффициенты многочлена $(x-x_k)^{i-4}\omega_n^4(x)$ степени $p = 4n+i-4$ и воспользуемся разложением [3] степенной функции по полиномам Якоби. Тогда для вычисления коэффициентов квадратурной формулы (2) получим формулу

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\alpha_k^{(i)}}{(\omega'_n(x_k))^4} \sum_{m=0}^{p} c_m \sum_{n=0}^{m} a_n Q_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$a_n = \frac{2^n m! \mathit{\Gamma}(n+\alpha+\beta+1)}{(m-n)! \mathit{\Gamma}(2n+\alpha+\beta+1)} F(n-m,\ \alpha+n+1;\ 2n+\alpha+\beta+2;\ 2),$$

$\mathit{\Gamma}(\alpha)$ — гамма - функция, $F(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ — гипергеометрическая функция, $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — функция Якоби второго рода [4],[5]

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \int_{-1}^{1} p(t) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{t-x} dt = -\pi p(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \operatorname{ctg}(\pi\beta) + (-1)^n \times$$

$$\times\, 2^{\alpha+\beta} \frac{\mathit{\Gamma}(\beta)\mathit{\Gamma}(n+\alpha+1)}{\mathit{\Gamma}(n+\alpha+\beta+1)} F(n+1,\ -n-\alpha-\beta;\ 1-\beta;\ \frac{1+x}{2}),$$

$$\beta \neq 0;$$

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \pi p(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \operatorname{ctg}(\pi\alpha) -$$

$$-\, 2^{\alpha+\beta} \frac{\mathit{\Gamma}(\beta)\mathit{\Gamma}(n+\alpha+1)}{\mathit{\Gamma}(n+\alpha+\beta+1)} F(n+1,\ -n-\alpha-\beta;\ 1-\alpha;\ \frac{1-x}{2}),$$

$$\alpha \neq 0,\ |x| < 1.$$

Через $H_\mu(M;[-1;1])$ обозначим класс функций $f(x)$, определенных на $[-1,1]$ и удовлетворяющих условию Гельдера:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^\mu,\ x_1, x_2 \in [-1,1],\ 0 < \mu \leqslant 1.$$

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in H_\mu(M;[-1,1])$, $0 < \mu \leqslant 1$, $-\frac{3}{4} < \alpha$, $\beta < -\frac{1}{4}$. *Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива оценка*

$$\|R_n f\|_C = O\left(n^{(2\theta+0.5)\mu} \ln n\right),\ \theta = \max(\alpha, \beta, -0.5).$$

Полученные результаты переносятся для гиперсингулярного интеграла, понимаемого в смысле конечного значения по Адамару.

Литература

1. Крылов Н. М. Sur quelques formules d'interpolation convergentes pour route fonction continue / Н. М. Крылов, И. Я. Штаерман // *Записки физ. -матем. отд.* АН УССР. Т. 1. — 1922. С. 12-–13.

2. Knoop H.B. On Hermite-Fejer type interpolation / H.B. Knoop, B. Stockenberg // Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 28. — 1983. P. 39—51.

3. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк // М. — 1980 — 608 с.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований / Г. Бейтмен, А. Эрдейи // М. — 1970 — 328 с.

5. Андреев А.В. Прямой численный метод решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с обобщенными ядрами / А.В. Андреев // Изв. РАН. Мех. твердого тела. — 2005 — № 1 — С. 126–146.

КОЛЛОКАЦИОННО-ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ

Л.С. Соловарова (Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
soleilu@mail.ru

В докладе рассматривается решение обратной задачи кинематики [1], в которой необходимо определить параметры звеньев (углы поворота) для достижения заданного положения и ориентации рабочего органа манипулятора. Предлагается рассматривать данную задачу как дифференциально-алгебраическим уравнение с прямоугольной матрицей перед главной частью. Такая постановка учитывает сингулярные конфигурации и позволяет рассчитывать устойчивую траекторию движения конечного эффектора. Для ее численного решения используются коллокационно-вариационная разностная схема, построение которой основано на решение задачи математического программирования специального типа. Рассматриваемый алгоритм хорошо зарекомендовал себя при решение достаточно широкого класса дифференциально-алгебраических уравнений, включая содержащие жесткие компоненты и недоопределенные, когда число уравнений меньше числа неизвестных[2],[3]. Его реализация не требует псевдообращения матрицы Якоби и позволяет избежать недостатков такого подхода, таких как неустойчивое поведение манипулятора в сингулярных конфигурациях или близким к ним.

Литература

1. Aristidou A. Inverse Kinematics: a review of existing techniques and introduction of a new fast iterative solver / A. Aristidou, J. Lasenby // Technical Report. CUED/F-INFENG/TR-632. University of Cambridge. — 2009. — 74 p.

2. Булатов М.В. Заметка о недоопределенных дифференциально-алгебраических уравнениях / М.В. Булатов, Л.С. Соловарова // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2025. — Т. 4. —С. 31–39.

---

3. Bulatov M. Collocation-variation difference schemes with several collocation points for differential-algebraic equations / M. Bulatov, L. Solovarova // Applied Numerical Mathematics. — 2020. — Vol. 149. — P. 153–163.

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.В. Солонуха (Москва, ФИЦ ИУ РАН)
solonukha@yandex.ru

В работе исследуется существование обобщенных решений квазилинейных дифференциально–разностных уравнений эллиптического типа в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей. Для исследования применяются теория операторов монотонного типа (см., например, [1]) и теория линейных дифференциально–разностных уравнений (см. [2]). Изучаются краевые задачи для уравнений с сильно монотонными дифференциально–разностными операторами. Получены достаточные условия существования обобщенных решений рассматриваемых краевых задач. Ранее подобные задачи исследовались в [3].

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л.Лионс. — М. : Мир, 1972.

2. Skubachevskii A.L.Elliptic Functional Differential Equations and Applications / A.L.Skubachevskii. — Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

3. Солонуха О.В. Нелинейные дифференциально-разностные уравнения эллиптического и параболического типа и их приложения к нелокальным задачам / О. В. Солонуха// СМФН. — 2023. — Т. 69, вып. 3. — С. 445–563.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КВАЗИРЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ РЫБ

П.Г. Сорокина (г. Иркутск, ФГБОУ ВО «БГУ»)
Sorokinapg@bgu.ru

Рассматривается линейное дифференциально-разностное уравнение (ЛДРУ) запаздывающего типа второго порядка

$$\ddot{x}(t) + (p_0 + p_1 t)\dot{x}(t) = (a_0 + a_1 t)x(t-1) + f(t),$$
$$f(t) = \sum_{n=0}^{F} f_n t^n, \quad F \in \mathbb{N}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

При изучении ЛДРУ традиционно выделяют две основные начальные задачи. Первая из них — задача с начальной функцией, которая приводит к существованию единственного решения. Вторая — задача с данными в начальной точке, в которой единственности, вообще говоря, нет, что, в частности, позволяет рассматривать решения с заданными свойствами. Отметим, что в первом случае решение в точках, кратных запаздыванию, имеет разрывы производных [1], что в ряде случаев противоречит наблюдаемым реальным процессам, например, таким, как динамика численности популяции рыб. Характерной особенностью данного явления является как раз отсутствие разрывов производной, так как процессы миграции, размножения и естественной убыли протекают постепенно, определяя плавное изменение численности во времени. В связи с этим в работе внимание акцентируется на задаче с данными в начальной точке.

В качестве метода исследования применяется предложенный ранее автором метод полиномиальных квазирешений [2]. Данный метод предполагает представление неизвестной функции в виде полинома $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} x_n t^n$, при подстановки которого в исходное уравнение появляется невязка $\Delta(t) = f_{N-1} t^{N-1}$, характеризующая меру возмущения исходной задачи.

Предложенный математический аппарат применяется для моделирования динамики численности популяции рыб на примере байкальского омуля. Актуальность исследования в данном направлении

обусловлена тем, что омуль является ценной промысловой рыбой, которая с 2017 года находится под угрозой исчезновения [3].

Проведен численный эксперимент, в рамках которого рассмотрен пример, характеризующий постепенный процесс восстановления численности популяции после воздействия негативных факторов. Подобные процессы наблюдаются в естественной среде обитания байкальского омуля. Изложенный в работе подход в дальнейшем может быть применен для решения реальных задач, связанных с мониторингом популяции рыб.

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Приближённые методы интегрирования дифференциально-разностных уравнений / Л.Э. Эльсгольц // Успехи мат. наук. — 1953. —Т. 8, № 4. — С. 81–93.

2. Черепенников В.Б. Гладкие решения начальной задачи для некоторых дифференциально-разностных уравнений / В.Б. Черепенников, П.Г. Ермолаева // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 213–226.

3. Anoshko P.N. Hydroacoustic studies of the structure of the Baikal omul feeding stock in the Selenga shallows of Lake Baikal / P.N. Anoshko, E.V. Dzyuba, I.V. Khanaev, K.M. Kucher, I.A. Nebesnykh, M.M. Makarov // Limnology and Freshwater Biology. — 2024. —- № 5. — P. 1302–1317. DOI: 10.31951/2658-3518-2024-A-5-1302.

О СИЛЬНОМ ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

А.С. Спивак (Воронеж, ВГУ)
alexs1nger@yandex.ru

В докладе обсуждается сильный принцип максимума для субгармонических функций на стратифицированном множестве, где под стратифицированным множеством понимается связное подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, представляющее собой объединение конечного числа примыкающих друг к другу особым образом открытых многогранников с компактными замыканиями, которые называются стратами σ_{kj} (k — размерность страты, а j служит для нумерации страт размерности k). Считается, что множество Ω представимо в виде объединения $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$, в котором Ω_0 — открытое, связное подмножество Ω, составленное из страт, и такое, что $\overline{\Omega}_0 = \Omega$, а $\partial\Omega_0 = \Omega \backslash \Omega_0$.

Саму же субгармоническую функцию обозначим через $u(X)$ и определим как непрерывную на стратифицированном множестве функцию, удовлетворяющую следующему неравенству:

$$\int\limits_{S_R(X_0)} u(X)\,d\mu_R \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{R} \int\limits_{B_R^k(X_0)} u(X)\,d\mu.$$

Здесь R — достаточно малый радиус, $S_R(X_0)$ — стратифицированная сфера радиуса R, а $B_R^k(X_0)$ служит для обозначения k-мерных фрагментов стратифицированного шара радиуса R.

Подобное определение дает возможность доказать сильный принцип максимума, который утверждает отсутствие точек локального нетривиального максимума для субгармонических функций. При этом точка X_0 называется точкой локального нетривиального максимума функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(X) \leqslant f(X_0)$, и ни в какой окрестности этой точки функция f не является константой.

Литература

1. Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М. : Физматлит, 2005. — 272 с.

2. Ощепкова С.Н. Теорема о среднем и субгармонические функции на стратифицированном множестве / С.Н. Ощепкова, А.С. Спивак // Прикладная математика & Физика. — 2025. — Т. 57, № 4. — С. 266–271.

ОБ ОДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ТРАНСФОРМИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

А.В. Степанов (Санкт-Петербург, ВНИИМ им. Д.И. Менделеева)
stepanov17@yandex.ru

Метод Монте-Карло является широко применяемым в метрологических приложениях инструментом, в частности, он рекомендован для трансформирования распределений при оценке неопределённости измерений, когда измерительные модели описываются математическими зависимостями [1]. Существует достаточно широкий спектр программных приложений, решающих данную задачу.

Одной из ключевых особенностей предлагаемой реализации является возможность подбора распределений входных величин из некоторых типовых семейств непрерывных распределений (таких, как Бета-распределение, обобщенное двустороннее степенное распределение [2], распределение Кумарасвами) по метрологическим параметрам точности (измеренное значение, его неопределенность, расширенная неопределенность или границы интервала охвата, оценки границ носителя), предоставленным пользователем. Данные семейства способны воспроизводить широкий спектр форм плотности и могут быть использованы в случаях, когда распределения входных величин отличны от традиционно используемого нормального распределения.

Оценивание параметров рассматриваемых семейств проводится взвешенным методом наименьших квадратов, который, в частности, позволяет использовать избыточные (или несогласованные) пользовательские данные. Для подбора распределений входных величин (например, при задании измеренного значения и границ интервала охвата) также может быть применен принцип максимума энтропии. Возможен и подбор входных распределений по выборочным данным.

Программная реализация поддерживает аналитическое задание модели измерений для произвольного количества входных переменных, основанное на доступных математических функциях языка Python.

Отдельное внимание было уделено оптимизации производительности, в частности, за счёт использования многопоточных вычислений.

Литература

1. Joint Committee for Guides in Metrology. Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the «Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement» — Propagation of distributions using a Monte Carlo method. Sevres: BIPM —2008.

2. Kotz S. Beyond Beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications. / S. Kotz, J. R. van Dorp // Singapore: World Scientific Publishing — 2004 — 328 p.

О ГРУБЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.В. Степанов (Санкт-Петербург,
ВНИИМ им. Д.И. Менделеева)
stepanov17@yandex.ru

Рассмотрим следующую дискретную (существенно нелинейную) систему с запаздыванием:

$$x_{k+1} = Mx_k + Px_{k-\tau_k} + qu\big(x_k, x_{k-\tau_k}\big), \quad k = -\tau_0, \dots, 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент k; $M, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $q \in \mathbb{R}^n$ — постоянные матрицы и вектор; запаздывание $\tau_k = \tau(x_k)$ зависит от состояния, $\tau : \mathbb{R}^n \to [0, \tau_{\max}] \subset \mathbb{Z}$ — ограниченная целочисленная функция ($\tau_{\max} < +\infty$); управление u, вообще говоря, существенно нелинейно (например, относится к типу релейных нелинейностей) и принимает конечное множество значений $\{u^{(1)}, \dots, u^{(p)}\}$ (в частности, можем считать u зависящим только от x_k или только от $x_{k-\tau_k}$). Считаем, что функцию τ можно представить в виде суперпозиции $\tau(x) = \varphi\big(F(x)\big)$, где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \tau_{\max}]$ — кусочно-постоянная, с точками разрыва $\{r_1, \dots, r_m\}$ (например, φ может описывать квантование по уровню).

Определим поверхности переключения: поверхности переключения запаздывания

$$\Gamma_\tau = \bigcup_{j=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = r_j\};$$

и поверхности переключения управления: $\Gamma_u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, последние представляют собой множество точек разрыва функции u, предполагаемое объединением конечного числа кусочно-гладких гиперповерхностей. Решение $\{x_k\}_{k \geqslant -\tau_{\max}}$ системы (1) назовем грубым, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех k, начиная с некоторого k_0,

$$\operatorname{dist}\big(x_k, \Gamma_\tau\big) \geqslant \varepsilon, \quad \operatorname{dist}\Big(\big(x_k, x_{k-\tau_k}\big), \Gamma_u\Big) \geqslant \varepsilon.$$

По аналогии с [1, 2] можем сформулировать следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть линейная система*

$$y_{k+1} = My_k + Py_{k-d} \tag{2}$$

является равномерно экспоненциально устойчивой для всех постоянных запаздываний $0 \leqslant d \leqslant \tau_{\max}$, т.е. существуют не зависящие от d константы $C \geqslant 1$, $\lambda \in (0,1)$ такие, что для любого её решения выполняется:

$$\|y_k\| \leqslant C\lambda^k \max_{j=-\tau_{\max},\dots,0} \|y_j\|, \quad \forall k \geqslant 0.$$

Тогда, при выполнении наложенных на систему (1) условий, любое грубое решение $\{x_k\}$ этой системы сходится при $k \to \infty$ к ее асимптотически устойчивому периодическому решению (частным случаем которого является неподвижная точка). При этом последовательности u_k, τ_k являются периодическими, начиная с некоторого момента k_0.

Заметим, что существуют различные критерии равномерной асимптотической устойчивости системы (2). В качестве простейших можно, например, упомянуть критерий малых норм: $\|M\| + \|P\| < 1$, или критерий робастной устойчивости: $\rho(M) < 1$ (ρ — спектральный радиус), и $\|P\| < (1+\tau_{\max})^{-1}(1-\|M\|)$ (в качестве матричной нормы предлагается рассматривать $\|.\|_2$).

В качестве обобщения системы (1) можем рассмотреть возмущенную систему

$$x_{k+1} = Mx_k + Px_{k-\tau_k} + f_k + qu\big(x_k, x_{k-\tau_k}\big), \tag{3}$$

где $f_k \in \mathbb{R}^n$ представляет собой ограниченную почти периодическую последовательность векторов или нелинейную поправку: $f_k = \mu\,\Phi\big(x_k, x_{k-\tau_k}, k\big)$, где μ — малый параметр, функция $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и почти периодична по k (на любом компакте) равномерно относительно совокупности первых двух аргументов.

Теорема 2. *При выполнении условий предыдущей теоремы и, в случае нелинейной поправки Φ, при достаточно малом значении $|\mu|$, любое грубое решение системы (3) сходится к ее асимптотически устойчивому почти-периодическому решению, которому отвечает периодическая последовательность u_k.*

Число различных асимптотических устойчивых решений систем (1), (3) конечно.

Условие грубости всех решений данных систем, по сути, означает их структурную устойчивость. Это свойство гарантирует, что качественная картина динамики сохраняется при малых изменениях параметров модели. В случае автономных систем с фиксированной структурой запаздывания это множество также является всюду плотным.

Можно также обобщить полученные результаты на случай запаздывания $\tau_k = \tau(k, x_k)$, зависящего от времени и состояния. Например, в случае, когда $\tau(k,x) = \varphi(F(k,x))$, причём $F(k,x)$ непрерывна по x, и равномерно сходится к непрерывному пределу $\tilde{F}(x)$: $\sup_{x\in K} |F(k,x) - \tilde{F}(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$, Теорема 1 сохраняет справедливость, если в формулировке заменить $\tau(x)$ на предел $\tilde{\tau}(x) = \varphi(\tilde{F}(x))$.

Литература

1. Косякин А.А. Колебания в цифровых автоматических системах / А.А. Косякин, Б.М. Шамриков. — М. : Наука, 1983. — 334 с.

2. Степанов А.В. Устойчивые колебания одной цифровой системы управления / А.В. Степанов // Вестник СПбГУ, Серия 10. — 2006. — Вып. 1. — С. 157–162.

О ФАКТОРИЗАЦИОННЫХ ТЕОРЕМАХ

Л.И. Сухочева (Воронеж, ВГУ)
l.suhocheva@yandex.ru

Пусть H — гильбертово пространство, обозначим $\mathcal{L}(H)$ — множество линейных ограниченных операторов, заданных на H. $L : [a,b] \to \mathcal{L}(H)$ — непрерывная самосопряженная оператор-функция. Определим на $[0, b-a]$ скалярные функции:

$$\omega_a(t,F) = \max\left\{||F(x) - F(a)||,\ x \in [a,b],\ x - a \leqslant t\right\},$$

$$\omega_b(t,F) = \max\left\{||F(x) - F(b)||,\ x \in [a,b],\ b - x \leqslant t\right\}.$$

Предположим, что выполняются условия:

$$\int\limits_{(0)} \frac{\omega_a(t,L'')}{t} dt < \infty, \quad \int\limits_{(0)} \frac{\omega_b(t,L'')}{t} dt < \infty, \tag{1}$$

$$\int\limits_{(0)} \frac{\omega(t,L'')}{t} dt < \infty, \tag{2}$$

где $\omega(t, L) = \max\{||L(x+t) - L(x)||,\ x \in [a, b-t]\},\ t \in [0, b-a]$.

Теорема. *Пусть* $L : [a,b] \to \mathcal{L}(H)$ *— дважды непрерывно-дифференцируемая оператор-функция. Предположим, что* $L'(a) \geqslant 0$, $L'(b) \geqslant 0$, *имеют место интегральные условия* (1), (2) *и так называемое условие* **(S)**:
существуют такие положительные числа δ *и* ε, *что для каждого* $x \in [a,b]$ *и* $f \in H$, $||f|| = 1$, *выполняется* $|L(x)f, f| < \varepsilon \Longrightarrow (L'(x)f, f) > \delta$, *тогда* L *допускает линейную факторизацию:* $L(x) = M(x)\ (Z - x)$, *где* $M : [a,b] \to \mathcal{L}(H)$ *— непрерывная оператор-функция,* $M(x)$ *— ограниченно обратима для всех* $x \in [a,b]$, $Z \in \mathcal{L}(H)$ *подобен самосопряженному оператору и спектр* $L : \sigma(L) = \sigma(Z) \cap [a,b]$, [1].

Следует заметить, что подобное представление было предложено А. Маркусом и В. Мацаевым в [5], но в более строгих условиях равномерной дефинитности $L(0) \ll 0$, $L(1) \gg 0$.

Вообще, вопросы факторизации рассматривались большим количеством авторов. Так, Даффин в [2] $L(x)$ — квадратичный матричный полином, Крейн-Лангер в [4] $L(x)$ — операторный полином второй степени, Вирозуб–Мацаев в [3] $L(z)$ — голоморфная самосопряженная оператор-функция и т.д.

Литература

1. Azizov T.Ya. On Basis Properties of Selfadjoint Operator Fanctions / T.Ya. Azizov , A. Daijksma , L.I. Suhotcheva //Jornal of Fanctional Analysis 178 — 2000 — pp. 306–342.

2. Duffin R.J., Aminimax theory for overdampednetworks / R.J. Duffin // J.Rational Mech. Anal. 4 — 1995 — pp. 221–233.

3. Вирозуб А.И. О спектральных свойствах одного класса самосопряженных оператор-функций / А.И. Вирозуб, В.И. Мацаев// Функциональный анализ и его приложения. — 1974. — т.8. — вып. 1. — С. 1–10.

4. Krein M.G.. On some mathematical prinsiples in the linear theory of damped oscillations of continua / M.G. Krein, H. Langer // Integral Equations Operator Theory — 1978 — Part 1 :364-399, Part II: 539-566.

5. Markus A. Factorization of a selfadjoint nonanalytic operator function II. Single spectral zone / A. Markus, V . Matsaev // Integral Equations Operator Theory 16 — 1993 — pp.539-564.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕТА БПЛА САМОЛЁТНОГО ТИПА С ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛОЩАДОК

Т.И. Сушко, А.Е. Кожемякин, О.В. Трюх, Б.А. Титов, Т.В. Пашнева, Е.А. Егорушина (Воронеж, ВУНЦ ВВС ВВА)
tane2020102010@mail.ru

Тема является актуальной, учитывая диапазон современных беспилотных аппаратов от микро БПЛА до тяжелых многотонных аппаратов, — а их назначение не ограничивается только военной промышленностью, поскольку они с необходимостью применяются в спасательных операциях, грузоперевозках, сельском хозяйстве, охране границ, что придает импульсы к развитию беспилотной авиационной техники [1]. Кроме того, существующие мультикоптеры с высокой грузоподъёмностью (более 100 кг) обладают крупными габаритами, что ограничивает их мобильность и повышает риски при эксплуатации. Взлет и посадка — важные этапы полетов современных БПЛА, от качества расчета и выполнения этих операций зависит не только эффективность проводимых с их использованием работ, но и возможность их многоразового применения. Одним из ограничений применения БПЛА является наличия полосы для взлета и посадки. Разработанный в рамках данной работы мультикоптер решает эти проблемы за счёт: компактности (диаметр 1.4м) при грузоподъёмности 140 кг; системы воздушного старта БПЛА, позволяющей запускать самолётные дроны без взлётной полосы; электрической силовой установки, что снижает шум и выбросы по сравнению с ДВС — аналогами. Задачей управляемого полета в беспилотной авиации является проектирование программ полета на основе частных математических моделей движения в вертикальной или горизонтальной плоскостях и конкретизации векторов косвенного управления [2]. Существенной проблемой остается малое количество работ в открытом доступе по математическому и физическому описанию основных видов взлета и посадки современных БПЛА, что не позволяет при моделировании учитывать характеристики местности для выбранных взлетно-посадочных площадок беспилотных подразделений. Для облегчения сложных электрических расчетов и имитационного моделирования двигателя возможно использование условно бесплатного веб-сервиса «eCalc», предоставляющего услуги по моде-

---

лированию и оценке проектов радиоуправляемых моделей посредствам онлайн-калькулятора [3].

Целью этапа работы, выполняемых в рамках проекта «Разработка и оптимизация беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) вертикального взлета и посадки (ВВП) малых размеров повышенной грузоподъемности» является разработка мультикоптера с силовой установкой на базе шести электродвигателей. Он способен как поднимать грузы массой до 140 кг на высоту 1500 м, так и обеспечивать воздушный старт БПЛА самолётного типа массой до 140 кг в условиях ограниченного пространства (площадь зоны старта — 10 м^2), а также автономно стабилизироваться при зависании и компенсировать внешние возмущения (ветер, смещение груза). В процессе работы решены следующие задачи: рассчитана конструкция карбоновой рамы и балок крепления двигателей, подобраны компоненты силовой установки (моторы, пропеллеры, аккумуляторы), разработана система электромагнитного крепления груза с резервированием, интегрированы датчики и алгоритмы активной балансировки, проведены расчёты времени полёта, тяговооружённости и прочности узлов. Механическое движение аппарата строилось с учетом несбалансированности основных сил, возникающих в полете: тяги, лобового сопротивления, подъемной силы и веса; — для ускорения в направлении большей силы в соответствии с законами механики сред. Имитационное физико — математическое моделирование полета БПЛА проводилось в веб-сервисе «eCalc» на основе заданных технических характеристик: взлетная масса, дальность, высота и продолжительность полета, размеры аппарата, размер и мощность электродвигателей, определяемые габаритами выбранной рамы БПЛА. Компьютерное моделирование полета БПЛА позволило авторам внести изменения в конструкцию его крепления к фюзеляжу. Кинематические уравнения механического движения и законы аэродинамики лежат в основе математических расчетов. На рис. 1 показан расчет дальности полета и воздушная скорость при выбранном типе двигателей.

По результатам имитационного моделирования авторами внесены конструктивные изменения в способ запуска БЛА самолетного типа, которые выразились в изменении крепления в виде электрозамка, гибридной системы запуска и комбинации мультикоптера-носителя и самолётного дрона, стартующего в воздухе. Резервирование критических систем: дублирование гироскопов, электромагнитного замка и каналов связи. Проведены расчеты воздушной скорости, дально-

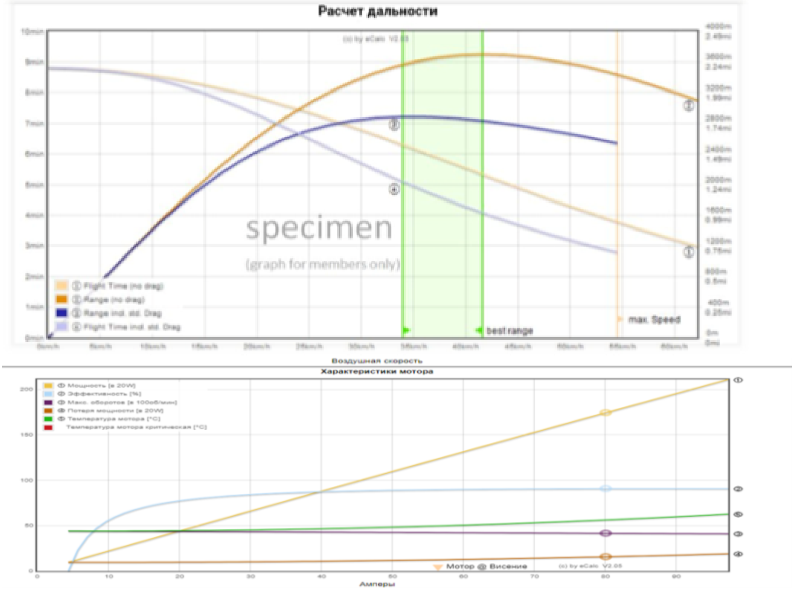


Рис. 1: Расчет дальности полета и воздушная скорость БПЛА

сти полета, она составила при максимальной нагрузке 150 кг около 3200 м [5].

Литература

1. Сушко Т.И. Формирование инженерных навыков курсантов посредством компьютерного моделирования / Т.И. Сушко, А.Е. Кожемякин, Т.В. Пашнева // Физико-математическое моделирование систем : материалы международного семинара. — Воронеж : ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2023. — С. 122–126.

2. Булат П.В. Основы аэродинамики и динамики беспилотных летательных аппаратов : учебное пособие / П.В. Булат, С.Ю. Дудников, П.Н. Кузнецов. — М. : Спутник+, 2021. — 273 с.

3. eCalc — reliable electric drive simulations. — URL: https://www.ecalc.ch (дата обращения 01.12.2025)

4. Кожемякин А.Е. Расчет радиуса кривизны полета самолета при переходе к набору вертикальной скорости с учетом тяги двигателя и лобового сопротивления при старте с нулевой скоростью. — Свидетельство о государственной регистрации программы № 2024681669 от 06 сентября 2024 г.

5. Баев А.Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ БЛИЖАЙШИХ И ВТОРЫХ СОСЕДЕЙ И С ОДНОИОННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ[1]

С.М. Ташпулатов (Ташкент, ИЯФ АН РУз.)
sadullatashpulatov@yandex.com

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид:

$$H = J\sum_{m,\tau}[(\overrightarrow{S}_m\overrightarrow{S}_{m+\tau}) + \alpha\sum_{m,\tau}(\overrightarrow{S}_m\overrightarrow{S}_{m+2\tau})] - H\sum_{m} S_m^z, \qquad (1)$$

где $J < 0$– параметр билинейного обменного взаимодействие для ближайших соседей, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$- отношение параметра билинейного обменного взаимодействие для вторых соседей к параметру билинейного обменного взаимодействие для ближайших соседей, $H = g\mu_B B$, g– параметр, $g \approx 2,2$ - гиромагнитный констант, μ_B– магнетон Бора, B– интенсивность магнитного поля, $\overrightarrow{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$– оператор атомного спина величины $s = 1/2$ в узле m, а по τ ведется суммирование по ближайшим соседям. Положим $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$, где S_m^+ и S_m^- соответственно, операторы рождения и уничтожения магнона в узле m. Гамильтониан (1) действует в симметрическом фоковском пространстве $\mathcal{H}$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями $S_m^+\varphi_0 = 0$, $S_m^z\varphi_0 = 1/2\varphi_0$, где $||\varphi_0|| = 1$. Векторы $\{S_m^- S_n^- \varphi_0\}$ описывает состояние системы двух магнонов, находящегося в узлах m и n, со значениями спина $s = 1/2$. Векторы $\{S_m^- S_n^- \varphi_0\}$ образуют ортонормальную систему. Пространство, натянутое на эти векторы, обозначим через $\widetilde{\mathcal{H}}_2$. Это пространство евклидово относително естественного скалярного произ- ведение. Оно называется пространством двухмагнонных состояний оператора H. Обозначим через H_2 сужение оператора H на подпрос- транстве $\widetilde{\mathcal{H}}_2$.

---

[1] Работа финансируется за счет средств государственного бюджета Республики Узбекистан.

Теорема 1. *Пространство* $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ *инвариантно относительно оператора* H. *Оператор* H_2 *является ограниченным самосопряженным оператором, который порождает ограниченный самосопряженный оператор* $\overline{H}_2$, *действующий в пространстве* $l_2((Z^\nu)^2)$ *по формуле*

$$(\overline{H}_2 f)(p,q) = J\sum_\tau\{(\delta_{p,q+\tau}+\delta_{p+\tau,q}-2)f(p,q)-\frac{1}{2}\delta_{p-\tau,q}f(p-\tau,q)-$$

$$-\frac{1}{2}\delta_{p,q-\tau}f(p,q-\tau)-\frac{1}{2}\delta_{p+\tau,q}f(p+\tau,q)-\frac{1}{2}\delta_{p,q+\tau}f(p,q+\tau)+\frac{1}{2}f(p-\tau,q)+$$

$$+\frac{1}{2}f(p,q-\tau)+\frac{1}{2}f(p+\tau,q)+\frac{1}{2}f(p,q+\tau)\}+\alpha\{(\delta_{p,q+2\tau}+\delta_{p+2\tau,q}-2)f(p,q)-$$

$$-\frac{1}{2}\delta_{p-2\tau,q}f(p-2\tau,q)-\frac{1}{2}\delta_{p,q-2\tau}f(p,q-2\tau)-\frac{1}{2}\delta_{p+2\tau,q}f(p+2\tau,q)-$$

$$-\frac{1}{2}\delta_{p,q+2\tau}f(p,q+2\tau)+\frac{1}{2}f(p-2\tau,q)+\frac{1}{2}f(p,q-2\tau)+\frac{1}{2}f(p+2\tau,q)+$$

$$+\frac{1}{2}f(p,q+2\tau)\}+2Hf(p,q), \qquad (2)$$

где $\delta_{k,j}-$ *символ Кронекера. Сам оператор* H_2 *на вектор* $\psi\in\widetilde{\mathcal{H}}_2$ *действует по формуле*

$$H_2\psi=\sum_{p,q}(\overline{H}_2 f)(p,q)S_p^- S_q^-\varphi_0. \qquad (3)$$

Лемма 1. *Спектры операторов* H_2 *и* $(\overline{H}_2$ *совпадают.*

Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье:

$\mathcal{F}: l_2((Z^\nu)^2)\to L_2((T^\nu)^2)\equiv\widetilde{\mathcal{H}}_2$, где $T^\nu-$ $\nu-$ мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, т.е., $\lambda(T^\nu)=1$.

Теорема 2. *Преобразование Фурье переводит оператор* $\overline{H}_2$ *в ограниченный самосопряженный оператор* $\widetilde{H}_2=\mathcal{F}\,\overline{H}_2\mathcal{F}^{-1}$, *действуеющий в пространстве* $L_2^{symm}((T^\nu)^2)$ *по формуле*

$$(\widetilde{H}_2 f)(\lambda,\mu)=[-2J\{2\nu-\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos\mu_i]\}-2\alpha\{2\nu-\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos\mu_i]\}+2H]\times$$

$$\times f(\lambda,\mu)+2J\int_{T^\nu}[2\nu+\sum_{i=1}^{\nu}[\cos(\lambda_i-s_i)+\cos(\mu_i-s_i)-\cos s_i-cos(\lambda_i+\mu_i-s_i)-\cos\lambda_i-$$

$$-\cos\mu_i]f(s,\lambda+\mu-s)ds+2\alpha\int_{T^\nu}[2\nu-\sum_{i=1}^{\nu}[\cos 2\lambda_i+\cos 2\mu_i]+\sum_{i=1}^{\nu}[\cos 2(\lambda_i-s_i)+$$

$$+\cos 2(\mu_i-s_i)-\cos 2s_i-\cos 2(\lambda_i+\mu_i-s_i)]-2H]f(s,\lambda+\mu-s)ds. \qquad (4)$$

где L_2^{symm}– *подпространство симметричных функций в* $L_2((T^\nu)^2)$.

Следующий факт является важным для последующих исследований спектра оператора $\widetilde{H}_3$. Пусть фиксирован полный квазиимпульс системы $x+y=\Lambda$. Обозначим через $L_2(\Gamma_\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_\Lambda=\{(x,y):x+y=\Lambda\}$. Известно [1], что оператор $\widetilde{H}_2$ и пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ можно разложить в прямой интеграл $\widetilde{H}_2=\int_{T^\nu}\bigoplus\widetilde{H}_{2\Lambda}d\Lambda$, $\widetilde{\mathcal{H}}_2=\int_{T^\nu}\bigoplus\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}d\Lambda$ операторов $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ и пространств $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ так, что пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ и

$$(\widetilde{H}_{2\Lambda}f)(\lambda,\mu)=[-4J\{\sum_{i=1}^{\nu}[1-cos\frac{\Lambda_i}{2}cos(\frac{\Lambda_i}{2}-\lambda_i)]+\alpha\sum_{i=1}^{\nu}[1-cos\Lambda_i cos(\Lambda_i-2\lambda_i)]\}-$$
$$-2H]f_\Lambda(\lambda)+4J\int_{T^\nu}\{\sum_{i=1}^{\nu}[1-cos\frac{\Lambda_i}{2}cos(\frac{\Lambda_i}{2}-\lambda_i)]+\sum_{i=1}^{\nu}[cos(\frac{\Lambda_i}{2}-\lambda_i)-cos\frac{\Lambda_i}{2}]\times$$
$$\times cos(\frac{\Lambda_i}{2}-s_i)+\alpha\{\sum_{i=1}^{\nu}[1-cos\Lambda_i cos(\Lambda_i-2\lambda_i)]+\sum_{i=1}^{\nu}[cos(\Lambda_i-2\lambda_i)-cos\Lambda_i]\times$$
$$\times\cos(\Lambda_i-2s_i)\}-2H\}f_\Lambda(s)ds. \qquad (5)$$

Пусть полный квазиимпульс системы $\Lambda=\pi$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\nu=1$ *и полный квазиимпульс системы* $\Lambda=\pi$. *Тогда оператор* $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ *имеет ровно три собственные значение* $z_1=0$, $z_2=-4J-H+\frac{2J\alpha^3}{1+\alpha}$ *и* $z_3=-4J-H+\frac{2J(1+2\alpha)^2}{1+\alpha}$, *лежащее ниже непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_{2\Lambda}$.

Литература

1. Наймарк М.А. Нормированные кольца / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1968. — 664 с.

ПОЛНЫЙ ИНВАРИАНТ ЛИУВИЛЛЕВОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ БИЛЛИАРДНОЙ КНИЖКИ, СКЛЕЕННОЙ ИЗ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ[1]

Д.А. Ткаченко (Москва, МГУ)
daniil.tkachenko@math.msu.ru

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеется эллипс. Дж.Биркгоф показал [2], что биллиард в эллипсе интегрируем, т.е. звенья траектории биллиардной частицы лежат на прямых, касательных к некоторой квадрике, софокусной с данным эллипсом. В.В. Ведюшкина расширила

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ в МГУ имени М.В. Ломоносова (проект № 22-71-10106).

класс интегрируемых биллиардов, введя биллиардные книжки [3]. Продемонстрируем эту конструкцию на примере. Пусть имеется двумерная область, ограниченная дугами софокусных квадрик. Возьмём конечное число её дубликатов и пронумеруем их. Склеим эти области по некоторым дугам. Склеенным дугам припишем перестановки. Т.е. если биллиардная частица двигалась на i-том биллиардном листе, то после отражения от дуги, которой приписана перестановка σ, частица продолжит движение на листе с номером $\sigma(i)$. Более того, А.Т. Фоменко были введены биллиарды с проскальзыванием [1]. В качестве примера рассмотрим проскальзывание в области, ограниченной эллипсом. Пусть частица после удара о границу не только отражается, но и «проскальзывает» вдоль границы на половину её длины. Так определенная система остаётся интегрируемой.

Ранее В.Н. Завьяловым был изучен этот биллиард [1]. В настоящей работе рассматривается некоторое обобщение. А именно, пусть даны $2k$ областей, ограниченных эллипсом и вертикальной прямой $x = 0$. Пронумеруем их и разобьем на пары $(12), \dots, (2k-1\,2k)$. На каждой паре введём проскальзывание. Склеим области вдоль вертикального отрезка. Сопоставим одномерным клеткам полученного CW-комплекса следующие перестановки: на вертикальном отрезке перестановку $(135\dots 2k-1\,246\dots 2k)$, а на эллиптических дугах — $(12)(34)\dots(2k-1\,2k)$.

Полученная биллиардная книжка, склеенная из k проективных плоскостей, очевидно, интегрируема. Верна следующая

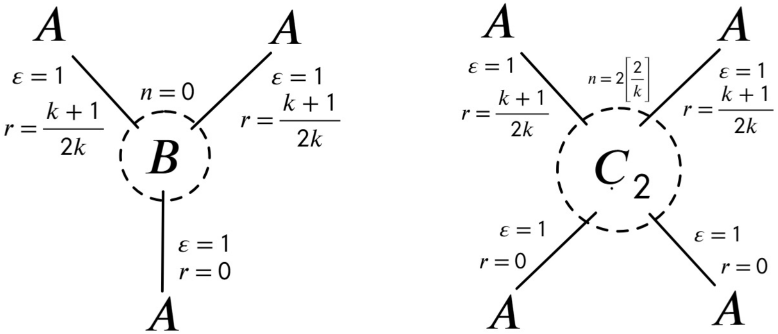


Рис. 1 Топология слоения Лиувилля невырожденной изоэнергетической поверхности

Теорема. *Пусть имеется биллиардная книжка описанная выше. Тогда топология слоения Лиувилля невырожденной изоэнергетической поверхности этого биллиарда описывается через меченые молекулы, изображенные на рисунке ниже. Слева — для чётного k, справа — для нечётного k.*

Меченая молекула кодирует слоение Лиувилля невырожденной изоэнергетической поверхности [4]. Она показывает то, каким образом перестраиваются торы Лиувилля, переходя через особый слой, а также то, каким образом перестраиваются регулярные торы Лиувилля между собой на каждом ребре графа.

Также отметим, что частный случай при $k = 1$ моделирует один из квадратично-интегрируемых геодезических потоков на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$.

Литература

1. Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping / Fomenko A.T., Vedyushkina V.V., Zav‘yalov V.N. // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2021. — N. 28 — C. 37-55.

2. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

3. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Математический сборник. — 2018. — Т. 209, № 12.

4. Фоменко А.Т., Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 444с.

ОВАЛЫ КРИВОЙ ТРОТТА КАК ТРАЕКТОРИИ ПЛОСКОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо (Майкоп, АГУ)
tlaychev@adygnet.ru

В работе рассматривается алгебраическая автономная система

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{n} a_{i,j}x^i y^j \equiv P_n(x,y), \ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{n} b_{i,j}x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \quad (1)$$

где $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Вещественную алгебраическую кривую на плоскости, имеющую максимальное число компонент связности (все из которых могут быть овалами) называют M–кривой. Примером такой кривой является несингулярная кривая четвертого порядка с четырьмя овалами — кривая Тротта [1].

Опираясь на работу Харнака А. [2], Баутин Н.Н. в статье [3] доказал теорему о существовании систем вида (1), имеющих число алгебраических предельных циклов, равное максимальному числу овалов алгебраической кривой порядка n. При доказательстве использовалась следующая система

$$\frac{dx}{dt} = -(y+\lambda)H'_y(x,y) \equiv P(x,y), \; \frac{dy}{dt} = (y+\lambda)H'_x(x,y) \equiv Q(x,y), \quad (2)$$

где $H_x(x,y) = 0$ — алгебраическая кривая порядка n с максимальным числом произвольно расположенных овалов.

В данной работе приведено доказательство теоремы о том, что все овалы кривой $H(x,y) = 0$ являются предельными циклами системы (2), отличающееся от доказательства, представленного в [3]. При этом показано, что если в системе (2)

$$H(x,y) = 144(x^4 + y^4) - 225(x^2 + y^2) + 350x^2y^2 + 81, \qquad (3)$$

то её предельными циклами служат ровно четыре овала кривой Тротта и других предельных циклов у этой системы нет.

Также в работе исследуется, может ли система (1) при $n = 3$ иметь кривую Тротта в качестве инвариантной кривой и могут ли при этом все её овалы являться предельными циклами.

В частности, доказано необходимое и достаточное условие: кривая Тротта является инвариантной для системы (1) при $n = 3$ в том и только в том случае, когда система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -225y + 350x^2y + 288y^3, \; \frac{dy}{dt} = 225x - 350xy^2 - 288x^3. \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение траекторий системы (4) представляет собой уравнение в полных дифференциалах, поэтому система интегрируема, и её общий интеграл задается выражением

$$144(x^4 + y^4) - 225(x^2 + y^2) + 350x^2y^2 = C = const \qquad (5)$$

При $C = -81$ из семейства (5) получается кривая Тротта. Все кривые семейства (5) являются кривыми четвёртого порядка.

Так как система (4) консервативна, то она имеет в конечной части фазовой плоскости только состояния равновесия типа «центр» и «седло». Кроме этого, векторное поле системы (4) симметрично относительно прямых: $y = x, y = -x, y = 0, x = 0$.

С помощью преобразований Пуанкаре в работе показано отсутствие состояний равновесия системы (4) на экваторе сферы Пуанкаре и построен её полный фазовый портрет.

Отметим, что несмотря на указанные по срокам литературные ссылки, решаемая задача остается актуальной. Об этом говорит недавний обзор [4].

Литература

1. Trott M. Applying Groebnerbasis to Three Problems in Geometry / M. Trott // Mathematica in Education and Research. — 1997. — Vol. 6, No 1. — P. 15–28.

2. Harnack A. Uber die Vieltheitigkeit der ebenen algebraischen Curven / A. Harnack // Mathematische Annalen. — 1876. — Vol. 10. — P. 189–198.

3. Баутин Н.Н. Оценка числа алгебраических предельных циклов системы с алгебраическими правыми частями / Н.Н. Баутин // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16, № 2. — С. 362.

4. Llibre J. Algebraic Limit Cycles / J. Llibre // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2025. — Vol. 35, No 14. — 2540008.

АЛЬФА–МОДЕЛЬ БИНГАМА II КЛАССА

М.С. Толстая (Воронеж, ВГУ)
tolstaiamaria@vk.com

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается разрешимость следующей начально–краевой задачи для альфа–модели движения жидкости Бингама (см. [1]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \nabla u_i - \mathrm{Div}\sigma + \nabla p = f, \qquad (1)$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} & \text{для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leqslant \tau^* & \text{для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

$$v = (I - \alpha^2\Delta)u, \qquad t \in [0, T], \ x \in \Omega, \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}\ u(t, x) = 0, \qquad t \in [0, T], \ x \in \Omega, \qquad (4)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0. \tag{5}$$

Здесь $v(x,t), u(x,t), p(x,t), f(x,t)$ соответственно вектор скорости частицы жидкости, модифицированная скорость движения частицы жидкости, давление в жидкости, плотность внешних сил; σ — девиатор тензора напряжения; $\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}\left(\nabla v + (\nabla v)^T\right)$ — тензор скоростей деформации; α, μ, τ^* — некоторые положительные константы. Описание альфа–моделей приведено в работе [2].

Пусть $u_0 \in V^1, f \in L_2(0,T;V^{-1})$. Рассмотрим функциональное пространство $W = \{u \in L_2(0,T;V^2), v' \in L_2(0,T;V^{-2})\}$.

Определение 1. Пара функций (u,σ), $u \in W$, $\sigma \in (L_2(Q_T))^{n^2}$ называется слабым решением начально–краевой задачи [1]–[5], если для всех $\varphi \in V^1$ и для почти всех $t \in (0,T)$ удовлетворяет равенству

$$\langle (J+\alpha^2 A)u', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i((J+\alpha^2 A)u)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n ((J+\alpha^2 A)u)_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \varphi_j\, dx + \int_\Omega \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi\rangle,$$

реологическому соотношению (2) и начальному условию из (5).

На основе работ [3]–[5] доказан следующий результат:

Теорема 1.*Пусть* $u_0 \in V^1, f \in L_2(0,T;V^{-1})$. *Тогда начально–краевая задача [1]–[5], имеет хотя бы одно слабое решение* (v,σ).

Литература

1. Звягин В.Г. Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным / В.Г. Звягин, А.В. Звягин, М.В. Турбин // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2018. — Т. 477. — С. 54–86.

2. Звягин А.В. Разрешимость альфа-моделей гидродинамики / А.В. Звягин, В.Г. Звягин, Д.М. Поляков // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2016. — № 2. — С. 72–93.

3. Звягин А.В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 52016. — № 10. — С. 70–75.

4. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье-Стокса / А.В. Звягин // ДАН. — 2019. — Т. 486, № 5. — С. 527–530.

5. Zvyagin V. Optimal feedback control problem for the fractional Voigt–α model / V. Zvyagin, A. Zvyagin, A. Ustiuzhaninova // Mathematics. — 2020. — V. 8, I. 7. — 1197 p.

АЛЬФА–МОДЕЛЬ БИНГАМА I КЛАССА

Н.В. Толстой (Воронеж, ВГУ)
nikolaitolstoi@vk.com

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается разрешимость следующей начально–краевой задачи для альфа–модели движения жидкости Бингама (см. [1]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = f, \tag{1}$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leqslant \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$u = (I - \alpha^2\Delta)^{-1} v, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\, v = 0, \tag{4}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0. \tag{5}$$

Здесь $v(t, x)$ — неизвестная вектор–функция скорости движения частицы жидкости, $p(t, x)$ — неизвестная функция давления, $f(t, x)$ — заданная плотность внешних сил, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,n}}$ — тензор скорости деформации, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, $\mu > 0$ — коэффициент вязкости среды. Описание альфа–моделей приведено в работе [2].

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Рассмотрим функциональное пространство $W_1 = \{v \in L_2(0, T; V^1), v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$.

Определение 1. Пара функций $(v, \sigma) \in W_1 \times L_2(0, T; L_2(\Omega))$ называется слабым решением начально–краевой задачи (1)–(5) для альфа–модели Бингама, если для всех $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ она удовлетворяет равенству:

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega \sigma : \mathcal{E}(\varphi)\, dx = \int_\Omega f\, \varphi\, dx,$$

реологическому соотношению (2) и начальному условию из (5).

На основе работ [3]–[5] получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и* $v_0 \in V^1$. *Тогда начально-краевая задача (1)–(5) имеет хотя бы одно слабое решение* $(v,\sigma) \in W_1 \times L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Если рассмотреть семейство альфа–моделей (1)–(5), зависящих от параметра* α_m, *то существует последовательность решений* v_m *этого семейства, которая при стремлении* α_m *к нулю сходится к слабому решению исходной начально–краевой задачи.*

Литература

1. Звягин В.Г. Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным / В.Г. Звягин, А.В. Звягин, М.В. Турбин // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2018. — Т. 477. — С. 54–86.

2. Звягин А.В. Разрешимость альфа-моделей гидродинамики / А.В. Звягин, В.Г. Звягин, Д.М. Поляков // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2016. — № 2. — С. 72–93.

3. Звягин А.В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 52016. — № 10. — С. 70–75.

4. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье-Стокса / А.В. Звягин // ДАН. — 2019. — Т. 486, № 5. — С. 527–530.

5. Zvyagin V. Optimal feedback control problem for the fractional Voigt–α model / V. Zvyagin, A. Zvyagin, A. Ustiuzhaninova // Mathematics. — 2020. — V. 8, I. 7. — 1197 p.

ЧИСЛЕННЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

Тран Зуй (Ha Noi, Viet Nam, Phenikaa University)
duy.tran@phenikaa-uni.edu.vn

В работе рассматриваются аппроксимации эволюционных волновых процессов в дифференциальных системах с распределенными параметрами на сетеподобных областях $\Im \subset R^n$, $n = 2, 3$.

Пусть область $\Im \subset R^n$, $n = 2,3$, которая представляет собой связное множество подобластей $\Im_k$, $k = \overline{1,M}$; $\Im_T = \Im \times (0,T)$, $\partial\Im_T = \partial\Im \times (0,T)$, $\partial\Im$ – граница $\Im$. Частями границ $\partial\Im_k$ осуществляется примыкание подобластей $\Im_k$ друг к другу [1].

Поместим начало $O(0,...,0)$ системы координат $(0,x_1,x_2,...,x_n)$ $(n = 2,3)$ в область $\Im$ и построим гиперплоскости координатных осей Ox_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ вида

$$\begin{aligned} Ox_1 &: x_1 = i_1 h_1, i_1 = \overline{0,N_1}, \\ Ox_2 &: x_2 = i_2 h_2, i_2 = \overline{0,N_2}, \\ &\dots \\ Ox_n &: x_n = i_n h_n, i_n = \overline{0,N_n}, \end{aligned}$$

где h_n $(n = 1,2,3)$ – шаги разбиений осей (для простоты считаем $h_1 = h_2 = h_3 = h$).

Сетками $\omega^{\Im}$, $\omega^{\Im_k}$ и ω^{S_l} областей $\Im$, $\Im_k$ и поверхностей S_l называются множество точек пересечения гиперплоскостей вида (1), принадлежащих областям $\Im$, $\Im_k$ и поверхностям S_l, соответственно (здесь $k = \overline{1,M}$, $l = \overline{1,L}$); сеткой $\omega^{\partial\Im}$ границы $\partial\Im$ называется множество точек пересечения гиперплоскостей (1), принадлежащих этой границе. Таким образом, $\omega^{\Im} = \omega^{\Im_k} \cup \omega^{S_l}$, $\omega^{\bar{\Im}} = \omega^{\Im} \cup \omega^{\partial\Im}$. С шагом $\tau = T/K$ вводится сетка $\bar{\omega}_\tau = \left\{t_j = j\tau,\, j = \overline{0,K}\right\}$ на отрезке $[0,T]$ и сетка $\omega_\tau = \left\{t_j = j\tau,\, j = \overline{1,K-1}\right\}$ на интервале $(0,T)$, тогда для $\Im_T$, $\bar{\Im}_T$ вводятся сетки $\omega^{\Im_T} = \omega^{\Im} \times \omega_\tau$, $\omega^{\bar{\Im}_T} = \omega^{\bar{\Im}} \times \bar{\omega}_\tau$. Функции, определенные на сетке $\omega^{\Im_T}$ или $\omega^{\bar{\Im}_T}$, называются сеточными функциями.

Представлены конечномерные или дискретные аналоги для дифференциальных систем в области $\Im_T = \Im \times (0,T)$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Lu = f(x,t),$$

формализмами которых описываются сетеподобные эволюционные волновые процессы;

$$Lu = -\sum_{\kappa,\iota=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\right) + b(x)u, \quad a_{\kappa\iota}(x) = a_{\iota\kappa}(x),$$

$0 < a_* \leqslant a_{\kappa\iota}(x) \leqslant a^*, |b(x)| \leqslant \beta < \infty$.

В целях упрощения представления дальнейших рассуждений символьные обозначения сеточных функций остаются неизменными для обозначений функций, которые используются в дифференциальных выражениях. К примеру, используются символики сеточной функции $\left(u^j_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\right)$ и ее элементов $u^j_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, $i_\kappa = \overline{0, N_\kappa}$, $\kappa = \overline{1,n}$, для функции $u(x,t)$, а также представление

$$Lu_{\Im_k} \sim L_h u_{\Im_k} = \sum_{\kappa,\iota=1}^{n} \frac{1}{h} \left[a_{\kappa\iota\, i_\kappa+1_{\Im_k}} \frac{u^j_{i_\kappa+1,i_\iota{}_{\Im_k}} - u^j_{i_\kappa+1,i_\iota-1_{\Im_k}}}{h} - \right.$$

$$\left. -a_{\kappa\iota\, i_\kappa{}_{\Im_k}} \frac{u^j_{i_\kappa,i_\iota{}_{\Im_k}} - u^j_{i_\kappa,i_\iota-1_{\Im_k}}}{h} \right] + b_{i_{\Im_k}} u^j_{i_{\Im_k}},$$

$$i_\kappa = \overline{1, N_\kappa - 1}, i_\iota = \overline{1, N_\iota}, k = \overline{1, M}.$$

Сеточные функции $a_{\kappa\iota\, i_1,\ldots,i_\kappa,\ldots,i_{n_{\Im_k}}}$, $b_{i_1,i_2,\ldots,i_{n_{\Im_k}}}$, соответствующие исходным фиксированным функциям $a_{\kappa\iota}(x)_{\Im_k}$, $b(x)_{\Im_k}$, формируются в силу соотношений

$$a_{\kappa\iota\, i_1,\ldots,i_\kappa,\ldots,i_{n_{\Im_k}}} = \frac{1}{\operatorname{meas} \mathrm{R}^{\Im_k}_{ih}} \int_{\mathrm{R}^{\Im_k}_{ih}} a_{\kappa\iota}(x)_{\Im_k} dx,$$

$$b_{i_1,i_2,\ldots,i_{n_{\Im_k}}} = \frac{1}{\operatorname{meas} \mathrm{R}^{\Im_k}_{ih}} \int_{\mathrm{R}^{\Im_k}_{ih}} b(x)_{\Im_k} dx,$$

здесь $\mathrm{R}^{\Im_k}_{ih} = \{x \in \Im_k : |x - x_i| < h\}$, $|x - x_i|$ — норма в R^n.

Для волновой системы рассмотрен конечномерный аналог (трехслойная разностная симметричная схема) вида

$$u_{\bar{t}t,\Im_k} + L_h \hat{u}_{\Im_k} = f^j_{i_1,i_2,\ldots,i_{n_{\Im_k}}}, \quad j = \overline{1, K-1},\ k = \overline{1, M},$$

$$u^0_{i_1,i_2,\ldots,i_{n_{\Im_k}}} = \varphi_{0\, i_1,i_2,\ldots,i_{n_{\Im_k}}}, \quad u_{t_0\,\Im_k} = \varphi_{1\, i_1,i_2,\ldots,i_{n_{\Im_k}}},$$

$$u^j_{i_1,i_2,\ldots,i_{n_{\partial\Im}}} = 0,$$

где $f^j_{i_1,i_2,\ldots,i_{n_{\Im_k}}} = \frac{1}{\operatorname{meas} R^{\Im_k}_{ih} \tau} \int\limits_{j\tau}^{(j+1)\tau} \int\limits_{R^{\Im_k}_{ih}} f(x,t)_{\Im_k}\, dxdt$, $\varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_{n_{\Im_k}}}$ $= \frac{1}{\operatorname{meas} R^{\Im_k}_{ih}} \int\limits_{R^{\Im_k}_{ih}} \varphi(x)_{\Im_k}\, dx$, $\hat{u} = u^{j+1}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, $\widehat{u} = u^j_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, $u_{\bar{t}t} = (\hat{u} - 2u + \check{u})/\tau^2$, $u_{t_0} = (u^1 - u^0)/\tau$.

Литература

1. Тран З. Локально-одномерный метод для уравнения переноса сплошной среды с распределенными параметрами на сетеподобной области / З. Тран // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. — 2022. — Т.10. — № 2. — С. 18.

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ)
vum1@yandex.ru

Рассмотрим задачу Гурса:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + Cu(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = g(x), \quad u(t,0) = h(t) \quad (g(0) = h(0)), \tag{2}$$

где заданы: линейные ограниченные операторы A, B, C, действующие в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, функции $f(t,x), g(x), h(t) \in \mathfrak{X}$; $(t,x) \in \Pi = [0; t_k] \times [0; x_k]$.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция $u(t,x) \in \mathfrak{X}$: дифференцируемая по t и по x; удовлетворяющая условию $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$; удовлетворяющая (1), (2) в Π.

Уравнения вида (1) возникают при изучении процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки [1] и т.д.

Задача является логическим продолжением статьи [2] и решена в статье [3].

Обозначим:

$$J(x)(\cdot) = B(\cdot) + \int\limits_0^x e^{(x-\chi)A}(AB + C)(\cdot)\, d\chi,$$

$$\varphi(t,x) = e^{xA}\left(\frac{dh}{dt} - Bh(t)\right) + \int\limits_0^x e^{(x-\chi)A} f(t,\chi)\, d\chi.$$

Получен следующий результат.

Утверждение. *Пусть* $h(t)$ *дифференцируема,* $f(t,x)$ *непрерывна по* x*. Пусть* $\varphi(t,x)$ *непрерывна по* t*. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и равно*

$$u(t,x) = e^{tJ(x)}g(x) + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)J(x)}\varphi(\tau,x)\,d\tau.$$

Литература

1. Тихонов А.Н. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала / А.Н. Тихонов, А.А. Жуховицкий, Я.Л. Забежинский // Журнал физической химии. — 1946. — Т. 20, вып. 10. — С. 1113–1126.
2. Баев А.Д. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / А.Д. Баев, С.П. Зубова, В.И. Усков // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 2. — С. 134–140.
3. Усков В.И. Задача Гурса для операторного гиперболического уравнения в частных производных / В.И. Усков // Сборник статей XVIII Международной научно-практической конференции «Научные исследования 2025». — Пенза : МЦНС «Наука и просвещение», 2025. — С. 11–15.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ АРТЕРИАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Д.Г. Усков (Воронеж, ВГУ)
uskov.dam@mail.ru

Одной из наиболее значимых причин смертности населения, по данным Всемирной организации здравоохранения, остаются заболевания сердечно-сосудистой системы (ССЗ) [1]. Для пациентов с ССЗ регулярный контроль артериального давления (АД) является базовым условием своевременного выявления ухудшений и оценки эффективности терапии. В ранее рассмотренной информационной системе мониторинга состояния пациента [2] измерение АД реализуется на основе обработки осциллограмм без использования аускультативных процедур [3, 4].

Практика обработки накопленных измерений показала, что заметная доля осциллограмм оказывается непригодной для дальнейшей интерпретации. Некорректность может быть обусловлена движениями пациента, нарушением положения или неплотным прилеганием манжеты, помехами и сбоями датчика, а также индивидуальными особенностями сосудистого тонуса. На уровне сигналов такие случаи проявляются в виде нерегулярных пульсаций, локальных выбросов амплитуды, смещения базовой линии и изменения формы кривой после выделения пульсовой составляющей. Подобные измерения приводят к нестабильной работе алгоритмов вычисления параметров АД и повышают риск получения некорректных оценок систолического и диастолического давления.

Цель работы заключается в повышении достоверности анализа данных в рамках системы измерения АД за счёт автоматического выявления и исключения некорректно проведённых измерений на этапе предварительной обработки. Для достижения цели решается задача бинарной классификации осциллограмм: «корректное» измерение / «некорректное» измерение. В качестве исходных данных используются записи давления в манжете, формируемые в процессе измерительного цикла. На этапе предварительной обработки выполняется выделение пульсовой компоненты, связанной с колебаниями плечевой артерии, с учётом вклада артериол; в дальнейшем рассматривается первая гармоника как наиболее информативная для построения осциллограммы. Далее формируется график осцилляций, пригодный для последующего расчёта давления.

Так как вероятных причин отклонений много, то при классификации «некорректность» сложно формализовать. Часть искажений локальна и затрагивает отдельные участки записи, часть приводит к общему изменению формы кривой, а часть является комбинацией факторов. В таких условиях подходы, основанные только на наборе статистических характеристик, часто оказываются недостаточными, поскольку значимые для специалиста визуальные особенности формы могут быть слабо выражены в отдельных числовых признаках. Поэтому для автоматизации контроля качества целесообразно применять методы машинного обучения [5], способные выделять устойчивые паттерны и различать комплексные искажения.

Для решения подобной проблемы были использованы свёрточные нейросетевые модели, ориентированные на анализ формы кривой и её структурных нарушений, для работы с которыми полученные ранее осциллограммы преобразовывались в изображение графика с фиксированным масштабированием. Обучение выполнялось на вручную размеченной выборке осциллограмм, сформированной на основе измерений, накопленных в ходе эксплуатации и экспериментальных исследований в рамках системы мониторинга. Разметка осуществлялась по критерию пригодности осциллограммы для последующего расчёта параметров АД. Качество классификации оценивалось по стандартным метрикам, при этом приоритетным являлось снижение доли случаев, когда некорректное измерение ошибочно признаётся корректным, поскольку именно такие ошибки наиболее критичны для дальнейшей обработки.

Проведённый анализ показал, что модели, использующие визуальное представление, демонстрируют высокую устойчивость при работе на подобных примерах: они отлично распознают нарушения формы кривой и комбинированные артефакты, сохраняя приемлемое качество на измерениях, которые внешне близки к корректным, но содержат искажения, критичные для расчёта давления. Полученные результаты позволяют рассматривать визуально-ориентированную классификацию осциллограмм как более практичное решение для модуля предварительной фильтрации данных в информационной системе мониторинга. Встраивание классификатора на раннем этапе обработки обеспечивает автоматический контроль качества поступающих измерений и снижает нагрузку на специалиста, оставляя ручную проверку только для пограничных случаев и задач уточняющей разметки.

В качестве направлений дальнейшего развития целесообразно отметить расширение постановки задачи от бинарной классификации к многоклассовой, с выделением типовых причин некорректности измерений, а также адаптивную настройку параметров предварительной обработки с учётом индивидуальных особенностей пациента и условий измерения. Это позволит не только отбрасывать некорректные осциллограммы, но и повышать стабильность работы алгоритмов обработки данных, поступающих на этап определения параметров АД.

Литература

1. World health statistics 2023: monitoring health for SDGs, Sustainable Development Goals // World Health Organization. — Geneva : World Health Organization, 2023. — License: CC BY-NC-SA 3.0 IGO.

2. Абрамов Г.В. Разработка структуры информационной модели процесса обработки осциллографического измерения артериального

давления / Г.В. Абрамов, Д.Г. Усков // Системы управления и информационные технологии. — 2024. — № 3. — С. 51–55.

3. Кошенин В.Б. Математическое моделирование гемодинамики сердечно-сосудистой системы с учетом влияния нейрорегуляции / В.Б. Кошенин // Математическое моделирование: сборник научных трудов. — М.: ВГИЛ, 2007. — С. 15–28.

4. Астраханцева Е.В. Математическое моделирование гемодинамики крупных кровяных сосудов / Е.В. Астраханцева, В.Ю. Гидаспов, Д.Л. Ревизников // Математическое моделирование. — 2005. — Т. 17. — № 8. — С. 61–80.

5. Никифорова С.Г. Применение методики обработки данных с использованием нейронных сетей и машинного обучения для измерения артериального давления / С.Г. Никифорова // Вестник науки. — 2024. — Т. 3. — № 26. — С. 498–503.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ДВУХСКОРОСТНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОТРЕЗКЕ[1]

Е.В. Устилко, Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГТУ, БГУ)
ustilko@tut.by, lomovtsev23@mail.ru

На $G=[0,d]\times[0,+\infty[$ решена характеристическая задача:

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\ \{x,t\}\in G, \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0}=\psi(x),\ x\in[0,d],\ d>0, \quad (2)$$

$$[\alpha_i(t)\left(u_t(x,t)+(-1)^{i+1}a_iu_x(x,t)\right)+\gamma_i(t)u(x,t)]|_{x=\hat{d}_i}=\mu_i(t),$$

$$t\geqslant 0,\ i=1,\,2. \quad (3)$$

Здесь f, φ, ψ, μ_1, μ_2 — вещественные функции своих независимых переменных x и t, α_i, γ_i — вещественные функции переменной t и коэффициенты $a_i>0$, $\hat{d}_i=(i-1)d$, $i=1,\,2$.

Пусть $C^k(\Omega)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на множествах $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $C^0(\Omega)=C(\Omega)$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

Мы используем частные классические решения $F_{i,\,k}(x,t)$ неоднородного двухскоростного ($a_1 \neq a_2$) уравнения и функции из [1]:

$$F_{i,\,k}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[(-1)^i \int\limits_{d_k}^{t_i^*(x)} \int\limits_{x-(-1)^i a_{3-i}(t-\tau)}^{\hat{d}_i-(-1)^i a_{3-i}[t_i^*(x)-\tau]} f(s,\tau)ds d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_i^*(x)}^{t} \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right],\ i=1,\,2,\ \ t_1^*(x)=t_2(x),$$

$$t_2^*(x) = t - \frac{d-x}{a_2},\ \ \Phi_{i,k}(t) \equiv \alpha_i(t)\varphi_k'\Big(\hat{d}_i + (-1)^{i+1}a_{3-i}(t-d_k)\Big),$$

$$\Psi_{i,k}(t) \equiv \alpha_i(t)\psi_k\Big(\hat{d}_i + (-1)^{i+1}a_{3-i}(t-d_k)\Big),$$

$$\mathcal{F}_{i,k}(t) \equiv \alpha_i(t)\int\limits_{d_k}^{t} f\Big(\hat{d}_i + (-1)^{i+1}a_{3-i}((t-d_k)-\tau),\tau\Big)d\tau,$$

$$i=1,\,2,\ k=1,\,2,\,...\,,\,n.$$

В методе вспомогательных смешанных задач для полуограниченной стрны Ломовцева Ф.Е. верхняя полуполоса плоскости G вдоль оси Ot делится на прямоугольники $Q_n=[0,d]\times[0,d_{n+1}]$, где $d_n=(n-1)d/(a_1+a_2)$, которые затем делятся на прямоугольники $G_k=[0,d]\times[d_k,d_{k+1}]$, $k=1,\,2,...,n$, высоты $d/(a_1+a_2)$. Каждый из этих прямоугольников разбивается на три треугольника:

$$\Delta_{3k-2} = \{\{x,t\} : x \geqslant a_1 t_k,\ x + a_2 t_k \leqslant d,\ x\in[0,d],\ t\in[d_k,d_{k+1}]\},$$

$$\Delta_{3k-1} = \{\{x,t\} : x \leqslant a_1 t_k,\ x\in[0,a_1 d_2],\ t\in[d_k,d_{k+1}]\},$$

$$\Delta_{3k} = \{\{x,t\} :\ x + a_2 t_k \geqslant d,\ x\in[a_1 d_2, d], t\in[d_k,d_{k+1}]\},\ t_k = t - d_k,$$

$$k=1,...,n,\ n=1,\ldots$$

Теорема 1. *Пусть в граничных условиях (3) вещественные коэффициенты* $\alpha_i,\ \gamma_i\in C^{n-k+2}[d_k,d_{k+1}]$, $k=1,2,\ldots n$, $\gamma_i(t)\neq 0$, $t\in[0,d_{n+1}]$, $i=1,\,2$, $n=1,\,2,\,3,\ldots$. *Характеристическая смешанная задача (1)—(3) в* Q_n *имеет единственные и устойчивые классические решения* $u\in\bigcap_{k=1}^n C^{n+2-k}(Q_k)\subset C^2(Q_n)$ *для* f, φ, ψ, μ_1, μ_2 *тогда и только тогда, когда верны требования гладкости:*

$$\varphi\in C^{n+1}[0,d],\ \psi\in C^n[0,d],\ f\in C^{n-k}(G_k),$$

$$\mu_1,\ \mu_2 \in C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}],$$

$$\Phi_{i,k}(t),\ \Psi_{i,k}(t),\ \mathcal{F}_{i,k}(t) \in C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}],$$

$$\int_{d_k}^{t} f\left(x - (-1)^i a_{3-i}\left(t-\tau\right), \tau\right) d\tau \in C^{n-k+1}(G_k), \tag{4}$$

$$\frac{a_2+2a_1}{a_1} \int\limits_{d_k}^{(x/a_1)-t} f\left(\frac{a_2+2a_1}{a_1}(x-a_1t) - a_2\tau, \tau\right) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{(x/a_1)-t}^{t} f(x - a_1(t-\tau), \tau) d\tau \in C^{n-k+1}\left(\Delta_{3k-2}\right), \tag{5}$$

$$-\frac{a_{3-i}}{a_i} \int_{d_k}^{t-\frac{\hat{d}_i-(-1)^i x}{a_i}} f((-1)^{i+1} a_{3-i}(t - \frac{\hat{d}_i - (-1)^i x}{a_i} - \tau), \tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t-\frac{\hat{d}_i-(-1)^i x}{a_i}}^{t} f(x + (-1)^i a_i\left(t-\tau\right), \tau) d\tau \in C^{n-k+1}\left(\Delta_{3k-1} \cup \Delta_{3k}\right), \tag{6}$$

$$i = 1,\ 2,\ t \in [d_k, d_{k+1}],\ t_k = t - d_k,\ k = 1,\ 2, ..., n,$$

$$J_{i,1} \equiv \alpha_i(d_k)[\psi_k(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi_k'(\hat{d}_i)] + \gamma_i(d_k)\varphi_k(\hat{d}_i) = \mu_i(d_k),$$

$$J_{i,2} \equiv \alpha_i'(d_k)[\psi_k(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} a_i \varphi_k'(\hat{d}_i)] + \alpha_i(d_k)\{(-a_i)^i[\psi_k'(\hat{d}_i) +$$

$$+ (-1)^{i+1} a_i \varphi_k''(\hat{d}_i)] + f(\hat{d}_i, d_k)\} +$$

$$+ \gamma_i'(d_k)\varphi_k(\hat{d}_i) + \gamma_i(d_k)\psi_k(\hat{d}_i) = \mu_i'(d_k),$$

$$J_{i,q+1} \equiv (-1)^{i+1} a_i \Phi_{i,k}^{(q)}(d_k) + \Psi_{i,k}^{(q)}(d_k) + \mathcal{F}_{i,k}^{(q)}(d_k) + \gamma_i^{(q)}(d_k)\varphi_k(\hat{d}_i) +$$

$$+ q\gamma_i^{(q-1)}(d_k)\psi_k(\hat{d}_i) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{q} C_q^s \gamma_i^{(q-s)}(d_k) \left\langle \frac{a_2^s - (-a_1)^s}{a_1+a_2} \psi_k^{(s-1)}(\hat{d}_i) + \right.$$

$$+ a_1 a_2 \frac{a_2^{s-1} - (-a_1)^{s-1}}{a_1+a_2} \varphi_k^{(s)}(\hat{d}_i) +$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{s-2} \frac{a_2^{j+1} - (-a_1)^{j+1}}{a_1+a_2} f^{(j,s-j-2)}(\hat{d}_i, d_k) \right\rangle =$$

$$= \mu_i^{(q)}(d_k), i = 1,\ 2,\ q = 2, ..., n+2-k,\ k = 1, \ldots, n.$$

Классическими решениями $u \in \bigcap_{k=1}^{n} C^{n+2-k}(Q_k)$ *характеристической смешанной задачи (1)—(3) на* Q_n *являются функции*

$$u_{3k-2}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi_k(x+a_2t_k)+a_2\varphi_k(x-a_1t_k)+\int\limits_{x-a_1t_k}^{x+a_2t_k}\psi_k(\nu)d\nu+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau\right],\ \{x,t\}\in\triangle_{3k-2},$$

$$u_{3k-1}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi_k(x+a_2t_k) - a_1\varphi_k\left(a_2\left(t_k-\frac{x}{a_1}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{a_2(t_k-x/a_1)}^{x+a_2t_k}\psi_k(\nu)d\nu\right]+\frac{1}{\gamma_1\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)}\left[\mu_1\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)-\right.$$

$$-a_1\Phi_{1,k}\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)-\Psi_{1,k}\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)-$$

$$\left.-\mathcal{F}_{1,k}\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)\right]+F_{1,\,k}(x,t),\ \{x,t\}\in\triangle_{3k-1},$$

$$u_{3k}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_2\varphi_k(x-a_1t_k) - a_2\varphi_k\left(d-a_1\left(t_k-\frac{d-x}{a_2}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x-a_1t_k}^{d-a_1(t_k-(d-x)/a_2)}\psi_k(\nu)d\nu\right]+\frac{1}{\gamma_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)}\left[\mu_2\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)+\right.$$

$$\left.+a_2\Phi_{2,k}\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)-\Psi_{2,k}\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)-\mathcal{F}_{2,k}\left(t-\frac{d-x}{a_2}\right)\right]+$$

$$+F_{2,\,k}(x,t),\ t_k=t-d_k,\ \{x,t\}\in\triangle_{3k},\ k=1,\,2,...,n,\ n=1,\,2,...$$

Здесь u_{3k-2}, u_{3k-1}, u_{3k} — сужения решений $u \in \bigcap_{k=1}^{n} C^{n+2-k}(Q_k)$ соответственно на треугольники Δ_{3k-2}, Δ_{3k-1}, Δ_{3k}, $k=1,\,2\,...,n$, с рекуррентными начальными данными:

$$\varphi_k(x) = u_{3k+j-4}|_{t=d_k},\ \psi_k(x)=\partial_t u_{3k+j-4}|_{t=d_k},$$

$$x\in[a_1jd_2,\ (a_1+a_2j)d_2],\ j=0,\ 1,\ k=2,\ 3,...,n,$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x), \quad \psi_1(x) = \psi(x), \quad x \in [0,\ d].$$

Следствие 1. *Если правая часть f уравнения (1) в Q_n зависит только от x или t и $f \in C^{n-k}(G_k)$, $k = 1, 2, ..., n$, тогда утверждение теоремы 1 верно без требований гладкости (4)—(6).*

Следствие 2. *Если правая часть $f \in C^{n-k}(G_k)$ уравнения (1) в Q_n зависит от x и t, то условия гладкости (4)—(6) из теоремы 1 о принадлежности выражений с интегралами от функции f множествам $C^{n-k+1}(\Omega)$ эквивалентны их принадлежности соответственно множествам $C^{(n-k+1,0)}(\Omega)$ или $C^{(0,n-k+1)}(\Omega)$ для $\Omega = G_k$, $\Omega = \triangle_{3k-2}$ и $\Omega = \triangle_{3k-1} \bigcup \triangle_{3k}$, $k = 1, 2, ..., n$. Здесь $C^{(n-k+1,0)}(\Omega)$ и $C^{(0,n-k+1)}(\Omega)$ — множества $n-k+1$ раз непрерывно дифференцируемых функций по x или непрерывных функций по t и непрерывных функций по x или $n-k+1$ раз непрерывно дифференцируемых функций по t на Ω.*

Замечание. Вспомогательная смешанная задача для неоднородного двухскоростного волнового уравнения с постоянными коэффициентами (1) при характеристической первой косой производной в граничном условии на полупрямой решена в [2].

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. / Ф.Е. Ломовцев // Журнал Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. — 2017. — № 3. — С. 38–52.

2. Ломовцев Ф.Е. Смешанная задача для двухскоростного волнового уравнения с характеристической косой производной на конце полуограниченной струны. / Ф.Е. Ломовцев, Е.В. Устилко // Математические заметки. — 2024. — Т. 116, № 3. — С. 498–513.

ПОПЕРЕЧНИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ РЯДОВ УОЛША-ФУРЬЕ

Ю.А. Фарков (Москва, РАНХиГС)
farkov@list.ru

Колмогоровский n-поперечник множества A в нормированном пространстве X обозначается $d_n(A;X)$ и характеризует точность приближения множества A всевозможными n-мерными подпространствами, расположенными в X (см., например, [1]).

Пусть $I = [0, 1)$ — единичный полуинтервал, $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система Уолша на I и пусть $L_p = L_p(I)$, где $1 \leqslant p < \infty$. Функция $f \in L_p$ имеет сильную диадическую производную df тогда и только тогда, когда существует функция $g \in L_p$ такая, что $\widehat{g}(k) = k\widehat{f}(k)$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$; при этом $df = g$ (см. [2, с.42]). По определению,

$$d^{[1]}f := df, \quad d^{[r]}f := d(d^{[r-1]}f), \quad r \geqslant 2.$$

Хорошо известно, что $d^{[r]}w_k = k^r w_k$ для всех $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Как обычно, запись $a_n \asymp b_n$ означает, что существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что $c_1 a_n \leqslant b_n \leqslant c_2 a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $U_p := \{f \ : \ \|f\|_p \leqslant 1\}$ – замкнутый единичный шар пространства L_p. Для произвольной функции $f \in U_p$ положим

$$\Lambda_{\gamma,\xi} f := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(k)\widehat{f}(k)w_k(x),$$

где $\widehat{f}(k)$ — коэффициенты Уолша-Фурье функции f,

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda(k) = k^{-\gamma}(\log_2 k)^{-\xi}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \gamma > 0, \quad \xi \geqslant 0.$$

Обозначим через $B_p(\gamma, \xi)$ образ шара U_p при отображении $\Lambda_{\gamma,\xi}$.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma > 0$, $\xi \geqslant 0$ *и* $1 < q \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$d_n(B_p(\gamma, \xi); L_q) \asymp n^{-\gamma}(\log_2 n)^{-\xi}.$$

Этот результат доказывается с помощью теоремы о мультипликаторах Марцинкевича для рядов Виленкина-Фурье [3] и дополняет следующую теорему (см. [4]).

Теорема 2. *Пусть* $\gamma > 1/2$, $\xi \geqslant 0$ *и* $2 \leqslant p, q \leqslant \infty$. *Тогда*

$$d_n(B_p(\gamma, \xi); L_q) \asymp n^{-\gamma}(\log_2 n)^{-\xi}.$$

Обозначим через B_p^r класс функций $f \in L_p$ таких, что $d^{[r]}f \in U_p$. Поскольку при каждом $r \in \mathbb{N}$ мультипликатор $\Lambda_{r,0}$ отображает U_p на B_p^r, из теорем 1 и 2 следует, что $d_n(B_p^r; L_q) \asymp n^{-r}$ в двух случаях: 1) $1 < q \leqslant p < \infty$ и 2) $2 \leqslant p < q < \infty$ (сравните с теоремой 8 в [1]). В дальнейшем предполагается найти точные порядковые оценки поперечников $d_n(B_p^r; L_q)$ для всех $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ и оценить в терминах поперечников оптимальность построенных недавно (см. обзор [5]) систем вейвлетов и фреймов в анализе Уолша.

Литература

1. Тихомиров В.М. А.Н. Колмогоров и теория приближений / В.М. Тихомиров // Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44, № 1. — С. 83–122.

2. Schipp F., Wade W. R., Simon P. Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis / F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon. — New York : Adam Hilger, 1990. — 545 p.

3. Young W.-S. Littlewood–Paley and multiplier theorems for Vilenkin–Fourier series / W.-S. Young // Canad. J. Math. — 1994. — V. 46, № 3. — P. 662-–672.

4. Córdoba P.S.A., Tozoni S.A. Estimates for n-widths of multiplier operators of multiple Walsh series /P.S.A. Córdoba , S.A. Tozoni // J. Math. Anal. Appl. — 2019. — V. 479, № 1. — P. 1292–1323.

5. Фарков Ю.А. Ступенчатые масштабирующие функции и система Крестенсона / Ю.А. Фарков // Дифференциальные уравнения и математическая физика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — М. : ВИНИТИ РАН. — 2023. — Т. 225. — С. 134–149.

ПРИНЦИП СУБОРДИНАЦИИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛФЕРА[1]

В.Е. Федоров, А.С. Скорынин (Челябинск, ЧелГУ)
kar@csu.ru, skorynin@csu.ru

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $h \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$. Дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$ для функции h называется $J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)ds$, $t > 0$. Дробная производная Римана — Лиувилля порядка α имеет вид $D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha}h(t)$, где $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D^m — оператор дифференцирования целого порядка m. При $\alpha > 0$ будем использовать обозначение $J^\alpha h(t) = D^{-\alpha}h(t)$.

Обозначим $D^\gamma h(0) := \lim\limits_{t\to 0+} D^\gamma h(t)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Производную Хилфера порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{Z}$, и типа $\beta \in [0,1]$ определим как

$$D^{\alpha,\beta}h(t) = D^m\left(J^{m-\alpha}h(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}h(0)t^{k+\beta(m-\alpha)}}{\Gamma(k+\beta(m-\alpha)+1)}\right).$$

---

[1] Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/ и Правительства Челябинской области.

Для достаточно гладкого h это равенство влечет стандартную форму производной Хилфера $D^{\alpha,\beta}h(t) = J^{\beta(m-\alpha)}D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)}h(t)$.

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1}$$

для линейного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0, 1]$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, т.е. линейный замкнутый плотно определенный в $\mathcal{Z}$ оператор. Решением задачи (1), (2) будем называть такую функцию $z \in C(\mathbb{R}_+; D_A) \cap L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, что $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z}) \cap AC^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $D^{\alpha,\beta}z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1) и равенство (2) при $t \in \mathbb{R}_+$.

Семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется разрешающим семейством типа $\omega \geqslant 0$ для уравнения (2), если выполняются следующие условия:

(i) существует такое $K > 0$, что $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Kt^{-(1-\beta)(m-\alpha)}e^{\omega t}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ сильно непрерывно на $\mathbb{R}_+$, при этом $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} J^{(1-\beta)(m-\alpha)}S(t) = I$;

(iii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az_0 = AS(t)z_0$ при всех $z_0 \in D_A$, $t \in \mathbb{R}_+$;

(iv) для любого $z_0 \in D_A$ функция $S(t)z_0$ является решением задачи типа Коши $D^{-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_0$, $D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, для уравнения (2).

Оператор $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ будем называть оператором класса $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$, если выполняются следующие два условия:

(i) существует такое $\omega \geqslant 0$, что при всех $\text{Re}\lambda > \omega$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) существует такое $K > 0$, что при всех $\text{Re}\lambda > \omega$ и $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)} (\lambda^\alpha - A)^{-1} \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K\Gamma((1-\beta)(\alpha-m)+n+1)}{(\text{Re}\lambda - \omega)^{(1-\beta)(\alpha-m)+n+1}}.$$

Теорема 1. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0, 1]$. *Тогда существует разрешающее семейство операторов уравнения* (2) *в том и только в том случае, когда* $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta}$.

Следуя [2], обозначим класс $\mathcal{A}_\alpha$ как множество всех операторов $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия:

(i) при любом $\lambda \in S_{\theta_0,\omega_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - \omega_0)| < \theta_0,\, \mu \neq \omega_0\}$ выполняется $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) существуют такие $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\omega_0 \geqslant 0$, что при любых $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \theta_0)$, $\omega > \omega_0$ найдется такое $K(\theta, \omega) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta,\omega}$

$$\|(\lambda^\alpha - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{K(\theta,\omega)}{|\lambda|^\alpha}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$. *Тогда уравнение* (2) *имеет аналитическое разрешающее семейство операторов* $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$, *если и только если* $A \in \mathcal{A}_\alpha$.

Пусть $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, $\beta_1, \beta_2 \in [0,1]$, рассмотрим два уравнения с одним и тем же оператором A

$$D^{\alpha_1,\beta_1} z(t) = Az(t), \;\; t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

$$D^{\alpha_2,\beta_2} z(t) = Az(t), \;\; t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Принцип субординации для дифференциальных уравнений состоит в том, что существование разрешающего семейства уравнения (3) влечет существование разрешающего семейства операторов для уравнения младшего порядка (4).

Для уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто принцип субординации был исследован Э.Г. Бажлековой [1, 2], для уравнений с производной Римана — Лиувилля — в работе [3]. В данной работе проведено исследование приницпа субординации для уравнений с дробной производной Хилфера, частными случаями которой являются производные Герасимова — Капуто ($\beta = 1$) и Римана — Лиувилля ($\beta = 0$). При этом по порядку α производной принцип субординации выполняется вне зависимости от типов β_1 и β_2 производных Хилфера. Кроме того, при равенстве порядков двух производных Хилфера получен принцип субординации по их типу. В частности он означает, что порождение оператором разрешающего семейства операторов уравнения с производной Римана — Лиувилля влечет порождение им разрешающего семейства операторов уравнения с производной Герасимова — Капуто.

Разрешающее семейство для уравнения (3) и для уравнения (4) будем обозначать через $\{S_1(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\{S_2(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ соответственно.

Далее используется функция Райта

$$\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!\Gamma(\delta - \gamma n)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \nu^{-\delta} e^{\nu - \lambda \nu^\gamma} d\nu,\ \gamma \in (0,1),\ \delta \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma_{R,\varepsilon} = \{Re^{i\varphi} : \varphi \in [-\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon]\} \cup \{re^{i\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)} : r \in (R, +\infty)\} \cup \{re^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)} : r \in (R, +\infty)\}$ — контур Ганкеля, $R > 0$, $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Напомним, что преобразование Меллина для функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ имеет вид $\mathfrak{M}[h](\varrho) := \int\limits_0^\infty t^{\varrho-1}h(t)dt.$

Теорема 3. *Пусть* $m_1 - 1 < \alpha_1 \leqslant m_1 \in \{1, 2\}$, $m_2 - 1 < \alpha_2 \leqslant m_2 \in \{1, 2\}$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $\gamma = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in (0, 1)$, $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$ *и* $A \in \mathcal{C}_{\alpha_1,\beta_1}$. *Тогда* $A \in \mathcal{A}_{\alpha_2}$, *при этом порождаемое оператором* A *аналитическое разрешающее семейство операторов имеет вид*

$$S_2(t)z_0 = t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\int\limits_0^\infty \Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})S_1(s)z_0ds$$

$$= \frac{t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma}}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{\Gamma(1-\sigma)t^{-\gamma\sigma}\mathfrak{M}[S_1(t)z_0](\sigma)d\sigma}{\Gamma(\gamma(1-\sigma)+\gamma\varsigma_1-\varsigma_2)}, \quad z_0 \in \mathcal{Z},$$

где $\varsigma_i := m_i - 1 - \beta_i(m_i - \alpha_i)$, $i = 1, 2$, $d \in (0, 1)$.

Далее будем обозначать разрешающее семейство операторов уравнения $D^{\alpha,\beta_i}z(t) = Az(t)$ через $\{S_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$, $i = 1, 2$.

Теорема 3. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \{1, 2\}$, $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 \leqslant 1$, $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta_1}$. *Тогда* $A \in \mathcal{C}_{\alpha,\beta_2}$ *и* $S_2(t) = J^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)}S_1(t)$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$.

Литература

1. Bazhlekova E.G. Subordination principle for fractional evolution equations / E.G. Bazhlekova // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2000. — Vol. 3, No. 3. — P. 213–230.

2. Bajlekova E.G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / E.G. Bajlekova. — Ph. D. Dissertation. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001. — 107 p.

3. Fedorov V.E. Subordination principle for equations with Riemann–Liouville derivative / V.E. Fedorov, M.V. Plekhanova, D.A. Vershinina // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, No. 11. — P. 5578–5588.

4. Fedorov V.E. Criterion of the existence of a strongly continuous resolving family for a fractional differential equation with the Hilfer derivative / V.E. Fedorov, W.-Sh. Du, M. Kostić, M.V. Plekhanova, A.S. Skorynin // Fractal and Fractional. — 2025. — Vol. 9, No. 2. — P. 81.

5. Fedorov V.E. Analytic resolving families of operators for linear equations with Hilfer derivative / V.E. Fedorov, A.S. Skorynin // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — Vol. 277, No. 3. — P. 385–402.

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ С НЕГЛАДКИМИ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

К.Д. Федоров
(Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Московский центр
фундаментальной и прикладной математики)
konstantindubna@mail.ru

Пусть на интервале $(0,T)$, $0<T<\infty$, задано два множества точек Λ_1 и Λ_2. В полосе $D=\mathbb{R}\times(0,T)$, $0<T<\infty$, выделяется ограниченная область $\Omega=\{(x,t)\in D: g_1(t)<x<g_2(t)\}$. Ее боковые границы Σ_1 и Σ_2 определяются непрерывными на $[0,T]$ функциями, производные которых кусочно-непрерывны со множествами Λ_1 и Λ_2 точек разрыва первого рода соответственно, при этом $g_2(t)-g_1(t)\geqslant d>0$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Λ_1 и Λ_2 определяют множество P угловых точек области Ω. Через $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega}\setminus P)$ обозначим пространство (вектор-) функций u, непрерывных вместе со своей первой пространственной производной в $\overline{\Omega}$ и имеющих непрерывные и ограниченные вторую пространственную и первую временную производные в $\overline{\Omega}\setminus P$, для которых конечно выражение

$$\|u;\Omega\|^{(2)}=\sum_{2r+s\leqslant 2}\sup_{(x,t)\in\Omega}\left|\frac{\partial^{r+s}u}{\partial t^r\partial x^s}(x,t)\right|+\sup_{\substack{(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega,\\ |\Delta t|\neq 0}}\frac{\left|\Delta_t\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|}{|\Delta t|^{1/2}}.$$

В D рассматривается равномерно-параболический матричный оператор $Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum\limits_{k=0}^{2}A_k(x,t)\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$, где $A_k=||a_{ijk}||^m_{i,j=1}$, $m\geqslant 1$. Предполагается, что коэффициенты a_{ijk} определены и ограничены в $\overline{D}$ и $|\Delta_{x,t}a_{ijk}(x,t)|\leqslant\omega_0(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2})$ в $\overline{D}$, где ω_0 – модуль непре-

---

рывности, удовлетворяющий двойному условию Дини:

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int\limits_0^z y^{-1}dy \int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

Для первой начально-краевой задачи:

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad u\Big|_{t=0} = h, \quad u\Big|_{\Sigma_s} = \psi_s, \quad s = 1, 2, \tag{1}$$

доказывается, что если функция f непрерывна, ограничена в $\overline{D}$ и $|\Delta_x f(x,t)| \leqslant \omega(|\Delta x|)$ в $\overline{D}$, где ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини:

$$\widetilde{\omega}(z) = \int\limits_0^z \omega(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

функция h непрерывна и ограничена вместе со своими первой и второй производными, функции ψ_1 и ψ_2 непрерывны, их производные кусочно-непрерывны со множествами Λ_1 и Λ_2 точек разрыва первого рода соответственно и выполнены условия согласования:

$$\psi_s(0) = h(g_s(0)), \quad s = 1, 2,$$

то классическое решение $u \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$ задачи (1) принадлежит пространству $C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega} \setminus P)$ и справедлива соответствующая оценка.

Существование и единственность решения поставленной задачи в классе $C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$ следует из [1, 2].

Ранее в [3] была рассмотрена первая начально-краевая задача в полуограниченной плоской области, боковая граница которой допускает наличие углов.

Литература

1. Baderko E.A. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients / E.A. Baderko, M.F. Cherepova // Applicable Analysis. — 2021. — Vol. 100, № 13 — P. 2900–2910.

2. Бадерко Е.А. Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами / Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59. № 5. — С. 608–618.

3. Бадерко Е.А. Первая начально-краевая задача для параболических систем в полуограниченной области с криволинейной боковой

границей / Е.А. Бадерко, К.Д. Федоров // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2025. — Т. 65. № 1. — С. 23–35.

РАЗЛОЖЕНИЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВИДЕ ЧИСЕЛ 0 И 1

В.И. Филиппов (Саратов, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина)
888vadim@mail.ru

Возникновение интереса к системам, образованным из сжатий и сдвигов одной функции в пространствах $L_p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, связано с достижениями в области wavelet-анализа и frame-теории.

Получены результаты о представлении элементов указанных пространств в виде разложения по таким системам с использованием чисел 0 и 1, при этом, элементы системы используются только один раз. Приводимые результаты являются новыми, методы доказательства теорем новые и отличаются от методов доказательств в целочисленном разложении. Полученные алгоритмы легко реализуются на персональном компьютере и коэффициенты получаются из простых вычислений.

В работе [1] рассмотрены вопросы целочисленного разложения суммируемых функций. Хотя рассматриваемая система неизбежно избыточна [2], разработанный нами алгоритм обеспечивает возможность получать разложения с максимальным количеством нулевых коэффициентов. Такое разложение обладает определенной оптимальностью при аппроксимациях с фиксированным уровнем точности благодаря отбрасыванию малых промежуточных коэффициентов. Более того, допускаются значительные вычислительные погрешности, которые исправляются нашим методом.

Из теоретического анализа и конкретных примеров разложения указанным методом следует появление структуры для последовательности коэффициентов разложения, которое выражается в наличии последовательности из значительного числа нулевых коэффициентов и длинных последовательностей комбинаций чисел 10 и 01, что позволяет эффективно применить алгоритм RLE сжатия информации без потери информации.

Проблема равномерного приближения непрерывных функций на вещественной оси многочленами с целыми коэффициентами исследуется с 1914 года.

Среди специалистов существует устойчивый интерес к разложению функций в ряды с целочисленными коэффициентами. В работе [3], в частности, приводится обзор результатов о приближении суммами сдвигов одной функции, а также о плотности многочленов с целыми коэффициентами в банаховых функциональных пространствах.

В данной работе будем рассматривать функциональные системы вида

$$\{+\psi_{k,j}, -\psi_{k,j}\} = \{+\alpha_k\psi(2^k t - j), -\alpha_k\psi(2^k t - j)\} = \{\psi_l\}, \qquad (1)$$

$$\alpha_k \searrow 0, \alpha_k > 0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty,$$

$$k = 0, 1, 2, ..., \ j = 0, 1, ..., 2^k - 1, \ l = 2^{k+1} - 1, ..., 2^{k+2} - 2,$$

где $\psi(t)$ произвольная функция из $L_p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, продолженная значением 0 вне $(0,1]$ и для каждого k индекс l изменяется в указанных пределах, при этом, j изменяется от 0 до $2^k - 1$. Таким образом, нечетным номерам l соответствуют элементы $+\alpha_k\psi(2^k t - j)$, а следующим четным номерам l соответствуют элементы $-\alpha_k\psi(2^k t - j)$ в системе $\{\psi_l\}$.

Для определенности заметим, что $\psi_1 = +\alpha_0\psi(2^0 t - 0)$, $\psi_2 = -\alpha_0\psi(2^0 t - 0)$ и так далее.

Пусть, теперь, для теоремы 1

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (0,1]; \\ 0, & \text{если } t \notin (0,1]. \end{cases} \qquad (2)$$

Рассмотрим ряд по системе (1) с образующей функцией вида (2)

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_l^* \psi_l = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=m_i+1}^{m_{i+1}} d_l^* \cdot \psi_l(t), \qquad (3)$$

где d_l^* равны 1 или 0, а суммы $\sum_{l=m_i+1}^{m_{i+1}} d_l^* \cdot \psi_l(t)$ строятся специальным образом для некоторой функции $f \in L_p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Теорема 1. *Пусть задана произвольная функция* $f \in L_p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда существует ряд вида (3) по системе (1) с образующей функцией* ψ *как в (2), который сходится по норме пространства* $L_p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$ *к* $f(t)$, *т.е.* $\|f - \sum_{l=0}^{m} d_l^* \psi_l\|_p \to 0, \quad m \to \infty$.

Замечание 1. Назовем разложения фукций в теореме 1 *двоичным разложением* функций из соответствующих пространств.

Литература

1. Филиппов В.И. Целочисленное разложение по системам из сжатий и сдвигов одной функции / В.И. Филиппов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2020. — Т. 84, № 4. —С. 187–197.

2. Filippov V. Representation in L^p by series of translates and dilates of one function / V. Filippov, P. Oswald // Journal of Approximation Theory. — 1995. — V. 82, № 1. — P. 15–29.

3. Бородин П.А. Плотность квантованных приближений / П.А. Бородин, К.С. Шкляев // Успехи мат. наук. — 2023. — Т. 78, № 6. — С. 3–64.

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ РЯДАХ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $L(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, определённых на E со значениями в E; $GL(E)$ — множество непрерывно обратимых операторов из алгебры $L(E)$. В силу равносильности свойств непрерывности и ограниченности линейного оператора в нормированном пространстве ([1, с.89]) множество $GL(E)$ можно записать в виде $GL(E) = \{F \in L(E) : \exists F^{-1} \in L(E)\}$. Заметим, что $GL(E) \neq \varnothing$, например, любой скалярный оператор $T_\alpha = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, принадлежит множеству $GL(E)$, ибо $\exists T_\alpha^{-1} = \alpha^{-1} I \in L\,(E)$. Напомним, что множество $GL(E)$ открыто ([2, с.229]).

Пусть $H \in L\,(E)$, H фиксирован. Рассмотрим операторный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k \tag{1}$$

с членами из алгебры $L(E)$. По определению, левостороннее и правостороннее произведения ряда ((1)) на оператор H это соответственно операторные ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (HF_k), \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(F_k H). \tag{3}$$

Возникают естественные вопросы:

а) как взаимосвязаны сходимость ряда (1) и сходимость рядов (2), (3);

б) как взаимосвязаны абсолютная сходимость ряда (1) и абсолютная сходимость рядов (2), (3).

Ответы на эти вопросы дают следующие утверждения.

Теорема 1. *Из сходимости ряда ((1)) следует сходимость рядов (2), (3), при этом справедливы равенства* $\tilde{S} = HS$, $\tilde{\tilde{S}} = SH$, *где* S, $\tilde{S}$, $\tilde{\tilde{S}}$ *— суммы соответственно рядов ((1)), (2), (3).*

Доказательство. Пусть S_n, $\tilde{S}_n$, $\tilde{\tilde{S}}_n$ — частичные суммы соответственно рядов ((1)), (2), (3). Доказательство сходимости ряда (2) и равенства $\tilde{S} = HS$ известно ([3]). Покажем, что ряд (3) сходится и $\tilde{\tilde{S}} = SH$. Имеем:

$$\tilde{\tilde{S}}_n = \sum_{k=1}^{n}(F_k H) = \left(\sum_{k=1}^{n} F_k\right) H = S_n H.$$

Используя кольцевое свойство алгебры $L(E)$, получаем

$$\left\|\tilde{\tilde{S}}_n - SH\right\| = \|S_n H - SH\| = \|(S_n - S)\, H\| \leqslant \|S_n - S\|\|H\|\underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

следовательно, $\left\|\tilde{\tilde{S}}_n - SH\right\|\underset{n\to\infty}{\to} 0$, т.е. ряд (3) сходится и $\tilde{\tilde{S}} = SH$. Теорема доказана.

Теорема 2. *При выполнении условия*

$$H \in GL(E) \tag{4}$$

из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда ((1)), при этом $S = H^{-1}\tilde{S}$.

Доказательство. Имеем:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{n}\left[H^{-1}\left(HF_k\right)\right] = H^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left(HF_k\right) = H^{-1}\tilde{S}_n.$$

Тогда

$$\left\|S_n - H^{-1}\tilde{S}\right\| = \left\|H^{-1}\tilde{S}_n - H^{-1}\tilde{S}\right\| =$$

$$= \left\| H^{-1}\left(\tilde{S}_n - \tilde{S}\right)\right\| \leqslant \|H^{-1}\| \left\|\tilde{S}_n - \tilde{S}\right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

следовательно, $\left\|S_n - H^{-1}\tilde{S}\right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, т.е. ряд ((1)) сходится и $S = H^{-1}\tilde{S}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *При выполнения условия (4) из сходимости ряда (3) следует сходимость ряда ((1)), при этом* $S = \tilde{\tilde{S}}H^{-1}$.

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 2.

Теорема 4. *Из абсолютной сходимости ряда ((1)) следует абсолютная сходимость рядов (2), (3).*

Доказательство. Согласно определению абсолютной сходимости операторного ряда надо показать, что из сходимости знакоположительного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k\| \tag{5}$$

следует сходимость знакоположительных рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|HF_k\|, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|F_kH\|. \tag{7}$$

Пусть s — сумма ряда (5); $\{s_n\}$, $\{\tilde{s}_n\}$, $\left\{\tilde{\tilde{s}}_n\right\}$ — последовательности частичных сумм соответственно рядов (5), (6), (7). Каждая из этих последовательностей является неубывающей, ибо последовательность частичных сумм любого знакоположительного ряда не убывает. Имеем:

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \|HF_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\|H\|\|F_k\|) = \|H\|\sum_{k=1}^{n} \|F_k\| = \|H\|s_n \leqslant \|H\|s,$$

т.е. неубывающая последовательность $\{\tilde{s}_n\}$ ограничена сверху. Следовательно, в силу критерия сходимости знакоположительного ряда ([4, с.432]) ряд (6) сходится. Аналогично доказывается сходимость ряда (7). Теорема доказана.

Теорема 5. *При выполнении условия (4) из абсолютной сходимости ряда (2) следует абсолютная сходимость ряда ((1)).*

Доказательство. Нужно показать, что из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5). Пусть $\tilde{s}$ — сумма ряда (6), т.е. $\tilde{s} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{s}_n$. Имеем:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \|F_k\| = \sum_{k=1}^{n} \left\|H^{-1}\left(HF_k\right)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\left\|H^{-1}\right\| \|HF_k\|\right) =$$

$$= \left\|H^{-1}\right\| \sum_{k=1}^{n} \|HF_k\| = \left\|H^{-1}\right\| \tilde{s}_n \leqslant \left\|H^{-1}\right\| \tilde{s},$$

т.е. неубывающая последовательность $\{s_n\}$ ограничена сверху. Следовательно ряд (5) сходится. Теорема доказана.

Теорема 6. *При выполнении условия (4) из абсолютной сходимости ряда (3) следует абсолютная сходимость ряда ((1)).*

Теорема 6 доказывается аналогично теореме 5.

Если использовать общепринятое обозначение суммы ряда тем же выражением, что и сам ряд, то равенства $\tilde{S} = HS$, $\tilde{\tilde{S}} = SH$ из теоремы 1 принимают вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} (HF_k) = H \sum_{k=1}^{\infty} F_k; \quad \sum_{k=1}^{\infty} (F_k H) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) H.$$

В некоторых случаях целесообразно для суммы ряда применять иное обозначение, нежели для самого ряда ([5], [6]). В такой ситуации данные равенства можно записать в виде

$$(s) \sum_{k=1}^{\infty} (HF_k) = H\,(s) \sum_{k=1}^{\infty} F_k; \quad (s) \sum_{k=1}^{\infty} (F_k H) = \left((s) \sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) H,$$

где символ (s) перед знаком суммы показывает, что рассматривается сумма данного ряда.

Следствие 1. *Если ряд ((1)) сходится и для оператора* $H \in L\,(E)$ *выполняется условие*

$$HF_k = F_k H, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

то

$$HS = SH. \tag{9}$$

Действительно, используя теорему 1 и условие (8), получаем

$$HS = H \sum_{k=1}^{\infty} F_k = \sum_{k=1}^{\infty} (HF_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (F_k H) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right) H = SH.$$

Равенство (9) установлено.

Рассмотрим семейство операторных функций вида

$$S = S\left(L\left(E\right), L\left(E\right)\right) = \left\{f : L\left(E\right) \supseteq D\left(f\right) \to R\left(f\right) \subseteq L\left(E\right)\right\}.$$

Элементами этого семейства являются операторные функции e^X, $\sin X$, $\cos X$, которые, как известно, ([7, с.58], [8, с.132]), определены на $L(E)$ суммами абсолютно сходящихся операторных рядов:

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!};$$

$$\sin X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^k X^{2k+1}}{(2k+1)!}; \cos X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^k X^{2k}}{(2k)!}. \tag{10}$$

Определения (10) корректны, ибо, как известно ([9, с.129]), из абсолютной сходимости ряда с членами из банахова пространства следует его сходимость, в частности, из абсолютной сходимости ряда с членами из алгебры $L(E)$ следует его сходимость.

Любой оператор $X \in L\left(E\right)$ коммутирует с каждым членом операторных рядов, суммы которых определяют функции e^X, $\sin X$, $\cos X$. Значит, в силу следствия 1 для любого $X \in L\left(E\right)$ справедливы равенства

$$Xe^X = e^X X, \tag{11}$$

$$X \sin X = \left(\sin X\right) X, \tag{12}$$

$$X \cos X = \left(\cos X\right) X. \tag{13}$$

Заметим, что равенство (11) известно ([7, с.60]).

В дальнейшем понадобятся следующие утверждения.

1°. Если $A \in L\left(E\right)$, $B \in GL\left(E\right)$ и $AB = BA$, то $AB^{-1} = B^{-1}A$ ([10, с.55]).

Действительно, имеем $AB = BA$, следовательно, $\left(AB\right) B^{-1} = \left(BA\right) B^{-1}$. Используя сочетательное свойство $A_1 \left(A_2 A_3\right) = \left(A_1 A_2\right) A_3$ алгебры $L(E)$ и равенства $BB^{-1} = I$, $B^{-1}B = I$, получаем $A = B\left(AB^{-1}\right)$, следовательно, $B^{-1}A = AB^{-1}$.

2°. Если $P, T \in GL\left(E\right)$ и $PT = TP$, то $P^{-1}T^{-1} = T^{-1}P^{-1}$.

Действительно, имеем $P, T \in L\left(E\right)$, ибо $GL\left(E\right) \subset L\left(E\right)$. Применяя утверждение 1° при $A = T$, $B = P$, получаем $TP^{-1} = P^{-1}T$, следовательно, в силу 1° при $A = P^{-1}$, $B = T$ имеем $P^{-1}T^{-1} = T^{-1}P^{-1}$.

Заметим, что утверждение 2° можно обосновать, используя замкнутость множества $GL\left(E\right)$ относительно операции умножения элементов: если $P, T \in GL\,(E)$, то $PT \in GL\,(E)$ и $(PT)^{-1} = T^{-1}P^{-1}$ (см. частный случай леммы из ([8, с. 141]) при $X = Y = Z = E$).

Действительно, имеем $TP, PT \in GL\,(E)$ и $(TP)^{-1} = P^{-1}T^{-1}$, $(PT)^{-1} = T^{-1}P^{-1}$; далее, $(PT)^{-1} = (TP)^{-1}$ ибо $PT = TP$. Следовательно, $P^{-1}T^{-1} = T^{-1}P^{-1}$.

Используя равенства (11) - (13) и утверждение 1°, приходим к выводу: для любого $X \in GL\,(E)$ справедливы соотношения

$$X^{-1}e^{X} = e^{X}X^{-1}, X^{-1}\sin X = (\sin X)\,X^{-1}, X^{-1}\cos X = (\cos X)\,X^{-1}.$$

Для любого $X \in L\,(E)$ справедливо включение $e^{X} \in GL\,(E)$, ибо $\exists \left(e^{X}\right)^{-1} = e^{-X} \in L\,(E)$ ([7, с. 59]). Следовательно, в силу равенства (11) и утверждения 1° имеем $Xe^{-X} = e^{-X}X$ для любого $X \in L\,(E)$. В силу равенства (11) и утверждения 2° получаем $X^{-1}e^{-X} = e^{-X}X^{-1}$ для любого $X \in GL\,(E)$.

В [3] рассмотрены операторные функции $\sec X = \cos^{-1} X$, $\operatorname{cosec} X = \sin^{-1} X$, где $\cos^{-1} X = (\cos X)^{-1}$, $\sin^{-1} X = (\sin X)^{-1}$– обратные операторы соответственно для операторов $\cos X$, $\sin X$. Области определения этих функций имеют вид $D\,(\sec X) = \{X \in L(E) : \cos X \in GL(E)\}$, $D\,(\operatorname{cosec} X) = \{X \in L(E) : \sin X \in GL(E)\}$. В силу равенств (12), (13) и утверждения 1° получаем $X \sec X = (\sec X)\,X$ для любого $X \in D\,(\sec X)$; $X\operatorname{cosec} X = (\operatorname{cosec} X)\,X$ для любого $X \in D\,(\operatorname{cosec} X)$.

Рассмотрим семейство операторных функций вида

$$S\,(\mathbb{R}, L\,(E)) = \{f : \mathbb{R} \supseteq D\,(f) \to R\,(f) \subseteq L\,(E)\}.$$

Элементами этого семейства являются следующие функции, определённые на $\mathbb{R}$: операторная экспонента ([7, с.60])

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!};$$

операторные тригонометрические функции ([3, 11])

$$\sin Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, t^{2k} B^{2k}}{(2k)!}$$

(здесь A, B — фиксированные операторы из алгебры $L\,(E)$).

Для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$Ae^{At} = e^{At}A, \quad B\sin Bt = (\sin Bt)\,B, \quad B\cos Bt = (\cos Bt)\,B. \quad (14)$$

Действительно, при $t = 0$ эти равенства очевидны, ибо $e^O = I$, $\sin O = O$, $\cos O = I$. Пусть $t \neq 0$. Применяя соотношение (11) при $X = At$ а соотношения (12), (13) при $X = Bt$ и сокращая обе части каждого из полученных равенств на t, приходим к соотношениям (14).

Если $A, B \in GL\,(E)$, то в силу (14) и утверждения 1° $A^{-1}e^{At} = e^{At}A^{-1}$, $B^{-1}\sin Bt = (\sin Bt)\,B^{-1}$, $B^{-1}\cos Bt = (\cos Bt)\,B^{-1}$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Литература

1. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. — 384 с.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В, Фомин. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

3. Фомин В.И. Об операторных функциях операторного переменного / В.И. Фомин // Вестник российских университетов. Математика. — 2023. — Т.28, №141. — С. 68 – 89.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть I / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 648 с.

5. Фомин В.И. Об одном обозначении суммы ряда / В.И. Фомин // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. — 2017. — №2 (64). — С. 157 – 159.

6. Фомин В.И. Об основном свойстве комплексной операторной экспоненциальной функции / В.И. Фомин // Вестник российских университетов. Математика. — 2019. — Т.24, №127. — С. 324 – 332.

7. Шварц Л. Анализ. Т.II / Л. Шварц. — М.: Мир, 1972. — 528с.

8. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

9. Шварц Л. Анализ. Т.I / Л. Шварц. — М.: Мир, 1972. — 824с.

10. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 240 с.

11. Фомин В.И. О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56, №8. — С. 1045 – 1054.

О МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ПОНЯТИЙ ОГРАНИЧЕННОГО И НЕОГРАНИЧЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

В связи с тем, что в учебные программы ряда технических вузов включен курс «Элементы функционального анализа», актуальна задача изложения некоторых тем этого курса в более доступной для студентов форме, нежели это делается в имеющихся учебниках и монографиях по функциональному анализу. Это касается, в частности, изложения материала об ограниченных и неограниченных линейных операторах.

Предлагается вводить понятие неограниченного линейного оператора и приводить примеры таких операторов сразу после того, как дано определение ограниченного линейного оператора и приведены примеры этих операторов.

Такой подход будет способствовать формированию у студентов чёткого представления о том, что ограниченные линейные операторы и неограниченные линейные операторы это различные математическое объекты и общим для них является лишь свойство линейности.

Пусть X, Y — нормированные пространства над числовым полем P ($P = \mathbb{R}$ или $P = \mathbb{C}$); o_1, o_2, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ — нулевые элементы и нормы соответственно в X, Y; $S_1(o_1) = \{x \in X : \|x\|_1 = 1\}$ — единичная сфера в пространстве X.

Некоторые понятия функционального анализа являются обобщением соответствующих понятий из школьного или вузовского курса математики. Например, система аксиом метрического пространства построена на основе свойств расстояния, изучаемых в планиметрии и стереометрии; понятие оператора является обобщением понятия числовой функции, рассматриваемой в математическом анализе. В связи с этим перед введением понятия ограниченного линейного оператора уместно напомнить, что числовая функция $f : D(f) \subseteq P \to R(f) \subseteq P$ называется ограниченной, если $R(f)$ является ограниченным множеством. А затем пояснить, почему прямой перенос понятия ограниченной числовой функции на линейные операторы невозможен (см. ниже замечание 1).

Рассмотрим линейный оператор $A : D(A) \subseteq X \to R(A) \subseteq Y$. Напомним, что согласно определению линейного оператора $D(A)$ является линейным многообразием в X, следовательно, $o_1 \in D(A)$ ([1, с.18]) и $Ao_1 = o_2$([2, с.203]).

Простейшим примером линейного оператора является нулевой оператор O: по определению, $Ox = o_2$ для любого $x \in X$, т.е. $D(O) = X$, $R(O) = \{o_2\}$. Отметим, что $R(O)$ является ограниченным множеством.

Замечание 1. *Если $A \neq O$, то $R(A)$ является неограниченным множеством.*

Действительно, имеем $A \neq O \Rightarrow \exists x_* \in D(A), x_* \neq o_1 : y_* = Ax_* \neq o_2$, значит, $\|y_*\|_2 > 0$. Далее, $nx_* \in D(A)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В силу однородности оператора A имеем $y_n = A(nx_*) = ny_*$. Используя однородность $\|\cdot\|_2$, получаем $\|y_n\|_2 = n\|y_*\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, т.е. последовательность $\{y_n\} \subset R(A)$ является неограниченной. Следовательно, $R(A)$ является неограниченным множеством. Справедливость замечания 1 установлена.

Учитывая замечание 1, получаем

Определение 1. *Линейный оператор A называется ограниченным, если он отображает всякое ограниченное множество $\Omega \subset D(A)$ в ограниченное множество $A(\Omega) \subset R(A)$* ([3, с.89]).

Согласно определению 1, нулевой оператор ограничен, ибо он отображает любое множество, в частности, любое ограниченное множество из $D(O) = X$ в ограниченное множество $\{o_2\}$.

Чтобы получить полезный инструмент для доказательства ограниченности конкретных линейных операторов а также ввести понятие нормы ограниченного линейного оператора, сформулируем ещё одно определение ограниченного линейного оператора, равносильное определению 1.

Пусть линейный оператор A ограничен. Если $A = O$, то

$$\|Ox\|_2 \leqslant o\|x\|_1 \text{ для любого } x \in D(O). \tag{1}$$

Рассмотрим случай $A \neq O$. Согласно определению 1, оператор A отображает ограниченное множество $\Omega = D(A) \cap S_1(o_1)$ в ограниченное множество $A(\Omega)$, т.е. $\exists c > 0$:

$$\|Ax\|_2 \leqslant c = c\|x\|_1 \text{ для любого } x \in \Omega. \tag{2}$$

Пусть $x \in D(A) \setminus \Omega$. Заметим, что $o_1 \in D(A) \setminus \Omega$ и

$$\|Ao_1\|_2 \leqslant c\|o_1\|_1. \tag{3}$$

Пусть $x \neq o_1$. Рассмотрим элемент $\hat{x} = \|x\|_1^{-1} x$. Заметим, что $\hat{x} \in D(A)$. Используя однородность $\|\cdot\|_1$, получаем $\|\hat{x}\|_1 = 1$, т.е. $\hat{x} \in S_1(o_1)$. Таким образом, $\hat{x} \in \Omega$. Следовательно, в силу (2)

$$\|A\hat{x}\|_2 \leqslant c. \tag{4}$$

Используя однородность оператора A, получаем $A\hat{x} = \|x\|_1^{-1} Ax$. Следовательно, в силу однородности $\|\cdot\|_2$

$$\|A\hat{x}\|_2 = \|x\|_1^{-1} \|Ax\|_2. \tag{5}$$

В силу (4), (5)

$$\|Ax\|_2 \leqslant c\|x\|_1. \tag{6}$$

В силу (3), (6)

$$\|Ax\|_2 \leqslant c\|x\|_1 \text{ для любого } x \in D(A) \setminus \Omega. \tag{7}$$

Исходя из соотношений (1), (2), (7) получаем

Определение 2. *Линейный оператор A называется ограниченным, если $\exists c \geqslant 0$:*

$$\|Ax\|_2 \leqslant c\|x\|_1 \text{ для любого } x \in D(A) \tag{8}$$

([4, с.22]).

Определение 2 равносильно определению 1.

Действительно, выше показано, что если линейный оператор A ограничен согласно определению 1, то он ограничен согласно определению 2. Пусть линейный оператор A ограничен согласно определению 2. Рассмотрим произвольное ограниченное множество $\Omega \subset D(A)$. Имеем: $\exists M > 0$:

$$\|x\|_1 \leqslant M \text{ для любого } x \in \Omega. \tag{9}$$

В силу (8), (9) $\|Ax\|_2 \leqslant K$ для любого $x \in \Omega$, где $K = cM$. Таким образом, множество $A(\Omega)$ ограничено. Равносильность определений 1, 2 установлена.

Исходя из определения 2, получаем

Определение 3. *Нормой ограниченного линейного оператора A называется наименьшая из констант c, удовлетворяющих условию (8)* ([4, с.22]).

В силу (1) $\|O\| = o$. Далее, из неравенства (8) видно, что $\|A\| > o$ для любого $A \neq O$.

Согласно определению 3

$$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|\|x\|_1 \text{ для любого } x \in D\,(A)\,.$$

Если для конкретного линейного оператора получена оценка вида (8), то A ограничен и, согласно определению 3, $\|A\| \leqslant c$.

Далее целесообразно доказать формулы

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D\,(A) \\ \|x\|_1 \leqslant 1}} \|Ax\|_2, \quad \|A\| = \sup_{\substack{x \in D\,(A) \\ \|x\|_1 = 1}} \|Ax\|_2$$

([4, с.22]) и привести примеры ограниченных линейных операторов (см., например, упражнение 7.12 из [5, с.44]).

Определения 1, 2 позволяют ввести естественным образом понятие неограниченного линейного оператора.

Определение 4. *Линейный оператор A называется неограниченным, если существует ограниченное множество $\Omega \subset D\,(A)$, которое оператор A отображает в неограниченное множество $A\,(\Omega) \subset R\,(A)$.*

Определение 5. *Линейный оператор A называется неограниченным, если*

$$\forall c > 0 \quad \exists x = x\,(c) = x_c \in D\,(A) : \|Ax_c\|_2 > c\|x_c\|_1. \qquad (10)$$

Определения 4, 5 равносильны (это следует из равносильности определений 1, 2).

Элементы $x_c\,(c \in (0, +\infty))$, о которых идёт речь в определении 5, отличны от нулевого элемента o_1, ибо в случае $x_c = o_1$ имели бы $\|o_1\|_1 = 0$, $c\|o_1\|_1 = 0$, $Ao_1 = o_2$, $\|Ao_1\|_2 = \|o_2\|_2 = 0$ и неравенство (10) приняло бы вид $0 > 0$.

Согласно определению 4 справедливо

Замечание 2. *Линейный оператор A является неограниченным, если существует ограниченная последовательность $\{x_n\} \subset D\,(A)$, которую оператор A преобразует в неограниченную последовательность $\{Ax_n\} \subset R\,(A)$.*

Замечание 2 широко используется при доказательстве неограниченности конкретных линейных операторов.

При изучении обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики приходится рассматривать неограниченные линейные дифференциальные операторы. В связи с этим целесообразно привести примеры таких операторов. При этом надо учитывать, что такие примеры должны быть доступными для тех, кому они адресованы.

Рассмотрим банахово пространство $C[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественнозначных функций $x = x(t)$ с линейными операциями $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$, $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$ и нормой $\|x\|_{C[0,1]} = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$ ([6, с.49]). Пусть $C^k[0,1]$ $(k \in \mathbb{N})$ — линейное многообразие в пространстве $C[0,1]$, состоящее из k раз непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций.

Пример 1 ([4, с.36]). $A : C^1[0,1] \subset C[0,1] \to C[0,1]$; по определению, $Ax = x'(t)$ для любого элемента $x = x(t) \in C^1[0,1]$. Линейность оператора A следует из правил дифференцирования $[x(t) + y(t)]' = x'(t) + y'(t)$, $[\alpha x(t)]' = \alpha x'(t)$. Оператор A неограничен, ибо отображает ограниченную последовательность $\{t^n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^1[0,1]$ в неограниченную последовательность $\left\{nt^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset C[0,1]$.

Пример 2. $A : C^2[0,1] \subset C[0,1] \to C[0,1]$; по определению, $Ax = x''(t)$ для любого элемента $x = x(t) \in C^2[0,1]$. Линейность оператора A очевидна. Оператор A неограничен, ибо он преобразует ограниченную последовательность $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty} \subset C^2[0,1]$ в неограниченную последовательность $\left\{-n^2 \sin nt\right\}_{n=1}^{\infty} \subset C[0,1]$.

Пример 3. $A : C^2[0,1] \subset C[0,1] \to C[0,1]$; по определению, $Ax = x(t) + x'(t) + x''(t)$ для любого элемента $x = x(t) \in C^2[0,1]$. Линейность оператора A очевидна. Оператор A неограничен, ибо он переводит ограниченную последовательность $\{t^n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^2[0,1]$ в неограниченную последовательность

$$t+1, t^2+2t+2, ..., t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2}, ...$$

элементов пространства $C[0,1]$.

Далее нужно рассмотреть линейные функционалы как частный случай линейных операторов и привести примеры ограниченных и неограниченных линейных функционалов (см., например, параграф 11 главы 3 из [5]).

В учебных группа с повышенной математической подготовкой нулевые элементы и нормы в пространствах X, Y можно обозначить соответственно одним и тем же символом o, $\|\cdot\|$, т.е. в вышеизложенном материале в обозначениях o_1, o_2, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ индексы 1, 2 можно убрать. Из контекста будет понятно, что означают символы o, $\|\cdot\|$ в каждом конкретном случае.

Литература

1. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — СПб.: Издательство «Лань», 2009. — 272 с.

2. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. — М.: Наука, 1967. — 416 с.

3. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. — 384 с.

4. Вайнберг М.М. Функциональный анализ / М.М. Вайнберг. — М.: Просвещение, 1979. — 128 с.

5. Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 240 с.

6. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

К ВОПРОСУ ДЖ. КЭННОНА И С. УЭЙМЕНТА

О.Д. Фролкина (Москва, МГУ)
olga-frolkina@yandex.ru

Для любого непустого компакта X пространство $Emb(X, \mathbb{R}^N)$ вложений $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, наделенное метрикой $\rho(f,g) = \sup\{d(fx, gx) | x \in X\}$, является сепарабельным. Отсюда непосредственно вытекает известный результат: Пусть $\mathcal{F}$ — несчетное семейство взаимно непересекающихся гомеоморфных копий компакта X в $\mathbb{R}^N$; тогда существует такая последовательность $X_0, X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{F}$, что $X_i \neq X_0$ для каждого $i > 0$ и $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ гомеоморфно сходится к X_0.

Определение 1. *Последовательность множеств $X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$ гомеоморфно сходится к множеству $X_0 \subset \mathbb{R}^N$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое целое число n, что при $i \geqslant n$ имеется гомеоморфизм $h_i : X_0 \cong X_i$, перемещающий точки не более, чем на ε.*

В 1970 г. Дж. Кэннон и С. Уэймент поставили вопрос [1]: Пусть $X_0, X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$ — последовательность попарно непересекающихся континуумов, гомеоморфно сходящаяся к X_0. Верно ли, что существует несчетное семейство попарно непересекающихся гомеоморфных копий X_0 в $\mathbb{R}^N$? (По теореме ван Дауэна, это эквивалентно вопросу о вложимости $X_0 \times \mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^N$, где $\mathcal{C}$ — канторово множество

---

[2]; а согласно результату Тодорчевича [3], это эквивалентно вопросу о вложимости $X_0 \times \mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}^N$.)

Этот вопрос до сих пор открыт. В работе [1] Кэннон и Уэймент получили положительный ответ при дополнительном предположении: если $X_0, X_1, X_2, \ldots$ вложены в $\mathbb{R}^N$ эквивалентно друг другу.

Определение 2. *Два подмножества* $X, X' \subset \mathbb{R}^N$ объемлемо гомеоморфны*, или* эквивалентно вложены*, если существует такой гомеоморфизм* h *пространства* $\mathbb{R}^N$ *на себя, что* $h(X) = X'$*. В этом случае пишем* $h : (\mathbb{R}^N, X) \cong (\mathbb{R}^N, X')$.

Но даже при этом предположении не всегда удается найти такое искомое несчетное семейство, что все его элементы вложены эквивалентно предельному пространству $X_0 \subset \mathbb{R}^N$. Это подтверждается примерами.

Для $N = 2$ см. [4, примеры 3, 4], [5, пример 2]; пространства X_0 имеют довольно сложную структуру. Для $N = 3$ или $N \geqslant 5$ Кэннон и Уэймент построили такую последовательность $X_0, X_1, X_2, \ldots$ попарно непересекающихся диких $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$, что: $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ гомеоморфно сходится к X_0; $(\mathbb{R}^N, X_i) \cong (\mathbb{R}^N, X_0)$ для каждого i; но нет возможности найти несчетное семейство попарно непересекающихся $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$, каждая из которых вложена эквивалентно X_0 [1, с. 568–570].

Определение 3. *Подмножество* $X \subset \mathbb{R}^N$*, гомеоморфное* $(N-1)$*-сфере, называется* плоским*, если оно объемлемо гомеоморфно стандартной единичной сфере, и* диким *в противном случае.*

(О диких вложениях см. книги [6], [7], [8].)

Случай $N = 4$ не был охвачен примерами Кэннона–Уэймента и оставался открытой проблемой в год публикации статьи [1, с. 569–570]. (Построение из [1] возможно для $N = 4$, но в то время не существовало теоремы, которая бы доказывала необходимые свойства примеров.)

В действительности пример Кэннона–Уэймента работает и для размерности 4 — это можно показать, используя [9, Thm. 2.5.1] (эту ссылку сообщил мне профессор Ф. Ансель).

Таким образом, во всех размерностях $N \geqslant 3$ поставленный вопрос имеет отрицательный ответ, а доказательство опирается на сложные результаты из геометрической топологии.

Мы строим новые серии вложений для каждого $N \geqslant 4$. Кроме того, мы рассматриваем более общие компакты, а не только $(N-1)$-сферы. В нашем построении использованы «липкие» канторовы множества В. Крушкаля [10]. В отличие от работы Кэннона и Уэймента, доказательство не требует опоры на сложные результаты Р. Бинга (1957-1961), Дж. Брайента (1968), А.В. Чернавского (1973) и Р. Давермана (1973).

Теорема. *Пусть* $N \geqslant 4$*;* $X \subset S^{N-1}$ *— такой компакт, что для некоторой точки* $q \in X$*, некоторой открытой окрестности* U *точки* q *в* S^{N-1} *и некоторого целого числа* $k \in \{1, \dots, N-1\}$ *выполнено* $(U, U \cap X) \cong (\mathbb{R}^{N-1}, \mathbb{R}^k)$*. Тогда существуют такие вложение* $e : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ *и последовательность попарно непересекающихся компактов* $X_1, X_2, \dots \subset \mathbb{R}^N \setminus e(X)$*, что*

1) $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ *гомеоморфно сходится к* $e(X)$*;*

2) $(\mathbb{R}^N, X_i) \cong (\mathbb{R}^N, e(X))$ *для каждого* $i \in \mathbb{N}$*; и*

3) если $\mathcal{F}$ *— такое дизъюнктное семейство множеств* $Y_\alpha \subset \mathbb{R}^N$*, что* $(\mathbb{R}^N, Y_\alpha) \cong (\mathbb{R}^N, e(X))$ *для каждого* α*, то* $\mathcal{F}$ *содержит не более чем счетное число элементов.*

Кэннон и Уэймент ограничили свой вопрос связными множествами, но он нетривиален и для канторовых множеств; мы рассмотрим и этот случай. Подробности см. в работе [11].

Литература

1. Cannon J.W. An imbedding problem / J.W. Cannon, S.G. Wayment // Proc. Amer. Math. Soc. — 1970. — V. 25. — P. 566–570.

2. van Douwen E.K. Uncountably many pairwise disjoint copies of one metrizable compactum in another / E.K. van Douwen // Topol. Appl. — 1993. — V. 51. — P. 87–91.

3. Todorčević S. Embeddability of $K \times C$ into X / S. Todorčević // Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. — 1997. — V. 114, № 22. — P. 27–35.

4. Bing R.H. Snake-like continua / R.H. Bing // Duke Math. J. — 1951. — V. 18. — P. 653–663.

5. Roberts J.H. Concerning atriodic continua / J.H. Roberts // Monatshefte f. Math. — 1930. — V. 37. — P. 223–230.

6. Келдыш Л.В. Топологические вложения в евклидово пространство / Л.В. Келдыш // Тр. МИАН СССР. — 1966. —Т. 81. —С. 3–184.

7. Moise E.E. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3 / E.E. Moise — Springer-Verlag, 1977. — 262 p.

8. Daverman R.J. Embeddings in Manifolds / R.J. Daverman, D.A. Venema — Providence, RI: American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics 106, 2009. — 468 p.

9. Quinn F. Ends of maps. III: Dimensions 4 and 5 / F. Quinn // J. Differ. Geom. — 1982. — V. 17. — P. 503–521.

10. Krushkal V. Sticky Cantor sets in $\mathbb{R}^d$ / V. Krushkal // J. Topol. Anal. — 2018. — V. 10. — P. 477–482.

11. Frolkina O. New examples in dimensions $N \geqslant 4$ related to a question of J.W. Cannon and S.G. Wayment / O. Frolkina // J. Topol. Anal. — 2025. — V. 17, № 4. —P. 1089–1101.

MAX-ПРИБЛИЖЕНИЯ СОСТАВНЫХ МНОЖЕСТВ

И.Г. Царьков (Москва, МГУ, механико-математический
факультет, Центр фундаментальной и прикладной математики)
tsar@mech.math.msu.su

Нам понадобятся следующие обозначения. Для произвольного множества M в некотором линейном нормированном пространстве X через $\varrho(y, M)$ обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z\in M} \|z-y\|$ $(y \in X)$. Через $P_M(x)$ обозначим множество всех ближайших точек из M для точки $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y-x\| = \varrho(x, M)\}$. Отображение P_M называют метрической проекцией на множество M. Через $B(x, r) = \{y \in X \mid \|y-x\| \leqslant r\}$ и $S(x, r) = \{y \in X \mid \|y-x\| = r\}$ обозначим соответственно шар и сферу с центром x радиуса $r \geqslant 0$. В случае $x = 0$ и $r = 1$ будем вместо указанных обозначений писать единичные шар и сферу: B и S соответственно. Через $\mathring{B}(x, r)$ обозначим открытый шар в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ с центром x радиуса r, т.е. множество $\{y \in X \mid \|y-x\| < r\}$. Для произвольных $x \in X$ и $\delta > 0$ рассмотрим также метрические δ-проекции $P^\delta_M(x)$ и $\mathring{P}^\delta_M(x)$, представляющие собой соответственно множества $\{y \in M \mid \|y-x\| \leqslant \varrho(x, M) + \delta\} = M \cap B(x, \varrho(x, M) + \delta)$ и $\{y \in M \mid \|y-x\| < \varrho(x, M) + \delta\} = M \cap \mathring{B}(x, \varrho(x, M) + \delta)$. Через S^* обозначим единичную сферу в сопряженном пространстве к X.

Аналогично определим понятие *max*-расстояние $r(x) = r(x, M) := \sup\limits_{z\in M} \|z-x\|$ от точки $x \in X$ до непустого ограниченного множества $M \subset X$. Отметим, что функция $r(\cdot, M)$ так же, как и $\varrho(\cdot, M)$, является 1-липшицевой функцией на множестве X. Через $F_M(x)$ обозначим *max*-проекцию на множество M для точки x, т.е. множество $\{z \in M \mid \|z-x\| = r(x, M)\}$ всех далёких точек множества M. Также определим max δ-проекцию, положив в качестве $F^\delta_M(x)$ множество $\{z \in M \mid \|z-x\| \geqslant r(x, M) - \delta\} = M \setminus \mathring{B}(x, r(x, M) - \delta)$ всех δ-далёких точек непустого ограниченного множества M для точки x.

Для произвольного множества $M \subset X$ через $\operatorname{diam} M$ обозначим диаметр множества M, т.е. величину $\sup\limits_{a,b\in M} \|a-b\|$. Для непустого ограниченного множества $M \subset X$ через $Z(M)$ обозначим множество чебышевских центров множества M, т.е. множество $\{x \in X \mid r(x, M) = r(M) := \inf\limits_{x\in X} r(x, M)\}$.

Определение 1. *Ограниченное непустое множество M в линейном нормированном пространстве называется множеством max-существования относительно некоторого подмножества $E \subset X$, если $F_M(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in E$.*

Изучение различных свойств множеств и их max-аппроксимативных свойств является важной задачей, как одной из задач приближения классом класса. Кроме того, это оказывается полезным в различных приложениях, особенно в тех, где требуется предварительно разбивать множество с большим количеством точек на сгущающиеся подмножества. Целью этой работы является выявление необходимых условий max-чебышевости относительно прямой $\ell \subset X$ множеств $M \subset X$, составленное из не более, чем счетного набора множеств. Такие условия удобно формулировать, как досточные условия отсутствия свойства max-чебышевости (относительно прямой $\ell \subset X$). Далее исследуются условия на множество M, составленного из не более, чем счетного набора множеств, при которых оно не является max-чебышевским, т.е. $F_M(x)$ одноточечно для всех точек X, кроме, быть может, чебышевских центров. Далее изучаются достаточные условия max-солнечности max-чебышевских множеств.

Определение 2. *Пусть M – непустое подмножество линейного нормированного пространства X, $x^* \in S^*$. Через $D(x^*, M)$ обозначим x^*-ширину этого множества, т.е. величину $\sup\limits_{x,y\in M} |x^*(x-y)|$.*

Теорема 1. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $A \subset \mathbb{N}$ – некоторое множество натуральных индексов, $e \in S$ – точка гладкости сферы в смысле Фреше, $\ell \subset X$ – прямая, параллельная вектору e, и $x^* \in S^*$ – единственный опорный функционал к S в точке e, $\{M_i\}_{i\in A}$ — набор множеств max-существования относительно прямой ℓ с попарно непересекающимися их замыканиями в линейном нормированном пространстве X, $M = \bigcup\limits_{i\in A} M_i$. Предположим, что $F_M(x)$ связно и непусто для всех $x \in \ell$. Тогда существует индекс $i_0 \in A$, для которого $D(x^*, M) = D(x^*, M_{i_0})$.*

Определение 3. *Ограниченное множество M в линейном нормированном пространстве X называется max-чебышевским относительно множества $E \subset X$, если множество $F_M(x)$ одноточечно для всех точек $x \in E$. Если при этом $E = X \setminus Z(M)$, где $Z(M) := \{z \in X \mid r(z, M) = r(M) = \inf\limits_{x \in X} r(x)\}$, то множество M называется max-чебышевским.*

Следствие 1. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $A \subset \mathbb{N}$ – некоторое непустое множество натуральных индексов, $e \in S$ – точка гладкости сферы в смысле Фреше, $\ell \subset X$ – прямая, параллельная вектору e, и $x^* \in S^*$ – единственный опорный функционал к S в точке e, $\{M_i\}_{i \in A}$ – набор множеств max-существования относительно прямой ℓ с попарно непересекающимися их замыканиями в линейном нормированном пространстве X, $M = \bigcup\limits_{i \in A} M_i$. Тогда, если $D(x^*, M) > D(x^*, M_i)$ для всех индексов $i \in A$, то для некоторого $x \in \ell$ множество $F_M(x)$ либо пусто, либо несвязно. В частности, в этом случае множество M не является max-чебышевским относительно прямой ℓ.*

Теорема 2. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $A \subset \mathbb{N}$ – некоторое множество натуральных индексов, все точки S являются точками ее гладкости в смысле Фреше, $\{M_i\}_{i \in A}$ – набор множеств max-существования относительно $M \setminus Z(M)$, $M = \bigcup\limits_{i \in A} M_i$. Тогда, если $D(x^*, M) > D(x^*, M_i \cup M_j)$ для некоторого функционала $x^* \in S^*$, достигающего своей нормы, и всех индексов $i, j \in A$, то множество M не является max-чебышевским.*

Теорема 3. *Пусть $A \subset \mathbb{N}$ — некоторое множество натуральных индексов, все точки S являются точками ее гладкости в смысле Фреше, $\{M_i\}_{i \in A}$ – набор компактов в линейном нормированном пространстве X, $M = \bigcup\limits_{i \in A} M_i$, и $F_{M_i}(x) \cap F_{M_j}(x) = \varnothing$ для всех $x \in X$: $\varrho(x, M_i) = \varrho(x, M_j)$ и различных индексов i, j. Тогда, если $D(x^*, M) > D(x^*, M_i)$ для некоторого функционала $x^* \in S^*$, достигающего своей нормы, и для всех индексов $i \in A$, то множество M не является max-чебышевским.*

Определение 4. *Множество E в линейном нормированном пространстве называется нигде не плотным в коразмерности $n \in \mathbb{N}$, если любая линейная проекция на некоторую плоскость коразмерности n является в ней нигде не плотным множеством.*

Теорема 4. *Пусть $A \subset \mathbb{N}$ — некоторое множество натуральных индексов, все точки S являются точками ее гладкости* *в смысле Фреше, $\{M_i\}_{i\in A}$ – набор компактов в банаховом пространстве X, $M = \bigcup\limits_{i\in A} M_i$, и $F_{M_i}(x) \cap F_{M_j}(x) = \varnothing$ для всех $x \in X$: $r(x, M_i) = r(x, M_j)$ и различных индексов i, j, множество $Z(M)$ является нигде не плотным в коразмерности 1. Тогда, если $D(x_i^*, M) > D(x_i^*, M_i)$ для каждого индексов $i \in A$ и некоторого функционала $x_i^* \in S^*$, достигающего своей нормы, то множество M не является max-чебышевским.*

Определение 5. *Непустое ограниченное множество M в линейном нормированном пространстве X называется max-солнцем, если для всех точек $x \in X\setminus Z(M)$ существует точка $y \in F_M(x)$ такая, что $y \in F_M(z)$ для любых точек $z \in [x, y)$: $r(z, M) > r(M)$. При этом, если дополнительно множество $F_M(x)$ одноточечно для всех точек $x \in X\setminus Z(M)$, то M называется max-чебышевским солнцем.*

Теорема 5. *Пусть $X \in (LUR)$ — банахово пространство, $M \subset X$ – непустое ограниченное множество, отображение $F_M : X \setminus Z(M) \to M$ однозначно и непрерывно. Тогда M является max-чебышевским солнцем.*

Следствие 2. *Пусть X — локально равномерно выпуклое банахово пространство, $M \subset X$ – max-чебышевского множества с непрерывной max-проекцией на $X \setminus Z(M)$ и с единственным чебышевским центром $x \in X$ верны включения $S(x, r(M)) \subset M \subset B(x, r(M))$.*

К ВОПРОСУ О СВОЙСТВАХ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА[1]

В.Ф. Чистяков, Е.В. Чистякова (Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
chist@icc.ru, chistyak@gmail.com

В докладе рассматриваются системы интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) вида

$$\Lambda_1(z, \mathcal{V}z) := \mathcal{A}(z, \mathcal{V}z, t)z^{(1)} + \mathcal{B}(z, \mathcal{V}z, t) = 0,\ t \in T = [\alpha, \beta], \qquad (1)$$

где $\mathcal{A}(\xi, \zeta, t) - (n \times n)$-заданная матрица, $\mathcal{B}(\xi, \zeta, t)$, -заданная вектор-функция, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\zeta \in \mathbf{R}^m$, $z \equiv z(t)$–искомая вектор-функция,

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ по проекту «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями » (№ гос. регистрации 121041300060-4).

$z^{(i)}(t)=(d/dt)^i z(t),\ i=0,1,\cdots,\ z^{(0)}(t)=z(t),\ \mathcal{V}z=\int\limits_{\alpha}^{t}\mathcal{K}(t,s,z(s))ds,$ $\mathcal{K}(t,s,\xi)$ – m-мерная вектор-функция. Предполагается, что матрица $\mathcal{A}(\xi,\zeta,t)$ и вектор-функция $\mathcal{B}(\xi,\zeta,t)$, $\mathcal{K}(t,s,\xi)$ достаточно гладкие в своих областях определения и система (1) удовлетворяет условию

$$\det\mathcal{A}(\xi,\zeta,t)=0\ \forall(\xi,\zeta,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times T, \tag{2}$$

Под решением системы (1) понимается любая дифференцируемая на отрезке $T_\alpha=[\alpha,\alpha+\delta]\subseteq T$, вектор-функция $z(t)$, которая обращает систему (1) в тождество на T_α при подстановке.

При изучении систем вида (1) обычно ставится задача Коши: предполагается, что в начальной точке отрезка T решения систем удовлетворяют условиям

$$z(\alpha)=b, \tag{3}$$

где b—заданный вектор из $\mathbf{R}^n$.

В исследованиях на основе, которых подготовлен доклад, существенно используются результаты статьи [1].

Очевидно, что для существования решений задач Коши для систем (1) необходимо (но не всегда достаточно) выполнение критерия Кронекера-Капелли в точке $t=\alpha$ для вектора $z^{(1)}(\alpha)$, а именно:

$$\mathrm{rank}\,\mathcal{A}(b,0,\alpha)=\mathrm{rank}\mathcal{A}(b,0,\alpha)|-\mathcal{B}(b,0,\alpha). \tag{4}$$

Поэтому начальные задачи для систем (1) могут ставится ниже в виде соотношений

$$\mathrm{P}z(\alpha)=\mathrm{b}, \tag{5}$$

где заданы матрица P размерности $(\nu\times n)$ полного ранга, и вектор b, $\mathrm{rank}\ \mathrm{P}=\nu,\ \nu\leqslant n$. Задача (1), (5) при $\mathrm{P}=E_n$, где E_n—единичная матрица размерности n, совпадает с задачей Кощи, $\mathrm{b}=b$.

Основными характеристиками вырожденных систем ИДУ, в частности, ДАУ авторы полагают целочисленные параметры, называемые: 1) индексом; 2) размерностью многообразия решений.

Индекс характеризует сложность внутренней структуры систем ИДУ, а размерность многообразия решений определяет допустимый произвол в выборе начальных и краевых условий. Важную информацию о структуре многообразия решений дает знание расположения особых точек в области определения изучаемой системы.

Под особой точкой системы (1) неформально ниже понимаются точка на отрезке T, при наличии которой система не имеет *решений на T, теряется единственность, меняется размерность многообразия решений и т.д.*

Понятие индекса до сих пор являются предметом дискуссий. Приведем определения основных характеристик систем ИДУ используемые авторами.

Определение 1. *Пусть вектор-функция $z(t,c)\,:\,T_\alpha\times\mathbf{U}\to\mathbf{R}^n$, $\mathbf{U}\subseteq\mathbf{R}^d$, обладает свойствами:* I. *$z(t,c)\in\mathbf{C}^1(T_\alpha)$ $\forall c\in\mathbf{U}$ и является решением системы (1);* II. $\operatorname{rank} Z(t,c)=d$ $\forall t\in T_\alpha,\ c\in\mathbf{U}$, *где $Z(t,c)=\partial z(t,c)/\partial c$. Тогда семейство функций $z(t,c)$ будем называть регулярным многообразием решений системы ИДУ (1), а число d его размерностью.*

Из определения 1 следует, что параметр ν в формуле (5) для получения замкнутой системы относительно вектора c нужно выбирать как $\nu=d$.

Определение 2. *Если существует оператор*

$$\Omega_l(u,\mathcal{V}u):=\sum_{j=0}^{l}\mathcal{L}_j\left(\mathrm{d}_\eta[u],\mathrm{d}_l[\mathcal{V}u],t\right)(d/dt)^j,$$

где $\mathcal{L}_j(\vartheta,\varpi,t)-(n\times n)$-матрицы гладкие в области $\mathbf{R}^{n(\eta+1)}\times\mathbf{R}^{m(l+1)}$ $\times T$, $\mathrm{d}_i[\cdot]=\begin{pmatrix}E_n & (d/dt)E_n & \cdots & (d/dt)^iE_n\end{pmatrix}^\top$, $i=0,1,\cdots$, $\top-$ символ транспонирования, $\vartheta=(g_0,g_1,\cdots,g_\eta)$, $g_j\in\mathbf{R}^n$, $j=\overline{0,\eta}$, $\varpi=(v_0,v_1,\cdots,v_l)$, $v_j\in\mathbf{R}^n$, $j=\overline{0,l}$, обладающие свойством

$$\Omega_l(u,\mathcal{V}u)\circ\Lambda_1(u,\mathcal{V}u)=\tilde{\Lambda}_1(u,\mathrm{d}_l[\mathcal{V}u])\ \forall u=u(t)\in\mathbf{C}^{\max\{l,\eta\}+1}(T),$$

где

$$\tilde{\Lambda}_1(u,\mathrm{d}_l[\mathcal{V}u])=\tilde{\mathcal{A}}(u,\mathrm{d}_l[\mathcal{V}u],t)u^{(1)}+\tilde{\mathcal{B}}(u,\mathrm{d}_l[\mathcal{V}u],t),\qquad(6)$$

$\det\ \tilde{\mathcal{A}}(b,0,\alpha)\neq0$ *начальной точке (3), то оператор называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО) для системы (1), а наименьшие возможное число* $\mathrm{l}=\max\{l,\eta\}$ *называется ее индексом (левым).*

Пример 1. *Рассмотрим вырожденную систему ИДУ*

$$\Lambda_1(z,\mathcal{V}z)=\begin{pmatrix}z_2\mathcal{V}_1z & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1+e^t\mathcal{V}_2z\\ z_2\end{pmatrix}=0,\qquad(7)$$

где $t\in T=[0,1]$, $z\equiv z(t)=\begin{pmatrix}z_1 & z_2\end{pmatrix}^\top$, $\mathcal{V}z=\int_0^t\begin{pmatrix}z_1(s) & z_2(s)\end{pmatrix}^\top ds$, $\mathcal{V}_1z=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\mathcal{V}z$, $\mathcal{V}_2z=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\mathcal{V}z$, которая имеет единственное *решение* $z(t) = 0$. *Для любой вектор-функции* $u \in \mathbf{C}^2(T)$ *имеем*

$$\Omega_1(u, \mathcal{V}u) \circ \Lambda_1(u, \mathcal{V}u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t u_2 + e^t \mathcal{V}_2 u \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\Omega_1(u, \mathcal{V}u) = \begin{pmatrix} 0 & -[\ddot{u}_1 \mathcal{V}_1 u + \dot{u}_1 u_1] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\dot{u}_1 \mathcal{V}_1 u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dfrac{d}{dt}$. *Согласно определению 1 размерность многообразия решений* $d = 0$ *и определению 2 индекс системы (7) равен 2.*

Определение 3. *Пусть 1) существует решение* $z = z(t) \in \mathbf{C}^1(T_\alpha)$ *системы (1); 2) в равенстве (6)* $\det \tilde{\mathcal{A}}(z, \mathrm{d}_l[\mathcal{V}z], t)|_{t=t_*} = 0$, *где* t_* *изолированная точка на* T_α *Тогда точку* t_* *будем называть особой точкой системы (1).*

Приведем простейшую теорему существования.

Теорема 1. *Пусть для задачи (1), (5) выполнены условия:*
1) $\mathcal{A}(\xi, \zeta, t)$, $\mathcal{B}(\xi, \zeta, t) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times T$;
2) найдется вектор $c \in \mathbf{R}^n$, *для которого выполнено условие (4):*

$$\mathrm{rank}\, \mathcal{A}(\mathrm{g}, 0, \alpha) = \mathrm{rank}\, (\mathcal{A}(\mathrm{g}, 0, \alpha)| - \mathcal{B}(\mathrm{g}, 0, \alpha)),$$

$$\mathrm{g} = \mathrm{P}^{-}\mathrm{b} + (E_n - \mathrm{P}^{-}\mathrm{P})c,$$

где матрица P^{-} *полуобратная к матрице* P *а именно* $\mathrm{P} = \mathrm{P}\mathrm{P}^{-}\mathrm{P}$;
3) $\mathrm{rank}\, \mathcal{A}(\mathrm{g}, 0, \alpha) = \max\, \{\mathrm{rank}\, \mathcal{A}(\xi, \zeta, t),\ (\xi, \zeta, t) \in \mathcal{O}\}$, *где* $\mathcal{O}-$ *некоторая окрестность точки* $(\mathrm{g}, 0, \alpha)$;
4) в точке $(\mathrm{g}, 0, \alpha)$ *выполнен критерий «ранг-степень»:*

$$\mathrm{rank}\, \mathcal{A}(\mathrm{g}, 0, \alpha) = \deg\ \det[\lambda \mathcal{A}(\mathrm{g}, 0, \alpha) + \mathcal{C}(\mathrm{g}, 0, \alpha)] = r, \tag{8}$$

где $\lambda-$*параметр (в общем случае комплексный),*

$$\mathcal{C}(\xi, \zeta, t) = \frac{\partial}{\partial \xi}[\mathcal{B}(\xi, \zeta, t) + \mathcal{A}(\xi, \zeta, t)\varsigma],$$

$\varsigma-$*произвольное решение системы* $\mathcal{A}(\mathrm{g}, 0, \alpha)\varsigma = -\mathcal{B}(\mathrm{g}, 0, \alpha)$.

Тогда: 1. Индекс системы (1) равен 1; 2. Существует отрезок $T_\alpha = [\alpha, \alpha + \delta] \subseteq T$, *на котором определено единственное решение задачи (1), (5)* $z \equiv z(t)$.

Лемма 1. *Пусть выполнено соотношение*

$$\det[\lambda \mathcal{A}(z, \mathcal{V}z, t) + \mathcal{C}(z, \mathcal{V}z, t)] = \mathbf{a}_0(t)\lambda^r + \cdots,$$

где использованы обозначения из формулы (8), $z = z(t)$–решение задачи (1), (5), причем изолированная точка $t_* \in T_\alpha$ является корнем уравнения $\mathbf{a}_0(t) = 0$: $\mathbf{a}_0(t_*) = 0$. Тогда точка t_* является особой точкой системы (1).

Решение задачи (1), (5) может быть неединственным.

Пример 2. *Рассмотрим начальную задачу:* $\Lambda_1(y) =$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ 1 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot y_1 \\ \dot y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3e^t y_1 \\ 3y_2/y_1 \end{pmatrix} = 0,\ \mathrm{P}y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = 2,$$

где $t \in T = [0,\ 1],\ y \equiv y(t),\ y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}^\top$. *Здесь и ниже* $\dot y \equiv dy/dt$. *Согласно* ([2], с. 33), *все начальные вектора* $y(0)$ *принадлежат многообразию* $\mathrm{P}^-\mathrm{b} + (E_2 - \mathrm{P}^-\mathrm{P})c$, *где вектор* c *пробегает* $\mathbf{R}^2$. *Производя необходимые вычисления из условия (4) получим*

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3(3/2 - c_2/2) \\ 3c_2/(3/2 - c_2/2) \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_2^2 - 10c_2 + 9 = 0.$$

Здесь $c_2 \in \{1, 9\}$. *Соответствующие начальные данные* $y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$, $y(0) = \begin{pmatrix} -3 & 9 \end{pmatrix}^\top$. *В обоих случаях выполнены условия теоремы 1. В первом случае решение* $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \end{pmatrix}^\top$. *Функция* $\mathbf{a}_0(t)$ *из леммы 1 имеет вид выражения* $-3(e^{-t} + 2)$. *Во втором случае аналитическое выражение решения неизвестно.*

Пример 3. *Рассмотрим задачу Коши:* $\Lambda_1(y) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 & 0 \end{pmatrix} \dot y + \begin{pmatrix} -y_3 \\ -y_4 \\ e^t y_3 - y_2 \\ [-e^t y_4 - e^t y_2 + 3e^{3t} - 2e^{2t}] \end{pmatrix} = 0, \qquad (9)$$

$t \in T = [0, 1],\ y \equiv y(t),\ y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}^\top,$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) & y_4(0) \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^\top. \qquad (10)$$

Можно проверить, что условия теоремы 1 здесь выполнены.

Задача (9), (10) имеет на T решение $y(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} & e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix}^\top$, *причем* $\begin{pmatrix} \dot y_1(t) & \dot y_2(t) \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} y_3(t) & y_4(t) \end{pmatrix}^\top$. *Функция* $\mathbf{a}_0(t)$ *из леммы 1 имеет вид выражения* $(-e^t + 2)$ *и соответствующее уравнение имеет корень* $t_* = \ln(2)$, *которая является особой точкой системы (9).*

В точке $((y_1(t_*)\quad y_2(t_*))^\top, t_*) = ((2\quad 4\quad)^\top, \ln(2))$ *ответвляются компоненты*

$$(y_1(t)\quad y_2(t))^\top = (2 - e^t + e^{2t}/2\quad e^{3t} - e^{2t})^\top .$$

В докладе также обсуждаются вопросы численного решения начальных задач вида (1), (5).

Литература

1. Чистякова Е.В. О разрешимости вырожденных систем квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений общего вида / Е.В.Чистякова, В.Ф.Чистяков // Вычислительные технологии.— 2011.— Т. 16, № 5.— С. 100-114.

2. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев.— Новосибирск: Наука, 1980.—222 с.

ДИНАМИКА ПЛОСКОГО ИНТЕГРИРУЕМОГО БИЛЛИАРДА, ОГРАНИЧЕННОГО ПСЕВДООКРУЖНОСТЯМИ: БЕЗ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ СИЛ И С ДОБАВЛЕНИЕМ ПОТЕНЦИАЛА

Е.Д. Шадрина (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
ekaterina.shadrina@math.msu.ru

Математический биллиард — это динамическая система, описывающая движение материальной точки в некоторой области $\mathbb{R}^2$, ограниченной гладкой регулярной замкнутой кривой. При движении материальной точки будем требовать, чтобы сохранялась длина вектора скорости, а отражение на границе области совершалось по стандартному закону: угол падения равен углу отражения.

Рассмотрим на плоскости Минковского семейство псевдоокружностей, которое определяется соотношением: $x^2 - y^2 = a - \lambda$, где $a > 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Будем исследовать математические биллиарды, ограниченные прямыми, проходящими через начало координат, и псевдоокружностями данного семейства (рис.1, рис.2).

Оказывается, такие биллиарды — интегрируемы.

Теорема 1. *Математический биллиард на плоскости Минковского, ограниченный прямыми, проходящими через начало координат, и псевдоокружностями рассматриваемого семейства, является интегрируемым. Первые интегралы данной системы — функ-*

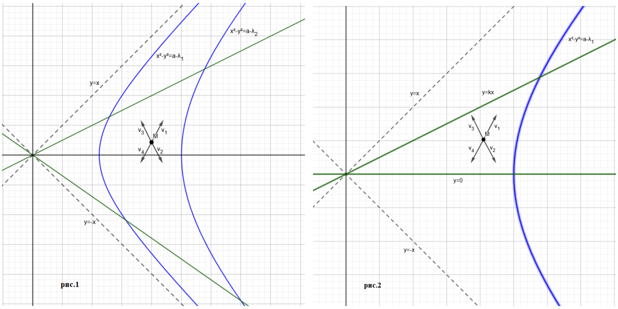


Рис. 1-2: Математические биллиарды

ции $\Lambda = a+\frac{(v_2x-v_1y)^2}{v_1^2-v_2^2}, H = v_1^2-v_2^2$*; где* $v = (v_1, v_2)$ *— вектор скорости частицы,* (x, y) *— точка биллиарда.*

С геометрической точки зрения функция Λ — это значение параметра каустики (псевдоокружности), которой касаются прямые, вдоль которых движется частица.

Будем изучать все возможные траектории при фиксированных значениях полученных первых интегралов в биллиардах рассматриваемого типа. Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. *Рассмотрим математический биллиард на плоскости Минковского в области на рис.1,* $a > \lambda_1 > \lambda_2$*. Пусть* $M \subset Q^3$ *— поверхность уровня интеграла* Λ*. Тогда:*

При $H < 0, \Lambda = \lambda_1$ *поверхность* M *гомеоморфна окружности;*

При $H < 0, \Lambda < \lambda_1$ *поверхность* M *гомеоморфна двумерному тору;*

При $H > 0, \Lambda = a$ *поверхность* M *гомеоморфна цилиндру;*

При $H > 0, \Lambda > a$ *поверхность* M *гомеоморфна двумерному тору;*

При всех остальных значениях функций Λ *и* H *траекторий нет.*

Утверждение 2. *Рассмотрим математический биллиард на плоскости Минковского в области на рис.2,* $a > \lambda_1$*. Тогда*

При $H \neq 0$*,* $\Lambda \neq a$ *если начальный вектор скорости задаёт прямую, не проходящую через начало координат, то траектория частицы — ломаная, которая сколь угодно близко приближается к некоторому отрезку, отделенному от начала координат;*

При всех остальных значениях функций Λ *и* H *траекторий нет.*

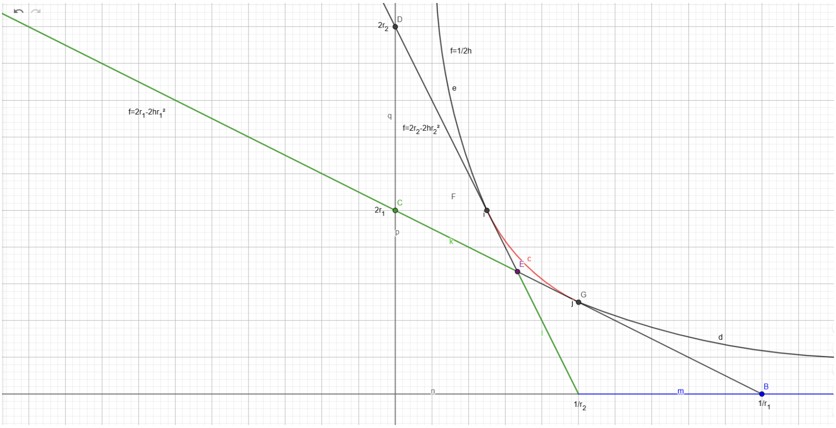


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма

Пусть теперь на плоскости Минковского в области на рис.1 при движении материальной точки на неё действует потенциал $U(x^2-y^2)$. Оказывается, и такие биллиарды — интегрируемы.

Теорема 2. *Математический биллиард с добавлением потенциала $U(x^2-y^2)$ на плоскости Минковского, ограниченный прямыми, проходящими через начало координат, и псевдоокружностями рассматриваемого семейства, является интегрируемым. Первые интегралы данной системы — функции $H = \frac{1}{2}(p_x^2 - p_y^2) + U(x^2-y^2), F = (p_y x + p_x y)^2$; где $p = (p_x, p_y)$ — импульс частицы, (x, y) — точка биллиарда.*

Зафиксируем значения первых интегралов $H = h$ и $F = f$ и положим $U(x^2-y^2) := \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. Справедлива следующая:

Теорема 3. *Бифуркационная диаграмма математического биллиарда с потенциалом $U(x^2-y^2) := \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$ на плоскости Минковского в области на рис.1 имеет следующий вид:*

Красной дуге гиперболы соответствует слой, гомеоморфный особому слою атома B;

Зелёному лучу и интервалу соответствует слой, гомеоморфный окружности;

Фиолетовой точке соответствует слой, гомеоморфный двум непересекающимся окружностям;

Синему лучу соответствует слой, гомеоморфный цилиндру; при этом $r_1 := \sqrt{a-\lambda_1}, r_2 := \sqrt{a-\lambda_2}$.

Литература

1. Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I / А.Т. Фоменко, А.В. Болсинов // Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. — С. 444.

2. Каргинова Е.Е. Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского / Е.Е. Каргинова // Матем. сб. — 2020. — Т. 211, № 1. — С. 3–31.

3. Фоменко А.Т. Биллиарды и интегрируемые системы / А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина // УМН. — 2023. — Т. 78, вып. 5 (473). — С. 93–176.

4. Пустовойтов С.Е. Топологический анализ биллиарда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле // С.Е. Пустовойтов// Матем. сб. — 2021. — Т. 212, № 2. — С. 81–105.

ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАТИВНЫМ ГЕНЕРАТОРОМ СДВИГА

М.В. Шамолин (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)
shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к четномерному многообразию. При этом силовое поле (генератор сдвига в системе) разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Как известно, нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) [1, 2, 3] облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для

них коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4, 5, 6]). Наш подход в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m-1$ независимый нетривиальный тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий.

Понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. для систем классической механики вполне естественны. Поскольку в работе изучаются системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Исследование «в целом» начинается с изучения приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой ускорение движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, рассматриваются как обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат касательного пространства (по одной из квазискоростей системы), получим силовое поле (генератор сдвига) с диссипацией разного знака.

Словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» — это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В предлагаемой работе силовое поле (генератор сдвига системы) разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем четномерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

Литература

1. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763–766.

2. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 117–148.

3. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования / М.В. Шамолин // Доклады РАН. — 2015. — Т. 464, № 6. — С. 688–692.

4. Шамолин М.В. Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 512, № 1. — С. 10–17.

5. Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле / М.В. Шамолин // Доклады РАН. — 2015. — Т. 461, № 5. — С. 533–536.

6. Шамолин М.В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления — 2022. — Т. 507, № 1. — С. 86–92.

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)
nashananin@inbox.ru

Пусть Ω – открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Говорят, что ростки обобщенных функций $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равны в точке $x^0 \in \Omega$ и пишут $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$, если существует открытая окрестность $V \subset \Omega$ точки x^0, в которой $u^1(x) = u^2(x)$, то есть для любой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset V$ выполняется равенство $\langle u^1, \varphi\rangle = \langle u^2, \varphi\rangle$. Заметим, что из равенства ростков $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ следует равенство ростков образов $(Pu^1)_{x^0} \cong (Pu^2)_{x^0}$ для любого дифференциального оператора вида

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha,\ x \in \Omega,\ a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega),\ D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}. \qquad (1)$$

Пусть $\chi : \Omega \to \Omega$ – диффеоморфизм множества Ω на себя и $g_\chi : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ –линейное отображение, удовлетворяющее следующему условию локальности:

$$\operatorname{supp} g_\chi(u) \subset \chi(\operatorname{supp} u). \qquad (2)$$

Тогда композиция отображений $\chi^* \circ g_\chi : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ является линейным отображением, которое не расширяет носители:

$$\operatorname{supp}(\chi^* \circ g_\chi)(u) \subset \operatorname{supp} u.$$

В этом случае в силу теоремы Петре [1] для каждого компактного подмножества $K \subset \Omega$ найдется линейный дифференциальный оператор $Q_K(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m(K)} q_{\alpha,K}(x)D^\alpha$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $q_{\alpha,K}(x) \in C^\infty(K)$, такой, что $(\chi^* \circ g_\chi)(u) = Q_K(x,D)u$ при $u \in C_0^\infty(\Omega)$ с носителем $\operatorname{supp} u \subset K$. Таким образом, $g_\chi u = (\chi^{-1})^* Q_K(x,D)u$ при $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Теперь из

плотности множества $C_0^\infty(\Omega)$ в множестве $\mathcal{D}'(\Omega)$ полученного представления отображения g_χ и теоремы 2.1.8 из монографии Л. Хермандера [2] следует, что отображение можно продолжить до непрерывного отображения $g_\chi : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$. Отметим, что для любых точки $x^0 \in \Omega$ и функции $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ росток образа $(g_\chi(u))_{\chi(x^0)}$ в точке $\chi(x^0)$ однозначно определяется ростком u_{x^0} в точке x^0.

Определение 1.*Будем говорить, что функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ является g_χ-четной (g_χ-нечетной) в точке $x^0 \in \Omega$, если*

$$(g_\chi(f))_{x^0} \cong (-1)^k f_{x^0},$$

где $k = 0$ $\big($соответстенно, $k = 1\big)$.

Определение 2. *Будем говорить, что дифференциальный оператор $P(x, D) : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ вида (1) сохраняет (меняет) g_χ-четность в точке $x^0 \in \Omega$, если для любой функции $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ выполняется равенство*

$$(g_\chi(P(x, D)u)_{x^0} \cong (-1)^k (P(x, D) g_\chi(u))_{x^0}$$

при $k = 0$ $\big($соответстенно, при $k = 1\big)$.

Главный символ оператора

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,\ (x, \xi) \in T^*\Omega,$$

в каждой точке $x \in \Omega$ определяет симметрическую m-линейную форму

$$\mathcal{F}_x(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m = 1}^{n} \frac{\partial^m p_m}{\partial \xi_{j_1} \dots \partial \xi_{j_m}}(x, \xi) \eta^1_{j_1} \dots \eta^m_{j_m}$$

на кокасательном пространстве $T_x^*\Omega$. Предположим, что ядро $K_x(P) \subset T_x^*\Omega$ формы $\mathcal{F}_x$ удовлетворяет условиям:

(1) $\bigcup\limits_{x \in \Omega} (x, K_x(P)) = \{(x, \xi) \mid p_m(x, \xi) = 0\}$;

(2) коразмерность ядра $K_x(P)$ не зависит от x и равна k.

Введем обозначения: $\mathcal{T}\Omega$ – модуль C^∞-сечений касательного расслоения, $\mathcal{H}^1$ – подмодуль C^∞-сечений k-мерного подрасслоения

$$L(P) = \{(x, \tau) \in T\Omega \mid \tau(K_x(P)) = 0\}$$

касательного расслоения $T\Omega$ и $\mathcal{H}^{j+1}$ – подмодуль, порожденный векторными полями из $\mathcal{H}^1$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^j]$. Предположим, что (3) найдется такое число r, что

$$\mathcal{H}^1 \subsetneqq \mathcal{H}^2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathcal{H}^r = \mathcal{H}^{r+1} \subset \mathcal{T}\Omega,$$

причем подпространство $\mathcal{H}^r_x \subset T_x\Omega$ имеет размерность m, не зависящую от точки $x \in \Omega$.

Если условие (3) выполнено, то в силу теоремы Фробениуса через каждую точку x^0 проходит максимальное, связное, интегральное для дифференциальной системы $\mathcal{H}^r$ подмногообразие $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$.

Предположим, что коэффициенты оператора $P(x,D)$ вида (1) являются вещественно аналитическими функциями, главный символ оператора удовлетворяет условиям (1)– (3). В теореме ниже приведены достаточные условия, при выполнении которых свойство g_χ-четности ростков решений в точке x^0 продолжается вдоль интегральных подмногообразий $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$.

Теорема 1. *Пусть функция $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ является решением уравнения$P(x,D)u = f$,причем $(g_\chi(u))_{x^0} \cong u_{x^0}$, $x^0 \in \Omega$. Тогда $(g_\chi(u))_x \cong u_x$ во всех точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$, если выполнено одно из условий:*

1) $P(x,D)$ сохраняет g_χ-четность в точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$ и функция $f(x)$ яляется g_χ-четной в точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$;

2) $P(x,D)$ меняет g_χ-четность в точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$ и функция $f(x)$ яляется g_χ-нечетной в точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$.

Аналогичным свойством продолжения обладает g_χ-нечетность ростков:

Теорема 2. *Пусть функция $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ является решением уравнения $P(x,D)u = f$, причем $(g_\chi(u))_{x^0} \cong -u_{x^0}$, $x^0 \in \Omega$. Тогда $(g_\chi(u))_x \cong -u_x$ во всех точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$, если выполнено одно из условий:*

1) $P(x,D)$ сохраняет g_χ-четность в точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$ и функция $f(x)$ яляется g_χ-нечетной в точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$;

2) $P(x,D)$ меняет g_χ-четность в точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$ и функция $f(x)$ яляется g_χ-четной в точках $M_{\mathcal{H}^r,x^0}$.

Утверждения теорем вытекают из теорем о продолжении решений дифференциальных уравнений, доказанных в статье [3].

Литература

1. Peetre J. Rectification à l'article «Une caractérisation abstraite des opérateurs différenttiels» /Peetre J // Math. Scand —1960. — V. 8, № 1. — P. 116–120.

2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. (т. 1)/ Л. Хермандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.

3. Шананин Н.А. О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами / Н.А. Шананин // Матем. заметки — 2022. — Т. 111, № 6. — С. 921–928.

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

А.Н. Шелковой (Воронеж, ВГТУ)
shelkovoj.aleksandr@mail.ru

Пусть $L_2[0,2\pi]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x,y) = \int\limits_0^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau$. Через $W_2^2[0,2\pi]$ обозначим пространство Соболева

$$\{x \in L_2[0,2\pi] : x' \text{ абсолютно непрерывна}, \ x'' \in L_2[0,2\pi]\}.$$

Рассматривается дифференциальный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0,2\pi]$, порождаемый дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}y = -\ddot{y} + y \tag{1}$$

и периодическими нелокальными краевыми условиями

$$\begin{gathered} y(0) = y(2\pi) + \int\limits_0^{2\pi} a_0(t)y(t)dt, \\ \dot{y}(0) = \dot{y}(2\pi) + \int\limits_0^{2\pi} a_1(t)y(t)dt. \end{gathered} \tag{2}$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

Здесь a_0 и a_1 - функции из $L_2[0, 2\pi]$.

Методом подобных операторов получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций этого оператора.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. — 164 с.

2. Шелковой А.Н. Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Вестник факультета прикладной математики и механики. — 2000. — № 2. — С. 226–235.

3. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2018. — Т. 21, № 4. — С. 18–33.

4. Шелковой А.Н. Спектральный анализ интегро-дифференциального оператора с вырожденным ядром / А.Н. Шелковой // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2020. — Т. 23, № 3. — С. 76–89.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОВЫХ РАЗРЯДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Ю. Шемахин, О.В. Починка (Нижний Новгород, ВШЭ)
ashemakhin@yandex.ru

В работе проведено исследование математических моделей газовых разрядов пониженного давления, которые используются для обработки материалов различной физической природы, как рабочее тело плазменных двигателей, в экспериментах с пылевыми частицами. В частности рассмотрен высокочастотный инукционный разряд пониженного давления. Поставлены задачи исследования моделей с использованием теории динамических систем. Поставлена задача расчета уравнения неразрывности электронов на основв уравнения Шотки [1] в форме динамической системы

$$\dot{x} = u; \dot{u} = -\frac{\nu}{D_a}x - \frac{1}{t}u; u|_{t=0} = 0; \frac{u}{x}|_{t=R} = -\frac{\gamma}{D_a}$$

Здесь t — радиус разрядной камеры, ν — частота ионизации, D_a - коэффициент амбиполярной диффузии. В исходной задаче используются граничные условия второго и третьего рода, которые преобразованы в соответсвии с образованной динамической системой. Получены профили концентраций заряженных частиц.

Литература

1. Schottky W., v. Issendorff J. Quasineutrale elektrische Diffusion im ruhenden und stremenden Gas //Zeitschrift fer Physik. —1925. —T. 31. —№. 1. —C. 163—201.

О НЕКОТОРЫХ РЯДАХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОИЗВЕДЕНИЕМ МАТРИЦЫ ПОВОРОТА И НИЛЬПОТЕНТНОЙ МАТРИЦЫ

И. А. Шилин, А. Д. Козлов
(Москва, НИУ МЭИ, МТУСИ, МГПУ)
shilinia@mgpu.ru, kozlovad956@mgpu.ru

Пусть G — мультипликативная группа $\operatorname{diag}(1,-1,-1)$-матриц g, у которых $g_{11} \geqslant 1$ [2]. Используя различные разложения этой полупростой связной группы Ли, можно получить различного рода формулы для специальных функций математической физики. Используя разложение Ивасавы произведения двух матриц, одна из которых является матрицей поворота на угол φ, отличный от нуля, а другая — нильпотентной матрицей, и применяя связь между двумя различными базисами пространства представления группы G, авторы получили новые формулы для двусторонних рядов, содержащих произведения функций Уиттекера второго рода $W_{\mu,\nu}$. Наиболее простой вид они принимают в случае, когда $\varphi = \pi$. Одна из таких формул при ограничениях $\operatorname{Re}\sigma \in (-1,0)$, $\lambda,\ \mu > 0$ имеет вид

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2\sigma+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n W_{n,\sigma+1/2}(2\lambda)\, W_{-n,\sigma+1/2}(2\mu)}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta n}} =$$

$$= \frac{2e^{\mathbf{i}(\lambda-\mu)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}}{\sin\frac{\theta}{2}} \cdot K_{2\sigma+1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right),$$

где K_ν обозначает модифицированную функцию Бесселя второго рода. Во всех случаях суммы рядов выражаются через линейную комбинацию одной или двух бесселевых функций с аргументом вида

$2\sqrt{z}$. Введенные Хайеком [1] функции Бесселя–Клиффорда позволяют упростить аргумент: например, при $\lambda > 0,\ \mu < 0$ можно получить

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{W_{n,\sigma+\frac{1}{2}}(2\lambda)\,W_{n,\sigma+\frac{1}{2}}(-2\mu)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta n}\,\Gamma(1+\sigma+n)\,\Gamma(n-\sigma)} = \frac{e^{i(\lambda-\mu)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\sigma\pi}\times$$

$$\times\left[\left(-\frac{\mu\sin^2\frac{\theta}{2}}{\lambda^3}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}}\mathcal{C}_{-2\sigma-1}\left(\frac{-\lambda\mu}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)-\left(-\frac{\mu^3}{\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}}\mathcal{C}_{2\sigma+1}\left(\frac{-\lambda\mu}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)\right]$$

Литература

1. Hayek N. Estudio de la ecuacion diferecial $xy''+(a+1)y'+y=O$, y de sus aplicaciones / N. Hayek. // Collectanea Mathematica, 1966–67, 18, pp. 57-174.

2. Shilin I. A. Some formulas for Bessel functions related to $\operatorname{diag}(1,-1,-1)$ matrices and an intertwining operator / I. A. Shilin, J. Choi. // Integral Transforms and Special functions, 2025, 36(2), p. 132–144.

ОДНОСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ

К.В. Шилов, А.Н. Наимов (Вологда, ВоГУ)
kostua1231@yandex.ru

Доклад посвящен исследованию односторонней оценки вида

$$\langle Ay, y\rangle < 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{1}$$

для постоянной квадратной матрица A порядка $n \geqslant 2$, элементы a_{ij} которой определются через задаваемые числа $k_{ij} \geqslant 0$ формулой

$$a_{ij} = k_{ij} \quad \text{при} \quad i \neq j, \qquad a_{ii} = -\left(k_{i1} + \ldots + k_{in}\right), \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{2}$$

В оценке (1) угловыми скобками $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено евклидовое скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Оценка (1) для матрицы A, определяемой формулой (2), актуальна при исследовании диссипативности системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \qquad t > 0, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

которой описывается процесс теплопередачи в помещении, состоящем из n зон. Система уравнений (3) называется диссипативной, если любое решение $x(t)$ данной системы с начальным значением $x(t_0) = x^0$ продолжимо на интервале $(t_0, +\infty)$ и

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |x(t)| < R,$$

где R не зависит от решения $x(t)$. Общие свойства диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений изложены в монографии [1].

На множестве $I = \{1, \ldots, n\}$ введём отношение эквивалентности $\sim$, полагая $i \sim j$, если либо $i = j$, либо $i \neq j$ и имеются попарно различные номера $i_1, \ldots, i_q \in I$ такие, что $k_{i_1 i_2} > 0, \ldots, k_{i_{q-1} i_q} > 0$ и $i_1 = i, i_q = j$. Тогда множество I разбивается на классы эквивалентности $I_1, \ldots, I_p$, которые зависят от A, т.е. $p = p(A), I_l = I_l(A), l = \overline{1, p}$. Случай $p = 1$ соответствует неразложимости матрицы $(A + A^T)$ согласно определению, приведённому в книге [2, с. 352]. Определим число

$$æ(A) := \min_{1 \leqslant l \leqslant p} \max_{i \in I_l(A)} k_{ii}.$$

Справедлива

Теорема. *Пусть элементы матрицы A определяются формулой (2) и пусть выполнены условия*

$$k_{ij} \geqslant 0,$$

$$\tilde{k}_{ii} := k_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (k_{ij} - k_{ji}) \geqslant 0.$$

Тогда оценка (1) равносильна любому из условий

$$æ(A) > 0, \tag{4}$$

$$\det (A + A^T) \neq 0, \tag{5}$$

$$\det (A) \neq 0. \tag{6}$$

Доказательство теоремы основано на разбиении множества $I = \{1, \ldots, n\}$ на классы эквивалентности и представлении

$$-\langle Ay, y \rangle = \sum_{i \in I} \tilde{k}_{ii} y_i^2 + \sum_{\substack{i,j \in I \\ i<j}} \tilde{k}_{ij} (y_j - y_i)^2 \geqslant 0,$$

где

$$\tilde{k}_{ij} := \begin{cases} \dfrac{1}{2}(k_{ij} + k_{ji}), & i \neq j, \\ k_{ii} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j \in I}(k_{ij} - k_{ji}), & i = j. \end{cases}$$

Литература

1. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. / В.А. Плисс — М.: Наука — 1964.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. / Ф.Р. Гантмахер — М.: Наука — 1967.

ОБ УНИТАРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРУППЫ ДОПУСТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МНОЖЕСТВА АСИМПТОТИЧЕСКИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. Штепин, Т.В. Штепина (Москва, Долгопрудный, МФТИ, РГУ им. Косыгина, МТУСИ, РГУ им. Косыгина)

vadim.shtepin@gmail.com, tatyana.shtepina@gmail.com

Во многих вопросах теоретической физики требуется описать движение электронов в потенциальном поле, образованном неподвижными зарядами. Если положения зарядов образуют кристаллическую решетку, то потенциал поля является периодической функцией координат. Если же допускаются неупорядоченные расположения зарядов, то потенциал поля принадлежит более широкому множеству функций. И таким естественным расширением множества периодических функций является пространство почти периодических функций. Предположим теперь, что заряды совершают непрерывные малые хаотические колебания вокруг положений равновесия, расположенных в узлах конечной кристаллической решетки. С математической точки зрения это равносильно непрерывным возмущениям аргументов почти периодических функций. Но возникает вопрос, будет ли при этом сохраняться почти периодичность или чуть более слабое свойство — асимптотическая почти периодичность?

Пусть $J = (-\infty, +\infty)$, $J_r = [r, +\infty)$.

Определение. Множество $T \subset J$ называется *относительно плотным* на J (на J_r), если $\exists L > 0$ такое, что каждый отрезок $[a, a+L]$, $a \in J$ ($a \in J_r$), содержит хотя бы одно число $t \in T$.

Определение. Пусть $f(t) : J \to \mathbb{C}$ — непрерывная комплексно-значная функция на J. Для $\varepsilon > 0$ число $\tau \in T$ называется *ε–почти периодом* функции $f(t)$, если $\forall t \in J$ выполняется

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon\,.$$

Определение. Непрерывная функция $f(t) : J \to \mathbb{C}$ называется *почти периодической* (п.п.), если для любого $\varepsilon > 0$ множество T_ε ее ε–почти периодов относительно плотно на J.

Хорошо известно, что всякая п.п. функция на прямой ограничена и равномерно непрерывна на J. Обозначим через $\mathcal{AP}(J, \mathbb{C})$ пространство п.п. функций на прямой, а через $C(J, \mathbb{C})$ пространство ограниченных равномерно непрерывных функций с нормой

$$\|f\| = \sup_{t \in J} |f(t)|\,.$$

Если $f \in C(J, \mathbb{C})$, то при каком условии она является п.п.?

К сожалению, простого критерия почти периодичности не существует, и в большинстве случаев опираются на следующий критерий.

Критерий Бохнера.*Пусть $f \in C(J, \mathbb{C})$. Тогда f является почти периодической функцией тогда и только тогда, когда семейство*

$$\{f^h\} = \big\{f(t+h), -\infty < h < +\infty\big\}$$

компактно в $C(J, \mathbb{C})$.

Определение. Пусть на прямой J задана естественная топология. Гомеоморфизм $\varphi : J \to J$ называют *допустимым преобразованием* пространства $\mathcal{AP}(J, \mathbb{C})$, если для любого $f \in \mathcal{AP}(J, \mathbb{C})$ функция $f \circ \varphi : J \to \mathbb{C}$ также является почти периодической.

Многие авторы [1], [2] отмечают, что группа Ли $\mathcal{A}ff(J)$ аффинных преобразований прямой является подгруппой группы допустимых преобразований $\mathcal{AP}(J, \mathbb{C})$, но, насколько нам известно, описание *всех* допустимых преобразований пространства $\mathcal{AP}(J, \mathbb{C})$ является открытой проблемой.

В настоящей работе мы коснемся упрощенного варианта этой проблемы, заменив пространство $\mathcal{AP}(J, \mathbb{C})$ на пространство всех асимптотически почти периодических функций на прямой.

Определение. Пусть $f \in C(J, \mathbb{C})$. Функция f называется *асимптотически почти периодической* (а.п.п.), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists r =$

$r(\varepsilon)$ такое, что множество T_ε ее ε–почти периодов относительно плотно на J_r.

Пространство а.п.п. функций на прямой обозначим $\mathcal{AAP}(J,\mathbb{C})$.

Для функций $f \in C(J,\mathbb{C})$ существует критерий асимптотической почти периодичности, аналогичный приведенному выше критерию Бохнера.

Критерий Фреше. *Пусть* $f \in C(J,\mathbb{C})$. *Тогда* f *является асимптотически почти периодической тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих двух условий:*

а) *существуют функции* $g \in \mathcal{AP}(J,\mathbb{C})$ *и* $h \in C(J,\mathbb{C})$, *имеющая нулевой предел на* $+\infty$, *т.е.* $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 0$ *такие, что*

$$f = g + h\,;$$

б) *семейство функций*

$$\{f^h\} = \{f(t+h),\ h > 0\}$$

относительно компактно в $C(J,\mathbb{C})$.

Определение. Пусть на J задана естественная топология. Гомеоморфизм $\varphi : J \to J$ называется *допустимым преобразованием* пространства $\mathcal{AAP}(J,\mathbb{C})$, если $\forall f \in \mathcal{AAP}(J,\mathbb{C})$ функция $f\circ\varphi : J \to \mathbb{C}$ также является асимптотически почти периодической.

Теорема 1.[3] *Пусть* $\varphi : J \to J$ — *строго монотонно возрастающая непрерывная функция, имеющая асимптоты* $y_1 = a_1t + b_1$ *на* $+\infty$ *и* $y_2 = a_2t + b_2$ на $-\infty$ (где $a_1, a_2 > 0$). *Тогда* φ *является допустимым преобразованием пространства* $\mathcal{AAP}(J,\mathbb{C})$.

Идея доказательства теоремы 1 состоит в использовании критерия Фреше асимптотической почти периодичности.

Теорема 2.[3] *Пусть* G — *множество всех гомеоморфизмов* $\varphi : J \to J$ *прямой, удовлетворяющих условиям теоремы* 1. *Тогда* G *является топологической группой относительно композиции гомеоморфизмов, если топология на* G *определяется равномерной метрикой*

$$\|\varphi - \psi\| = \sup_{t\in J} |\varphi(t) - \psi(t)|\,.$$

(*Как обычно, считаем базу топологии состоящей из всевозможных шаров конечного радиуса*).

Определение. Группу G, определенную выше, назовем *группой допустимых преобразований* асимптотически почти периодических функций.

Наша ближайшая цель — доказать, что G не является группой Ли.

Покажем это, используя следующий критерий Рисса локальной компактности [4].

Теорема (Рисса). *Следующие свойства нормированного пространства E эквивалентны*:

а) *пространство E локально компактно*;

б) *замкнутый единичный шар в E компактен*;

в) *для любого $\varepsilon > 0$ открытый единичный шар в E имеет конечную ε–сеть.*

Теорема 3. *Группа G допустимых преобразований множества асимптотически почти периодических функций не является группой Ли.*

Доказательство.

В нашем случае в открытом шаре $\overset{o}{B}_1(e)$ радиуса 1 в G с центром в e можно легко построить бесконечную последовательность элементов φ_1, φ_2, ... так, что попарные расстояния между элементами этой последовательности будут $\geqslant \dfrac{1}{2}$. Рассмотрим функцию-ступеньку

$$r_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1), & -1 \leqslant t \leqslant 0; \\ \frac{1}{2}(1-t), & 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ 0, \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $r_0 + e \in \overset{o}{B}_1(e)$ и r_0 имеет носителем отрезок $[-1;1]$.

Аналогично рассмотрим функции $r_2 + e$, $r_4 + e$, ... с носителями у r_{2k} соответственно $[1;3], [3;5], ..., [2k-1, 2k+1], ...$. Легко видеть, что $\rho(r_i + e, r_j + e) = \dfrac{1}{2}$ при $i \neq j$, и в то же время все эти функции $\{r_{2k}+e,\ k \geqslant 0\}$ принадлежат открытому шару $\overset{o}{B}_1(e)$. Следовательно, при $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{4}$ шар $\overset{o}{B}_1(e)$ не имеет конечной ε–сети.

Пусть $s = \varphi(t)$ — допустимое преобразование из группы G. Оно порождает линейное преобразование Φ_φ в пространстве $\mathcal{AAP}(J, \mathbb{C})$, определяемое равенством

$$\left(\Phi_\varphi f\right)(s) = \left(f \circ \varphi^{-1}\right)(s) = f\left(\varphi^{-1}(s)\right)\,.$$

Покажем, что соответствие $\varphi \mapsto \Phi_\varphi$ является линейным представлением группы G в пространстве асимптотически почти периодических функций. Действительно,

$$\begin{aligned}\left(\left(\Phi_\varphi \circ \Phi_\psi\right) f\right)(s) = \left(\Phi_\psi f\right)\left(\varphi^{-1}(s)\right) = f\left(\psi^{-1}\left(\varphi^{-1}(s)\right)\right) = \\ = f\left(\left(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}\right)(s)\right) = f\left((\varphi \circ \psi)^{-1}(s)\right) = \left(\Phi_{\varphi\circ\psi} f\right)(s)\,.\end{aligned}$$

Отметим также, что преобразование Φ_φ невырождено, так как в силу биективности φ из $\Phi_\varphi f \equiv 0$ следует $f \equiv 0$.

Напомним теперь, как в пространствах $\mathcal{AAP}(J,\mathbb{C})$ и $\mathcal{AP}(J,\mathbb{C})$ вводится среднее значение функции и скалярное произведение, превращающее их в бесконечномерные эрмитовы пространства.

Определение. *Средним значением* $M\{f(x)\}$ (асимптотически) почти периодической функции $f(x)$ называется число

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(x)\,dx\,.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема (Усиленная теорема о среднем значении). *Среднее значение (асимптотически) почти периодической функции $f(x)$ может быть определено пределом*

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx\,,$$

причем этот предел существует равномерно по параметру $\alpha \in (-\infty,+\infty)$ [1, с. 27], [2, с.382].

Следствие 1. *Если $f(x)$ имеет среднее значение, то*

а) $M\{f(x+b)\} = M\{f(x)\}$;

б) $M\{f(ax+b)\} = M\{f(x)\}$.

Следствие 2. *Если $f(x), h(x)$ имеют средние значения и существует M такое, что для всех $x \geqslant M$ выполняется $h(x)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant h(x)+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то*

$$M\{h(x)\} - \varepsilon \leqslant M\{f(x)\} \leqslant M\{h(x)\} + \varepsilon\,.$$

Доказательство.

Докажем следствие 1.

а) Доказывается заменой $x+b=t$ в определенном интеграле.

Докажем теперь пункт б).

$$M\{f(ax+b)\} \overset{\text{а)}}{=} M\{f(ax)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(ax)\,dx\,.$$

Заменяя $ax=s$ и $aT=T'$, получаем

$$M\{f(ax+b)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{aT} \int\limits_{a\alpha}^{a\alpha+aT} f(s)\,ds =$$

$$= \lim_{T'\to\infty} \frac{1}{T'} \int\limits_{a\alpha}^{a\alpha+T'} f(s)\,ds = M\{f(x)\}\,.$$

Следствие 2 доказывается, полагая $\alpha = M$ в усиленной теореме о среднем и применяя неравенства для интегралов.

Определение. Если $f(x), g(x) \in \mathcal{AP}(J,\mathbb{C})$ или $\mathcal{AAP}(J,\mathbb{C})$ то *эрмитовым скалярным произведением* функций f и g называется число (принадлежащее $\mathbb{C}$, вообще говоря)

$$(f,g) = M\{f(x)\overline{g(x)}\}\,.$$

Докажем теперь важное свойство построенного выше представления Φ группы G в пространстве $\mathcal{AAP}(J,\mathbb{C})$ асимптотически почти периодических функций.

Теорема 4. *Представление* $\Phi : \varphi \to \Phi_\varphi$ группы G *в пространстве* $\mathcal{AAP}(J,\mathbb{C})$ *унитарно, то есть для любых функций* $f, g \in \mathcal{AAP}(J,\mathbb{C})$ *и для любой биекции* $\varphi \in G$ *справедливо*

$$(\Phi_\varphi f, \Phi_\varphi g) = (f,g)\,.$$

Доказательство.

Без ограничения общности можем считать f и g вещественнозначными, поскольку сохранение и действительных и мнимых частей функций повлечет и сохранение комплекснозначных функций под действием Φ. Тогда

$$(\Phi_\varphi f, \Phi_\varphi g) = M\{\Phi_\varphi f(t) \Phi_\varphi g(t)\} =$$

$$= M\{f(\varphi^{-1}(t)) g(\varphi^{-1}(t))\} = M\{(f\cdot g)(\varphi^{-1}(t)\}\,.$$

Так как $\varphi^{-1} \in G$, то она имеет асимптоту при $t \to +\infty$. Пусть $\varphi^{-1}(t) = at + b + o(1)$, $t \to +\infty$.

Тогда для любого $\delta > 0$ найдется вещественное M такое, что для всех $t \geqslant M$ выполнено $|\varphi^{-1}(t) - at - b| < \delta$. Далее, $f \cdot g$ — асимптотически почти периодическая вещественнозначная функция, в частности, она равномерно непрерывна на J. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что $|s_1 - s_2| < \delta_\varepsilon$ влечет $|(f \cdot g)(s_1) - (f \cdot g)(s_2)| < \varepsilon$. По найденному числу δ_ε найдем M, обеспечивающее неравенство $|\varphi^{-1}(t) - at - b| < \delta_\varepsilon$ для всех $t \geqslant M$. Тогда $\forall t \geqslant M$ будем иметь

$$\left|(f \cdot g)\left(\varphi^{-1}(t)\right) - (f \cdot g)(at + b)\right| < \varepsilon\,.$$

Осталось применить следствие 2 к усиленной теореме о среднем значении к неравенству

$$(f \cdot g)(at + b) - \varepsilon \leqslant (f \cdot g)\left(\varphi^{-1}(t)\right) \leqslant (f \cdot g)(at + b) + \varepsilon\,.$$

Получаем

$$M\{(f \cdot g)(at + b)\} - \varepsilon \leqslant M\left\{(f \cdot g)\left(\varphi^{-1}(t)\right)\right\} \leqslant M\{(f \cdot g)(at + b)\} + \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}(\Phi_\varphi f, \Phi_\varphi g) &= M\left\{(f \cdot g)\left(\varphi^{-1}(t)\right)\right\} = M\left\{(f \cdot g)(at + b)\right\} = \\ &= /\text{следствие 1б}/ = M\left\{(f \cdot g)(x)\right\} = M\left\{(f(x) \cdot g(x))\right\} = (f, g)\,.\end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Замечание. С точки зрения приложений рассмотренных теорем к физике мы можем утверждать, что непрерывные малые хаотические колебания зарядов, размещенных в узлах конечной кристаллической решетки, могут *не сохранять* почти периодичность потенциального поля, *но сохраняют* асимптотическую почти периодичность.

Литература

1. Жиков В.В. Почти периодические функции / В.В. Жиков, Б.М. Левитан. — М.: МГУ, 1978.

2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. — М.: Наука, 1978.

3. Штепин В.В. О группе допустимых преобразований множества асимптотически почти периодических функций на прямой / В.В. Штепин, Т.В. Штепина // Чебышевский сборник. — 2026. — в печати.

4. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу / А.Я. Хелемский. — М.: МЦНМО, 2014.

ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ ВОЛЧКОВ В ПСЕВДО-ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ТАРЕЛОК НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО[1]

А.Ю. Шуберт (Москва, МГУ)
anastasiia.shubert@math.msu.ru

Доклад посвящен изучению тензора инерции твердого тела в трехмерном (псевдо-)евклидовом векторном пространстве (V, g). Конфигурационное многообразие тарелки на (псевдо-)сфере (т.е. на сфере или плоскости Лобачевского) такое же, как и для твердого тела с неподвижной точкой (т.е. волчка) в этом пространстве, и совпадает с группой Ли автоморфизмов пространства (V, g), изоморфной группе $O(3)$ [1] или $O(2,1)$. Кинетическая энергия является левоинвариантной (псевдо-)римановой метрикой на конфигурационном многообразии [2], поэтому полностью определяется своим значением в единице группы, являющимся квадратичной формой на соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g} \cong o(3)$ или $\mathfrak{g} \cong o(2,1)$. Симметрический оператор

$$J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$$

на этой алгебре Ли, отвечающий этой квадратичной форме, называется (ковариантным) *тензором инерции* твердого тела.

Для вычисления тензора инерции J введено «псевдо-евклидово векторное произведение» $[,]_g$ в (псевдо-)евклидовом пространстве (V, g). С помощью этой операции построены [3] симметрический оператор

$$\widehat{J} = -\sum_{i=1}^{n} m_i([\mathbf{q}_i, \cdot])^2 : V \to V,$$

называемый *оператором инерции* твердого тела, и изоморфизм векторных пространств

$$V \cong \mathfrak{g}, \qquad \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}, \cdot]_g, \quad \mathbf{v} \in V.$$

Доказано [3], что при этом изоморфизме построенная операция $[,]_g$ преобразуется в скобку Ли на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, скалярное произведение g — в форму Киллинга–Картана с точностью до скалярного множителя, а симметрический оператор $g\widehat{J} : V \to V^*$ — в тензор инерции J.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-71-10100) в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Изучен оператор инерции $\widehat{J}$ для одноточечных и многоточечных твердых тел в трехмерном (псевдо-)евклидовом пространстве. Получены следующие результаты:

1) полное описание всех твердых тел, для которых оператор инерции $\widehat{J}$ не приводится к диагональному виду ни в каком g-ортонормированном базисе (оказалось, что любое такое тело содержится в плоскости, касательной к световому конусу) [3],

2) описание канонического вида оператора инерции $\widehat{J}$ для всех твердых тел, включая недиагонализуемый случай, и для всех тарелок на плоскости Лобачевского; формулы и неравенства треугольника для главных моментов инерции, их связь с формой тела,

3) список реализуемых сигнатур оператора инерции для всех твердых тел, и для всех тарелок на сфере и на плоскости Лобачевского [3].

Литература

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. — М. : Наука, 1989. — 472 с.

2. Арнольд В.И. Топологические методы в гидродинамике / В.И. Арнольд, Б.А. Хесин. — М. : МЦНМО, 2007. — 392 с.

3. Шуберт А.Ю. Тензор инерции твердого тела на плоскости Лобачевского и в псевдо-евклидовом пространстве / А.Ю. Шуберт // Чебышевский сб. — 2025. — т. 26, № 2. — С. 232–253.

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА—КАПУТО И НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

Х.В. Ядрихинский (Якутск, СВФУ)
ghdsfdf@yandex.ru

Одной из ранних работ по групповому анализу дифференциальных уравнений с дробными производными является работа [1]. В работе [1] касались темы группового анализа с производной Герасимова — Капуто по времени, в работе [3] он был проведен для порядка производной $\alpha \in (0,1)$ и в дальнейшем в работе [2] рассматривался порядок $\alpha + k$, $\alpha \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В вышеупомянутых статьях [2,3] получили формулы продолжения для дробной производной Герасимова — Капуто, которые содержат начальные значения. Данные начальные значения в работах

---

[1] Работа выполнена при финансовой Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSRG-2023-0025.

[2,3] сократились, но при этом существуют уравнения для которых члены суммы с начальными условиями не сокращаются.

В качестве одного из подходов работы с начальными условиями, возникающими при поиске допускаемых операторов, рассматривается уравнение на которое дополнительно наложено начальное условие. Проводя групповой анализ одного из уравнений с начальными условиями по аналогии с [4,5] получаем следующее утверждение

Теорема 1. *Уравнение с начальным условием*

$$ {}_0^C D_t^\alpha \varphi = C t^{-\alpha} \varphi^{1/(1-\alpha)} - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \varphi|_{t=0} = 1 $$

при $0 < \alpha < 1$ *допускает следующую алгебру Ли* L_2 *линейно-автономных операторов*

$$ X_1 = t\partial_t, \quad X_2 = t^2\partial_t + (\alpha - 1)t\varphi\partial_\varphi. $$

Литература

1. Газизов Р.К. Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка / Р.К. Газизов, А.А. Касаткин, С.Ю. Лукащук //Вестник УГАТУ. — 2007. — Т. 9, № 3. — С. 125–135.

2. Yadrikhinskiy Kh.V. Group analysis of equations with the Gerasimov — Caputo derivative using the example of the Guéant — Pu equation / Kh.V. Yadrikhinskiy // Computational Mathematics and Modeling. — 2025. — DOI:10.1007/s10598-025-09620-4

3. Bakkyaraj T. Lie symmetry analysis of system of nonlinear fractional partial differential equations with Caputo fractional derivative / T. Bakkyaraj // The European Physical Journal Plus. — 2020. — Vol. 135, No. 1. — P. 126.

4. Bluman G.W. Symmetries and differential equations / G. W. Bluman, S. Kumei. — New York : Springer-Verlag, 1989. — 412 p.

5. Bluman G.W. Applications of the general similarity solution of the heat equation to boundary-value problems / G.W. Bluman // Quarterly of Applied Mathematics. — 1974. — Vol. 31 — P. 403–415.

APPROXIMATION OF THE AHLFORS-BEURLING TRANSFORM

R.A. Aliev, L.Sh. Alizade (Baku State University)
aliyevrashid@mail.ru, lale-alizade-98@mail.ru

The Ahlfors–Beurling transform of a function $f \in L_p(\mathbb{C})$, $1 \leqslant p < \infty$, is defined as the following singular integral

$$(Bf)(z) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{w \in C\,:\,|z-w|>\varepsilon\}} \frac{f(w)}{(z-w)^2} dm(w).$$

The Ahlfors–Beurling transform is one of the important operators in complex analysis. It is the «Hilbert transform» on complex plane. This transform plays an essential role in applications to the theory of quasiconformal mappings and to the Beltrami equation with discontinuous coefficients.

From the theory of singular integrals (see [1]) it is known that the Ahlfors–Beurling transform is a bounded operator in the space $L_p(\mathbb{C})$, $1 < p < \infty$, that is, if $f \in L_p(\mathbb{C})$, then $Bf \in L_p(\mathbb{C})$ and

$$\|Bf\|_{L_p} \leqslant C_p \|f\|_{L_p},$$

where C_p is a constants independent of f.

We will consider the approximation of the Ahlfors-Beurling transform of functions from $L_p(\mathbb{C})$ by operators of the form

$$(B_\delta f)(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}_\mathbb{C}} \frac{f(z + (k + 1/2 + i/2)\delta)}{(k + 1/2 + i/2)^2}, \quad \delta > 0,$$

where $\mathbb{Z}_\mathbb{C} = \{w \in \mathbb{C} : \ \Re w \in \mathbb{Z},\ \Im w \in \mathbb{Z}\}$. We prove that the approximating operators are bounded maps in the Lebesgue spaces and converges strongly to the Ahlfors-Beurling transform in these spaces.

Note that this type of operator approximation was first introduced in [2] to approximate the Hilbert transform. In [2] the authors assume that the function u is analytic in the strip $\{z \in C : |\Im z| < d\}$, in which case they show that the series $\frac{2}{\pi} \sum_{k \in Z, k \neq even} \frac{u(t+k\delta)}{-k}$ uniformly converges to the Hilbert transform

$$(Hu)(t) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

---

as $\delta \to 0$. In [3,4] the authors replaced the above series with the following one

$$(H_\delta u)(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in Z} \frac{u(t + (k+1/2)\delta)}{-k - 1/2}$$

and showed that the operators H_δ strongly converge to the Hilbert transform in Lebesgue and Holder spaces.

Let $l_p = l_p(\mathbb{Z}_\mathbb{C})$, $1 \leqslant p < \infty$, the space of all sequences $h = \{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_\mathbb{C}}$ with finite norm

$$\|h\|_{l_p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_\mathbb{C}} |h_n|^p \right)^{1/p}.$$

The sequence $\widetilde{B}(h) = \{(\widetilde{B}h)_n\}_{n \in \mathbb{Z}_\mathbb{C}}$ is called the discrete Ahlfors-Beurling transform of the sequence $h = \{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}_\mathbb{C}}$, where

$$(\widetilde{B}h)_n = -\frac{1}{\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}_\mathbb{C},\ m \neq n} \frac{h_m}{(n-m)^2},\ n \in \mathbb{Z}_\mathbb{C}.$$

In [5], A.P. Calderon and A. Zygmund noted that the discrete analogues of singular integrals, including the discrete Ahlfors-Beurling transform, are bounded in l_p, $1 < p < \infty$.

We will use a modified version of the discrete Ahlfors-Beurling transform:

$$(\bar{B}h)_n = -\frac{1}{\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}_\mathbb{C}} \frac{h_m}{(n - m - 1/2 - i/2)^2},\ n \in \mathbb{Z}_\mathbb{C}.$$

Note that the modified version of the discrete Ahlfors-Beurling transform is also bounded in l_p, $1 < p < \infty$ (see [6]).

Theorem 1. *For any $\delta > 0$ the operator B_δ is bounded in the space $L_p(\mathbb{C})$, $1 < p < \infty$, and the inequality*

$$\|B_\delta\|_{L_p(\mathbb{C}) \to L_p(\mathbb{C})} \leqslant \|\bar{B}\|_{l_p \to l_p}$$

holds.

Theorem 2. *For any $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ and $1 < p < \infty$*

$$\|B_{\delta_1}\|_{L_p(\mathbb{C}) \to L_p(\mathbb{C})} = \|B_{\delta_2}\|_{L_p(\mathbb{C}) \to L_p(\mathbb{C})}.$$

Theorem 3. *The sequence of the operators B_δ strongly converges to the operator B in the space $L_p(\mathbb{C})$, $1 < p < \infty$, that is for any $u \in L_p(\mathbb{C})$ the following inequality holds:*

$$\lim_{\delta \to 0} \|B_\delta u - Bu\|_{L_p(\mathbb{C})} = 0.$$

References

1. Stein E.M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions / E.M. Stein. — Princeton: University Press, 1970. — 304 p.

2. Kress V.R. Anwendung der rechteckregel auf die reelle Hilbert transformation mit unendlichem interval / V.R. Kress, E. Martensen // ZAMM — 1970. — V. 50. — pp. 61–64.

3. Aliev R.A. Approximation of the Hilbert Transform in the Lebesgue spaces / R.A. Aliev, L.Sh. Alizade // J. Numer. Anal. Approx. Theory — 2023. — V. 52, no. 2. — pp. 139–154.

4. Aliev R.A. Approximation of the Hilbert Transform in the Holder spaces / R.A. Aliev, L.Sh. Alizade // Azerbaijan Journal of Math. — 2024. — V. 14, no. 2. — pp. 88–98.

5. Calderon A.P. On the existence of certain singular integrals / A.P. Calderon, A. Zygmund // Acta Math. — 1952. — V. 88. — pp. 85–139.

6. Aliev R.A. Approximation of the Ahlfors-Beurling transform in the Lebesgue spaces / R.A. Aliev, L.Sh. Alizade // Baku Math. J. — 2025. — V. 4, no. 2. — pp. 153–162.

EXISTENCE AND PROPERTIES OF HALF-EIGENVALUES OF SOME HALF-LINEAR PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FOURTH ORDER

Z.S. Aliyev, M.M. Mammadova
(Baku State University, Baku, Azerbaijan)
z_ aliyev@mail.ru; memmedova.mesume@inbox.ru

We consider the following half-linear problem

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = \lambda\tau(x)y + a(x)y^+ + by^-,\ 0 < x < l, \tag{1}$$

$$y'(0)\cos\alpha - (py'')(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{3}$$

$$y'(l)\cos\gamma + (py'')(l)\sin\gamma = 0, \tag{4}$$

$$y(0)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \tag{5}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is an eigenvalue parameter, p is a positive twice continuously differentiable function on $[0, l]$, q is a positive continuously differentiable function on $[0, l]$, τ is a positive continuous function on $[0, l]$, φ and ψ are continuous function on $[0, 1]$ such that $\varphi \not\equiv -\psi$, $y^{\pm}(x) =$

$\max\{\pm y(x), 0\}$ for $x \in [0, l]$, α, β, γ and δ are real constants such that $0 \leqslant \alpha$, β, $\gamma, \delta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (here the case $\beta = \delta = \frac{\pi}{2}$ is excluded). Note that the boundary conditions (2)-(5) with equation (1) constitute a completely regular Sturmian system as defined by S. A. Janczewsky [1].

Problems of type (1)-(5) for the Sturm-Liouville equation were apparently first considered by H. Berestycki [2], and, later, B.P. Rynne [3] and P.J. Browne [4]. Although they are nonlinear due to terms containing y^+ and y^- , they are in fact positively homogeneous and linear in the cones $y > 0$ and $y < 0$ and were called half-linear by H. Berestycki. It should be noted that nonlinear problems with jumping nonlinearities are closely related to their "limiting" problems, namely, the corresponding half-linear problems. In [2] using global bifurcation results for nonlinearizable Sturm-Liouville problems and Sturm's comparison theorems, H. Berestycki derived an oscillation theorem for half-linear Sturm-Liouville problem, according to which there exist two infinitely increasing sequences of simple half-eigenvalues, where the corresponding half-eigenfunctions have the usual nodal properties and are positive and negative, respectively, in the right punctured neighborhood of the left endpoint of the interval. In [4] this result was obtained using the Prüfer angle method both in the case when the eigenvalue parameter is not contained in the boundary conditions and in the case when it is contained in the boundary condition. In [5], a half-linear problem is studied for a self-adjoint differential operator of the $2m$th order which is factored into a product of operators of first order, which are called quasi-derivatives of the required function; in boundary conditions some quasi-derivatives vanish at the endpoints of the interval. There, using oscillation theory for nth order differential operators (which is factored into a product of operators of first order) [6] and applying the continuity method, the existence of two infinitely increasing sequences of simple half-eigenvalues was established, with the corresponding half-eigenfunctions possessing the usual nodal properties and being positive and negative, respectively, in the right-punctured neighborhood of the left endpoint of the interval.

We use oscillation theorem for fourth-order linear completely regular Sturmian system which is obtained from (1)-(5) by setting $a \equiv 0$ and $b \equiv 0$, global bifurcation results to their nonlinearizable perturbations [7], and the continuity method we obtain the existence of two sequences of real simple half-eigenvalues of problem (1)-(5), with the corresponding half-eigenfunctions possessing the usual nodal properties but differing in sign in a punctured neighborhood of the left endpoint of $[0, l]$.

By $(b.c.)$ we denote the set of boundary conditions (2)-(5).

Let $E = C^3[0,1] \cap (b.c.)$ be the Banach space with the usual norm $||y||_3 = \sum\limits_{j=0}^{3} ||y^{(j)}||_\infty$, where $||y||_\infty = \max\limits_{x\in[0,l]} |y(x)|$. Note that to preserve the nodal properties of solutions of nonlinear problems for the operator generated by the differential expression $\ell(y) \equiv (p(y'')'' - (qy')'$ and boundary conditions $(b.c.)$, in the paper [7], using the extension of the Prüfer transformation, were constructed sets S_k^ν, $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{+\,,\,-\}$, of functions in Banach space E, possessing the nodal properties of eigenfunctions of the linear problem (1)-(5) with $a \equiv 0$ and $b \equiv 0$, and their derivatives [7, § 3.1].

Theorem 1 *There are two infinitely increasing sequences of real and simple half-eigenvalues* $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ *and* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ *of the half-linear problem (1)-(5). Moreover, for each* $k \in \mathbb{N}$ *and each* $\nu \in \{+\,,\,-\}$ *the half-eigenfunction* y_k^ν *corresponding to the half-eigenvalue* λ_k^ν *of problem (1)-(5) lies in the set* S_k^ν*; if* $k' > k \geqslant 1$*, then for any* $\nu' \in \{+\,,\,-\}$ *and* $\nu \in \{+\,,\,-\}$ *the inequality* $\lambda_{k'}^{\nu'} > \lambda_k^\nu$ *holds.*

References

1. S.A. Janczewsky, Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order / S.A. Janczewsky // Ann. Math. — 1928. — V. 29, No. 2. — P. 521–542.

2. Berestycki H. On some nonlinear Sturm-Liouville problems / H. Berestycki // J. Differential Equations — 1977. — V. 26, No. 1. — P. 375–390.

3. Rynne B.P. The Fucik spectrum of general Sturm-Liouville problems / B.P. Rynne // J. Differential Equations — 2000. — V. 161, No. 1. — P. 87–109.

4. Browne P.J. A Prüfer approach to half-linear Sturm-Liouville problems / P.J. Browne // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1998. — V. 41, No. 3. — P. 573–583.

5. Rynne B.P. Half-eigenvalues of self-adjoint, $2m$th order differential operators and semilinear problems with jumping nonlinearities / B.P. Rynne // Differential Integral Equations. — 2001. — V. 14, No. 9. — P. 1129–1152.

6. U. Elias, The extremal solutions of the equation $Ly + p(x)y = 0$, II / U. Elias // J. Math. Anal. Appl. — 1976. — V. 55, No. 2. — P. 253–265.

7. Aliyev Z.S. Global bifurcation of solutions of certain nonlinear eigenvalue problems for ordinary differential equations of fourth order / Z.S. Aliyev // Sb. Math. — 2016. — V. 207, No. 12. — P. 1625–1649.

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

N.R. Amanova, A.R. Safarova (Baku State University,
Nakhchivan State University)
amanova.n.93@gmail.com, department2011@mail.ru

In this paper the first boundary value problem for the second order degenerated elliptic-parabolic equations in nondivergent form is considered. For that, it has been proved main a prior estimate, which helps to prove a strong solvability and uniqueness result in the anisotropic weighted Sobolev spaces.

Let E_n and R_{n+1} be an Euclidean space of points $x = (x_1, ..., x_n)$ and $(x,t) = (x_1, ..., x_n, t)$ respectively, λ is a bounded domain in E_n with the boundary $\partial\lambda$, $\partial\lambda \in C^2$, and Q_T be a cylinder $\lambda x\,(-T,0)$ $T \in (0,\infty)$ and $0 \in \overline{\lambda}$. Consider in Q_T a first boundary value problem

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \varphi(0-t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t), \quad (1)$$

$$u\mid_{\Gamma(Q_T)} = 0, \quad (2)$$

where $\Gamma(Q_T) = \left\{(x,t)\middle| x \in \lambda\ ,\ \ t = -T\ \right\} \bigcup (\partial\lambda x\,[-T,0])$ is a parabolic boundary of domain Q_T, and suppose that the following conditions relative to the coefficients of the operator L are fulfilled:

$$\gamma \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)\,\xi_i{}^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \leqslant \gamma^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)\,\xi_i{}^2$$

$$(x,t) \in Q_T, \xi \in E_n, \quad (3)$$

$$\sigma = \sup_{Q_T}\left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\cdot\lambda_j(x,t)} \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\right)^2\right] - \frac{1}{n-e^2} < 0 \quad (4)$$

$$\varphi(z) \in C^1[-T,0]\ ,\ \ \varphi(z) \geqslant 0\ ,\ \ \varphi'(z)\ \ \geqslant 0\ ,\ \ \varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(0) \geqslant 0\ ,\ \ \varphi(z) \geqslant \beta_1 \cdot Z \cdot \varphi'(z)\ ,\ \ \beta_1\ > 0 \quad (5)$$

---

is a constant.

Here $\gamma \in (0,1]$ is a constant, $e = \inf\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)} \Big/ \sup\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}$,

$$\lambda_i\left(x,t\right) = \left[\frac{w_i^{-1}\left(\rho\left(x\right)+\sqrt{|t|}\right)}{\rho\left(x\right)+\sqrt{|t|}}\right]^2, i,j=1,2,...,n, \rho\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i\left(|x_i|\right).$$

Let $x^0 \in E_n$, $R > 0$, $k > 0$, denote by $E_R^{x^0}\left(k\right)$ the ellipsoid $\left\{x : \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - x_i^0\right)^2}{\left(w_i^{-1}(R)\right)^2} < k^2\right\}$, and for $t^1 < t^2$, through $C_{R:K}^{t^1,t^2}\left(x^0\right)$ is the cylinder $E_R^{x^0}\left(k\right) \times \left(t^1 < t^2\right)$.

Let

$$\left(x', t'\right) \in \Gamma\left(C_{R:1+\frac{r}{2}}^{-\left(1-\frac{r^2}{4}\right)R^2,0}\left(0\right)\right), C_r{}' = C_{R:\frac{r}{2}}^{t'-\frac{r^2R^2}{2},t'}\left(x'\right), C_r = C_{R:r}^{t'-r^2R^2,t'}\left(x'\right)$$

where $R \in \left(0,1\right], r \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. We say the $u\left(x,t\right) \in A\left(C_r\right)$, if $u \in C^\infty\left(\bar{C}_r\right), u\left|_{t=t'-r^2R^2}\right. = 0$. Denote by $W_{2,\lambda,\varphi}^2\left(Q_T\right)$ a Banach space of functions $u\left(x,t\right)$ in Q_T, such that norm

$$\|u\|_{W_{2,\lambda,\varphi}^2(Q_T)} =$$

$$= \left(\int_{Q_T}\left(u^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(x,t\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\left(x,t\right)\lambda_j\left(x,t\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \varphi^2\left(0-t\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^2 +$$

$$\left.2\varphi\left(0-t\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(x,t\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right)^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

is finite. Let $W_{2,\lambda,\varphi}^2\left(Q_T\right)$ be close of the functions class $u\left(x,t\right) \in C^\infty\left(\bar{Q}_T\right)$, $u\left|_{\partial Q_T}\right. = 0$ on the norm $W_{2,\lambda,\varphi}^2\left(Q_T\right)$, where $\lambda = (\lambda_1(x,t), ...,$ $\lambda_n(x,t))$. A function $u\left(x,t\right) \in \overset{0}{W}{}_{2,\lambda,\varphi}^{2}\left(Q_T\right)$ is called a strong solution of boundary value problem (1)–(2), if it satisfies (1) almost everywhere on Q_T.

Consider the following model operator

$$L_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(x', t'\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \varphi\left(0-t\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

The following lemma is true.

Lemma 1. (see [3]) *If a function* $\varphi(z)$ *satisfies conditions (5) , then there exists* $T_1(\varphi, n)$ *such that for* $T \leqslant T_1$ *and any function* $u(x,t) \in A(C_r)$ *the following estimate is valid:*

$$\int_{C_r} (\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i(x,t)\,\lambda_j(x,t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \varphi^2(0-t)\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t}\right)^2 +$$

$$2\varphi(0-t)\times\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 \Bigg)\, dxdt \leqslant C_3(n, q(T))\cdot\int_{C_r}(L_0 u)^2\, dxdt,$$

where $q(T) = \sup\limits_{[-T,0]} \varphi'(z)$

$$Let \leftarrow \delta = \sup_{Q_T}\left|\frac{g(x,t)}{m} - 1\right| +$$

$$+\sup_{Q_T}\sqrt{2\sum_{i<j}\frac{a_{ij}^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)\lambda_j(x,t)} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)} - \frac{g(x,t)}{m}\right)^2}$$

where $g(x,t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,t)}{\lambda_i(x,t)}$ *and the constant* $m > 0$ *will be chosen later.*

References

1. Аманова Н.Р. Некоторые свойства решений первой краевой задачи для эллиптико- параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами / Аманова Н.Р. // Proceedings of IAM. 2024. —V. 13, No 2. —pp.220-247.

THE CONFORMAL SPECTRAL ESTIMATE OF THE DEGENERATE P-LAPLACE DIRICHLET OPERATOR

C. Deneche (Tomsk, TSU)
carafdenes@gmail.com

We consider the Dirichlet spectral problem for the degenerate p-Laplace operator $(p > 2)$:

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda_p |u|^{p-2} u \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

in conformal regular domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Recall that, a bounded simply connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is called conformal α-regular domain if

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} |J_\varphi(x,y)|^\alpha \, dxdy < \infty \quad \text{for some} \quad \alpha > 1,$$

where $J_\varphi(x,y)$ is the Jacobian of a conformal mapping $\varphi : \mathbb{D} \to \Omega$ of the unit disc $\mathbb{D}$ onto a domain Ω [1].

The domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is called a conformal regular domain if it is a conformal α-regular domain for some $\alpha > 2$. This class includes domains with nonrectifiable boundaries [2]. The Hausdorff dimension of the boundary of a conformal regular domain can be any number in [1, 2) [3].

Our approach is based on the conformal analysis of elliptic operators. On this way we obtain the spectral estimates of the degenerate p-Laplace operator with the Dirichlet boundary condition in domains with nonrectifiable boundaries in terms of the conformal radii of domains.

References

1. Burenkov V.I. Conformal spectral stability for the Dirichlet–Laplacian / V. I. Burenkov, V. Gol'dshtein, and A. Ukhlov // Math. Nachr. — 2015. — V. 288, №16. —P. 1822 — 1833.

2. Gol'dshtein V. On the first eigenvalue of the degenerate p-Laplace operator in non-convex domains / V. Gol'dshtein, V. Pchelintsev, and A. Ukhlov // Integral Equations Oper. Theory. — 2018. — V. 90, №4. Article No. 43.

3. Hencl S. Dimension gap under conformal mappings / S. Hencl, P. Koskela, and T. Neiminen // Adv. Math. — 2012. — V. 230, №3. —P. 1423 — 1441.

NODAL SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PROBLEM WITH INDEFINITE WEIGHT FUNCTION FOR STURM-LIOUVILLE OPERATOR

R.S. Hasanova (Ganja State University, Ganja, Azerbaijan)
hasanova9596@gmail.com

Let $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^+_0 = [0, +\infty)$ and $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$.

In this note we consider the following nonlinear problem

$$\begin{cases} \ell(y) \equiv -(p(x)y')' + q(x)y = \tau r(x) f(y), \; x \in (0,1), \\ \alpha_0 y(0) - \beta_0 y'(0) = 0, \\ \alpha_1 y(1) - \beta_1 y'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

© Hasanova R.S. , 2026

where $p \in C^1([0,1];\mathbb{R}^+)$, $q \in C^1\left([0,1];\mathbb{R}_0^+\right)$, τ is a real parameter, $r \in C([0,1];\mathbb{R})$ such that $r(\xi)r(\zeta) < 0$ for some ξ, $\zeta \in [0,1]$, α_0, β_0, α_1, β_1 are real constants such that

$$|\alpha_0| + |\beta_0| > 0,\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0,\ \alpha_0\beta_0 \geqslant 0,\ \alpha_1\beta_1 \geqslant 0.$$

Moreover, $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ and satisfies the following conditions:

(i) $sf(s) \neq 0$ for any $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$;

(ii) there are finite lower and upper limits

$$\liminf_{|s| \to 0} \tfrac{f(s)}{s} = \underline{f_0},\ \limsup_{|s| \to 0} \tfrac{f(s)}{s} = \overline{f_0},$$

such that $\underline{f_0}$, $\overline{f_0} \neq 0$ and $\underline{f_0} \neq \overline{f_0}$;

(iii) there are also finite lower and upper limits

$$\liminf_{|s| \to +\infty} \tfrac{f(s)}{s} = \underline{f_\infty},\ \limsup_{|s| \to 0} \tfrac{f(s)}{s} = \overline{f_\infty},$$

such that $\underline{f_\infty}$, $\overline{f_\infty} \neq 0$ and $\underline{f_\infty} \neq \overline{f_\infty}$.

Along with nonlinear problem we consider the following linear eigenvalue problem

$$\begin{cases} \ell(y)(x) = \lambda r(x)y(x),\ x \in (0,1), \\ y \in (b.c.), \end{cases} \tag{2}$$

where $(b.c.)$ is the set of functions satisfying the boundary conditions from (1). Problem (2) was studied in [1, Chapter 10, 10·61], where it was shown that the eigenvalues вЂ‹вЂ‹of this problem are real and simple, and form two unbounded sequences $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ and $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ such that

$$\ldots < \lambda_k^- < \ldots < \lambda_2^- < \lambda_1^- < 0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \ldots < \lambda_k^+ < \ldots;$$

for each $k \in \mathbb{N}$ the eigenfunctions $y_k^+(x)$ and $y_k^-(x)$ corresponding to the eigenvalues λ_k^+ and λ_k^-, respectively, have exactly $k-1$ simple nodal zeros in $(0,1)$. Moreover, for each $k \in \mathbb{N}$ and each $\sigma \in \{+,-\}$ the inequality $\sigma \int\limits_0^1 r(x)(y_k^\sigma(x))^2 dx > 0$ holds.

Let $E = C^1[0,1] \cap (b.c.)$ be the Banach space with the norm

$$||y||_1 = \max_{x \in [0,1]} |y(x)| + \max_{x \in [0,1]} |y'(x)|.$$

For each $k \in \mathbb{N}$, each $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ and each $\nu \in \{+\,,\,-\}$, by $S^{\nu}_{k,\,\sigma}$ we denote the set of functions $y \in E$ which satisfy the following conditions [2]:

(i) the zeros contained on $[0,1]$ of the function $y(x)$ are simple and this function have exactly $k-1$ such nodal zeros in $(0,1)$;

(ii) the function $\nu y(x)$ is positive for $0 \neq x$ near 0;

(iii) $\sigma \int\limits_0^1 r(x) y^2(x)dx > 0$.

For each $k \in \mathbb{N}$ and each $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ let $S_{k,\,\sigma} = S^{+}_{k,\,\sigma} \bigcup S^{-}_{k,\,\sigma}$. From the definition of the sets $S_{k,\,\sigma}$, $S^{+}_{k,\,\sigma}$, and $S^{-}_{k,\,\sigma}$ it follows that they are open subsets of E. By the above arguments for each $k \in \mathbb{N}$ and each ν we have $y^{+}_{k} \in S_{k,+}$ and $y^{-}_{k} \in S_{k,-}$. For each $k \in \mathbb{N}$ and each σ the eigenfunction y^{σ}_{k} is made unique by requiring that $y^{\sigma}_{k} \in S^{+}_{k,\sigma}$ and $||y^{\sigma}_{k}||_1 = 1$. Then we get $-y^{\sigma}_{k} \in S^{-}_{k,\sigma}$.

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem 1. Let $\underline{f}_0 > 0$ and $\underline{f}_\infty > 0$. If for some $k \in \mathbb{N}$ the relation

$$\frac{\lambda^{+}_{k}}{\underline{f}_0} < \tau < \frac{\lambda^{+}_{k}}{\overline{f}_\infty} \quad \text{or} \quad \frac{\lambda^{+}_{k}}{\underline{f}_\infty} < \tau < \frac{\lambda^{+}_{k}}{\overline{f}_0}$$

holds, then for each $\nu \in \{+\,,\,-\}$ there exists a solution $y^{\nu}_{k,+}$ of problem (1) which lies in $S^{\nu}_{k,+}$. If for some $k \in \mathbb{N}$ the relation

$$\frac{\lambda^{-}_{k}}{\underline{f}_0} > \tau > \frac{\lambda^{-}_{k}}{\overline{f}_\infty} \quad \text{or} \quad \frac{\lambda^{-}_{k}}{\underline{f}_\infty} > \tau > \frac{\lambda^{-}_{k}}{\overline{f}_0}$$

holds, then for each $\nu \in \{+\,,\,-\}$ there exists a solution $y^{\nu}_{k,-}$ of problem (1) which lies in $S^{\nu}_{k,-}$.

Theorem 2. Let $\overline{f}_0 < 0$ and $\overline{f}_\infty < 0$. If for some $k \in \mathbb{N}$ the relation

$$\frac{\lambda^{+}_{k}}{\overline{f}_0} > \tau > \frac{\lambda^{+}_{k}}{\underline{f}_\infty} \quad \text{or} \quad \frac{\lambda^{+}_{k}}{\overline{f}_\infty} > \tau > \frac{\lambda^{+}_{k}}{\underline{f}_0}$$

holds, then for each $\nu \in \{+\,,\,-\}$ there exists a solution $y^{\nu}_{k,+}$ of problem (1) which lies in $S^{\nu}_{k,+}$. If for some $k \in \mathbb{N}$ the relation

$$\frac{\lambda^{-}_{k}}{\overline{f}_0} < \tau < \frac{\lambda^{-}_{k}}{\underline{f}_\infty} \quad \text{or} \quad \frac{\lambda^{-}_{k}}{\overline{f}_\infty} < \tau < \frac{\lambda^{-}_{k}}{\underline{f}_0}$$

holds, then for each $\nu \in \{+\,,\,-\}$ there exists a solution $y^{\nu}_{k,-}$ of problem (1) which lies in $S^{\nu}_{k,-}$.

References

1. Ince E.L. Ordinary differential equations / E.L. Ince. – NY. : Dover, 1926. – 569 p.

2 Aliyev, Z.S. Bifurcation from zero or infinity in nonlinearizable Sturm-Liouville problems with indefinite weight / Z.S. Aliyev, L.V. Nasirova // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.— 2021. — No. 55. — P. 1–16.

ROBUST H_∞ FILTERING FOR MARKOV JUMP LINEAR SYSTEM WITH UNCERTAIN TRANSITION PROBABILITIES

S.M. Hussin (St.Petersburg, SPbPU)
hussin_s@spbstu.ru

Many dynamic systems undergo sudden random changes, which may be caused by random failures and repairs of the components, changes in the interconnections of subsystems, sudden environment changes, etc. Usually most conventional dynamic systems are unable to cope with these sudden and random changes. However, Markov jump systems (MJSs), are one of class of stochastic hybrid systems, MJSs are suitable mathematical model to describe like these systems. As a result, MJSs can be applied in many fields, such as air vehicles, solar power stations, power systems and so on. Nowadays, more and more attention has been focused on the H_∞ filter, which can deal with the state estimation problem for discrete time-delay systems with Markovian jump (DMJLS) with uncertain models and unknown but energy bounded external noises.The H_∞ filter is briefly described as the design of a filter for a given system such that the gain from the exogenous disturbance to the filter error is below a prescribed level. Due to its loose requirement on the system model and noise statistics, more and more attention has been attracted and significant advances have been made in the H_∞ filtering method. It is difficult to determine the exact information of transition probabilities (TP). Therefore, there are many studies on MJS with incompletely TP, such as partly unknown TP or uncertain TP.

Problem statement [1,2]

The Markovian jump linear systems (MJLS) described in the following system, such that are defined on a complete probability space

---

(Ω, F, P)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A(\theta(t)) + \Delta A(\theta(t))]x(t) + [B(\theta(t)) + \Delta B(\theta(t))]w(t) \\ y(t) = \xi(t)C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))w(t) \\ z(t) = L(\theta(t))x(t), \end{cases} \tag{1}$$

Where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state variable of the system, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ is the output, $w(t)$ is the external noise,$\Delta A(\theta(t)), \Delta B(\theta(t))$ denoting the parameter uncertainties, are unknown real valued matrices with dimensions corresponding to each mode, $\xi(t)$ denoting the measurements state (missing or normal), is a Bernoulli distributed sequence. The continuous-time Markov chain $\{\theta(t), t \geqslant 0\}$ on the probability space, takes values on set $S = \{1, 2, \cdots, N\}$ with transition probability matrix $\Pi = (\pi_{ij})_{N \times N}$.

$$P(\theta(t+h) = j \mid \theta(t) = i) = \begin{cases} \pi_{ij}h + o(h), & i \neq j \\ 1 + \pi_{ij}h + o(h), & i = j. \end{cases} \tag{2}$$

And the transition rate $\pi_{ij} \geqslant 0 (i, j \in S, i \neq j)$, from i to j, and $\pi_{ii} = -\sum\limits_{j \neq i} \pi_{ij}$ for all $i \in S$.

Let for $\Pi = (\pi_{ij})_{N \times N}$ the error between them is $\Delta\pi_{ij}$ which can take value in $-\epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}$.

Let the following H_∞ filtering system [3]:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\hat{x}(t) = G_i\hat{x}(t) + K_i\left(y(t) - \beta C_i\hat{x}(t)\right) \\ \hat{z}(t) = H_i\hat{x}(t), \end{cases} \tag{3}$$

where $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ is vector of filter state, for the filter the $y(t) \in \mathbb{R}^m$ is the input, the estimation of $z(t)$ is $\hat{z}(t)$ and G_i, K_i, H_i are the mode-dependent H_∞ filter parameters must be find.

From (1) and the filter (3), and write the filtering error system:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\bar{x}(t) = \bar{A}_i\bar{x}(t) + (\xi(t) - \beta)\bar{A}_{ix}\bar{x}(t) + \bar{B}w(t) \\ e(t) = \bar{L}_i\bar{x}(t), \end{cases} \tag{4}$$

where $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}}(t) & \hat{x}^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$.

In this theorem we study the solvability for problem the robust H_∞ filter design in and whether the Linear matrix inequalities (LMIs) are possible for all the parametric uncertainties.

Theorem. Consider the MJLS (1) with uncertainties parameter. The filtering error system (4) is RSS and the H_∞ performance index $\gamma > 0$, if there are $P_{1i}, P_{2i}, P_{3i}, \tilde{G}_i, \tilde{K}_i, \tilde{H}_i, U_i, S_i, R_i$, are a matrices and $\epsilon > 0$ satisfying the following LMIs:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11i} & \Pi_{12i} & 0 & 0 & 0 & \Pi_{16i} & \Pi_{17i} & \Pi_{18i} & U_iM_i \\ * & \Pi_{22i} & 0 & 0 & 0 & \Pi_{26i} & \Pi_{27i} & \Pi_{28i} & S_iM_i \\ * & * & \Pi_{33i} & 0 & 0 & \alpha\tilde{K}_iC_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44i} & 0 & \alpha\tilde{K}_iC_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & L_i & -H_i & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Pi_{66i} & -P_{2i} & \varepsilon_iN_{ai}^TN_{bi} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -P_{3i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Pi_{88i} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_iI \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ * & P_{3i} \end{bmatrix} 0, \tag{6}$$

Where $i \in S, \alpha = [(1-\beta)\beta]^{1/2}$, and

$\Pi_{11i} = \Pi_{33i} = -U_i - U_i^T + \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} P_j$,

$\Pi_{12i} = \Pi_{34i} = -R_i - S_i^T + \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} P_{2j}$,

$\Pi_{16i} = U_iA_i + \beta\tilde{K}_iC_i$,

$\Pi_{17i} = \Pi_{27i} = \tilde{C}_i - \beta\tilde{K}_iC_i$,

$\Pi_{18i} = U_iB_i + \tilde{K}_iD_i$,

$\Pi_{22i} = \Pi_{44i} = -R_i - R_i^T + \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} P_{3j}$,

$\Pi_{26i} = S_iA_i + \beta\tilde{K}_iC_i$,

$\Pi_{28i} = S_iB_i + \tilde{K}_iD_i$,

$\Pi_{66i} = -P_{1i} + \varepsilon_iN_{ai}^TN_{ai}$,

$\Pi_{88i} = -\gamma^2I + \varepsilon_i^{-1}N_{bi}^TN_{bi}$.

if the LMIs (5)-(6) have a suitable solution, the parameters of a filter can be given by:

$$G_i = R_i^{-1}\tilde{G}_i, K_i = R_i^{-1}\tilde{K}_i, H_i = \tilde{H}_i.$$

References

1. Dong X, He S, Stojanovic V.Robust fault detection filter design for a class of discretetime conic-type non-linear Markov jump systems with jump fault signals / X. ong, S. He , V. Stojanovic // IET Control Theory Applications. 2020. — C. 1912–1919.

2.Hussin S.M., Sufiyanov V.G. analysis robust stabilization for Markov jump linearsystems / S.M. Hussin , V.G.Sufiyanov // Intelligent Systems in Manufacturing. — 2019. — N 4. — C. 163–166.

3. Liu, XK. H_∞ Filtering for Markovian Jump Linear Systems withUncertain Transition Probabilities / Liu, XK., Zhuang, JJ. Li //Int. J. Control Autom. Syst, 2021. —C. 2500–2510.

THE BOUNDEDNESS OF MAXIMAL OPERATOR IN CALDERON WEIGHTED B-LEBESGUE SPACES

S.H. Kasumova (Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan)
sabine.kasumova.adpu@mail.ru

Let $\mathbb{R}^n_{k,+} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 > 0, \ldots, x_k > 0, \ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ and let $E(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n_{k,+} \ ; \ |x-y| < r\}$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, $\gamma_1 > 0, \ldots, \gamma_k > 0$, $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_k$, $(x')^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdots x_k^{\gamma_k}$. For a measurable set $E \subset \mathbb{R}^n_{k,+}$ suppose $|E|_\gamma = \int_E (x')^\gamma dx$, then $|E(0,r)|_\gamma = \omega(n,k,\gamma) r^Q$, $Q = n + |\gamma|$, where

$$\omega(n,k,\gamma) = \int\limits_{E(0,1)} (x')^\gamma dx = \frac{\pi^{\frac{n-k}{2}}}{2^k} \, \Gamma^{-1}\left(\frac{Q+2}{2}\right) \prod_{i=1}^{k} \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right).$$

Let $L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ be the space of measurable functions on $\mathbb{R}^n_{k,+}$ with finite norm

$$\|f\|_{L_{p,\omega,\gamma}} = \|f\|_{L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)|^p \omega^p(x) (x')^\gamma dx \right)^{1/p},$$

$1 \leqslant p < \infty$ and for $p = \infty$ the space $L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ is defined by means of the usual modification

$$\|f\|_{L_{\infty,\gamma}} = \|f\|_{L_{\infty,\omega}} = \underset{x \in \mathbb{R}^n_{k,+}}{ess\ sup}\, \omega(x)|f(x)|.$$

Even though the $C_{p,\gamma}$ class is well-known, for completeness, we offer the definition of $C_{p,\gamma}$ weight functions.

Definition 1. *The weight function* ω *belongs to the class* $C_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *for* $1<p<\infty$*, if the following statement*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n_{k,+},r>0}\|\omega\|_{L_{p,\gamma}(E(x,r))}\left\|\frac{1}{\omega\cdot|\cdot|^Q}\right\|_{L_{p',\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+}\setminus E(x,r))}<\infty$$

in finites.

The generalized shift operator T^y is defined by

$$T^y f(x)=C_{\gamma,k}\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^\pi f\left((x',y')_\beta,x''-y''\right)\,d\nu(\beta)$$

where $d\nu\left(\beta\right)=\prod\limits_{i=1}^k\sin^{\gamma_i-1}\beta_i\ \ d\beta_1\ldots d\beta_k$, $x'=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k$, $x''=(x_{k+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-k}$, $(x_i,y_i)_{\beta_i}=(x_i^2-2x_iy_i\cos\beta_i+y_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $1\leqslant i\leqslant k$, $(x',y')_\beta=((x_1,y_1)_{\beta_1},\ldots,(x_k,y_k)_{\beta_k})$ and

$$C_{\gamma,k}=\pi^{-\frac{k}{2}}\,\Gamma^{-1}\left(\frac{|\gamma|}{2}\right)\prod_{i=1}^k\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)=\frac{2^{k-1}|\gamma|}{\pi}\left(\frac{|\gamma|}{2}+1\right)\omega(2,k,\gamma).$$

Now we define the B-maximal operator by

$$M_\gamma f(x)=\sup_{r>0}|E(0,r)|_\gamma^{-1}\int\limits_{E(0,r)}T^y|f(x)|(y')^\gamma dy.$$

Theorem 1. *Let* $1<p<\infty$*,* $\omega\in C_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$*. Then,* M_γ *is bounded from* $L_{p,\omega,\gamma}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *to* $L_{p,\omega,\gamma}$*.*

ANALYTICAL MODELING OF PHASE EQUILIBRIUM CONSTANTS WITH ADJUSTABLE GASOMETERS FOR A TWO-COMPONENT FILTRATION PROBLEM

V.L. Litvinov, K.V. Litvinova (Samara, Samara state technical university; Moscow, Lomonosov Moscow State University)
vladlitvinov@rambler.ru

Thermodynamically consistent analytical models with adjustable parameters have been developed for approximating the thermodynamic functions of two-component solutions. The aim of this study is to improve

---

the efficiency of numerical modeling of two-component filtration with phase transitions.

The approach is based on constructing phase equilibrium constants (K-values) using adjustable gasometers [1–7]. These parameters are calibrated based on the behavior of a specific real solution over a given range of pressures and temperatures, allowing for a more accurate accounting of intercomponent interactions compared to classical formulas that consider only the properties of individual components. A two-component model of a methane-decane system is presented as an example. Calculations demonstrate good agreement between the results obtained using the proposed model and those of an accurate compositional model over the pressure range under consideration.

The use of such models with adjustable parameters for numerical modeling of multicomponent filtration significantly reduces the required computational resources, improves the reliability of calculations, and eliminates numerical instabilities arising from inconsistencies in the thermodynamic functions used.

References

1. Courant R. Equations with partial derivatives./ Courant R. — M: Mir — 1964 — 830p.

2. Litvinov V.L. «Construction of self-similar solutions of two-component filtration when modeling the share of oil and gas», Geometric methods in control theory and mathematical physics. / V.L. Litvinov, K.V. Litvinova // III International Scientific Conference (Ryazan, April 26–30, 2021). — pp.61–62.

3. Koldoba E.V. Method for constructing phase equilibrium constants for multicomponent solutions / E.V. Koldoba // Matem. modeling, 30:4 (2018) — 84–96.

4. Koldoba E.V. Self-similar solutions to the equations of two-component isothermal filtration with phase transitions / E.V. Koldoba //Mathematical modeling — T.8 No. 7 — 2006 — p. 53–60.

5. Koldoba A.V., Koldoba E.V. Model equation of state and Gibbs potential for numerical calculation of multicomponent filtration problems with phase transitions / A.V. Koldoba, E.V. Koldoba – Geochemistry, N5 — 2004 — p. 573–576.

6. Koldoba E.V. Mathematical modeling of isothermal multicomponent multiphase filtration with phase transitions: dissertation... Candidate of Physical and Mathematical Sciences: 05.13.18 / E.V. Koldoba // Place of defense: Institute of Mathematical

Modeling of the Russian Academy of Sciences. — Moscow, 2005. — 113 p.: ill.

7. Brusilovsky A.I. Phase transformations during the development of oil and gas fields — «Grail», 2002.

SOME GLOBAL BIFURCATION RESULTS FOR NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS

E.A. Mammadov (Baku State University, Baku, Azerbaijan)
elchinmamedov88@mail.ru

Let H be a Hilbert space with the norm $||\cdot||$. Suppose that $L : D(L) \subset H \to H$ is a linear selfadjoint operator with compact resolvent.

We consider the following nonlinear eigenvalue problem

$$Lu = \lambda u + F(\lambda, u) + G(\lambda, u), \tag{1}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is an eigenvalue parameter, the nonlinear operators F, $G : \mathbb{R} \times E \to E$ are continuous and satisfy the following conditions: there exists a positive constant M such that

$$||F(\lambda, u)|| \leqslant M||u|| \text{ for } (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H; \tag{2}$$

for any bounded interval $\Lambda \in \mathbb{R}$,

$$g(\lambda, u) = o(||u) \text{ as } ||u|| \to 0, \tag{3}$$

and

$$g(\lambda, u) = o(||u) \text{ as } ||u|| \to +\infty, \tag{4}$$

uniformly for $\lambda \in \Lambda$.

Note that, by the above assumption on the operator L, each of its eigenvalues вЂ<вЂ<is isolated and has finite multiplicity, and the entire spectrum $\sigma(L)$ consists only of such points.

The global bifurcation of solutions to problem (1) in the case where conditions (2) and (3) are satisfied was investigated in the paper [1]. There, it was established that if μ is an eigenvalue of the operator L of odd multiplicity and the condition

$$\text{dist } (\mu; \sigma(L) \backslash \{\mu\}) > 2M \tag{5}$$

holds, then there exists a component C_μ of the set of solutions to problem (1) that meets $J_\mu \times \{0\}$ and either C_μ meets $J_\eta \times \{0\}$, or C_μ is unbounded in $\mathbb{R} \times H$, where $J_\mu = [\mu - M, \mu + M]$ and $\mu \neq \eta \in \sigma(L)$.

If μ is a simple eigenvalue of L, then developing the methods of papers [2] and [3] and combining them with the methods of paper [1], we obtained the following results in this note.

Theorem 1. *Let conditions (2)-(5) holds. Then for each* $\nu \in \{+\,,\,-\}$ *there exist components* C_μ^ν *and* D_μ^ν *of solutions to problem (1) which meet* $J_\mu \times \{0\}$ *and* $J_\mu \times \{\infty\}$*, respectively, and such that (i) either* C_μ^ν *meets* (λ, ∞) *for some* $\lambda \in \mathbb{R}$*, or the projection of* C_μ^ν *onto* $\mathbb{R} \times \{0\}$ *is unbounded, (ii) either* D_μ^ν *meets* $(\lambda, 0)$ *for some* $\lambda \in \mathbb{R}$*, or the projection of* D_μ^ν *onto* $\mathbb{R} \times \{0\}$ *is unbounded.*

Remark 1. The answer to the question of whether sets C_μ^ν and D_μ^ν can intersect or not is: both cases are possible.

Corollary 1. *If for each* $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ the projections of C_μ^ν and D_μ^ν onto $\mathbb{R} \times \{0\}$ are bounded, then C_μ^ν and D_μ^ν coincide.

References

1. Makhmudov A.P. Global bifurcation of solutions of certain nonlinearizable eigenvalue problems / A.P. Makhmudov, Z.S. Aliev // Diff. Equat. — 1989. — V. 25, No. 1. — P. 71-76.

2. Dancer E.N. On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems / E.N. Dancer // Indiana Uni. Math. J. — 1974. — V. 23, No. 11. — 1069–1076.

3. Rynne B.P. Bifurcation from zero or infinity in Sturm-Liouville problems which are not linearizable / B.P. Rynne // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — V. 228, No. 1. — 141–156.

CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM WITH A NEUMANN-TYPE BOUNDARY CONDITION FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH A NONLINEAR POTENTIAL IN A CURVILINEAR QUADRANT

J.V. Rudzko (Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus)
janycz@yahoo.com

In the curvilinear domain $Q = \{(t, x) : t \in (0, \infty) \wedge x \in (\gamma(t), \infty)\}$ of two independent variables $(t, x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$, consider the one-dimensional

---

nonlinear equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t,x) = f(t,x,u(t,x)), \tag{1}$$

where $a > 0$ for definiteness and f is a function given on the set $\overline{Q} \times \mathbb{R}$. We assume that the function γ, which determines the lateral boundary of Q, satisfies the conditions

$$\begin{gathered}\gamma(0) = 0, \quad \gamma \in C^1([0,\infty)), \quad \gamma'(t) \in (-a,a), \quad t \in [0,\infty), \\ \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) + at = +\infty, \quad \lim_{t\to-\infty} \gamma(t) - at = -\infty.\end{gathered} \tag{2}$$

Equation (1) is equipped with the initial conditions

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,\infty), \tag{3}$$

and the boundary condition

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = \gamma(t)) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{4}$$

where φ, ψ, and μ are functions given on the half-line $[0,\infty)$.

The paper [1] studied problem (1), (3) with the Dirichet condition

$$u(t, x = \gamma(t)) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{5}$$

in the case of the dimensionless wave equation ($a = 1$ and $f \equiv 0$) in the class of decaying piecewise smooth functions. In [2], a piecewise smooth solution of problem (1), (3), (5) was formally constructed in the case of the Klein–Gordon–Fock equation, namely, for $a = 1$ and $f(t,x,u) = -u$. The work [3] explored the first mixed problem for the wave equation in a curvilinear half-strip. The article [4] also studied the first mixed problem in a curvilinear half-strip for a more general linear Klein–Gordon–Fock equation with first derivatives and with variable coefficients

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + a^{(1)}(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \\ + a^{(2)}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + a^{(0)}(t,x)u(t,x) = F(t,x),\end{aligned}$$

where the coefficient $a(t,x)$ does not vanish at any point. However, it was assumed there that the curves $t = 0$ and $x = \gamma(t)$ are orthogonal at their point of intersection $(0,0)$, i.e., the additional condition $\gamma'(0)=0$ was imposed. In the present paper, we study problem (1)–(4) without this assumption. The work [5] derived the necessary and sufficient matching conditions for the existence of a unique classical solution to problem (1)–(3), (5).

We present our main results as the following statement.

Theorem 1. *Let the conditions* $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$, $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, *and* $\gamma \in C^2([0,\infty))$ *be satisfied, and let the function* f *satisfy the Lipschitz condition*

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)| \leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$$

with a function $k \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *with respect to the third variable. Problem* (1)–(4) *has the unique solution* u *in the class* $C^2(\overline{Q})$ *if and only if the matching conditions*

$$\mu(0)=\varphi'(0), \quad \mu'(0)=\gamma'(0)\varphi''(0)+\psi'(0)$$

are satisfied.

References

1. Pelloni B. Moving Boundary Value Problems for the Wave Equation / B. Pelloni, D.A. Pinotsis // J. Comput. Appl. Math. — 2010. — Vol. 234, No. 6. — P. 1685–1691.

2. Pelloni B. The Klein–Gordon Equation in a Domain with Time-Dependent Boundary / B. Pelloni, D.A. Pinotsis // Stud. Appl. Math. — 2008. — Vol. 121, No. 3. — P. 291–312.

3. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Wave Equation in a Curvilinear Half-Strip / V.I. Korzyuk, I.S. Kozlovskaya, S.N. Naumovets // Differential Equations. — 2020. — Vol. 56, No. 1. — P. 98–108.

4. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for Second-Order Hyperbolic Equation in Curvilinear Half-Strip with Variable Coefficients / V.I. Korzyuk, I.I. Stolyarchuk // Differential Equations. — 2017. — Vol. 53, No. 1. — P. 74–85.

5. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, No. 8. — P. 1075–1089.

6. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. — 2022. — Vol. 58, No. 2. — P. 175–186.

7. Korzyuk V.I. Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2023. — Vol. 43. — P. 48–63.

8. Korzyuk V.I. Classical Solution of the Second Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, No. 9. — P. 1216–1234.

9. Korzyuk V.I. Curvilinear Parallelogram Identity and Mean-Value Property for a Semilinear Hyperbolic Equation of the Second Order / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Eurasian Mathematical Journal. — 2024. — Vol. 15, No. 2. — P. 61–74.

GLOBAL BIFURCATION OF NONTRIVIAL SOLUTIONS OF SOME NONDIFFERENTIABLE PERTURBATIONS OF HALF-LINEAR STURM-LIOUVILLE PROBLEMS

N.L. Zakirli (Baku State University, Baku, Azerbaijan)
naile.zakirli@gmail.com

We consider the following nonlinear Sturm-Liouville problem

$$\begin{aligned}\ell(y)(x) \equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x) + \\ \alpha(x)y^+(x) + \beta(x)y^-(x) + f(x, y, y', \lambda),\ x \in (0, 1),\end{aligned} \tag{1}$$

$$a_0 y(0) + b_0 y'(0) = 0, \tag{2}$$

$$a_1 y(1) + b_1 y'(1) = 0, \tag{3}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is an eigenvalue parameter, p is a positive continuously differentiable function on $[0, 1]$, q, α, β are real-valued continuous functions on $[0, 1]$, $\alpha \not\equiv -\beta$, r is a positive continuous function on $[0, 1]$, $y^{\pm}(x) = \max\{\pm y(x), 0\}$, $x \in [0, 1]$, a_0, b_0, a_1, b_1 are real constants such that $(a_0^2 + b_0^2)(a_1^2 + b_1^2) > 0$, f is a real-valued continuous function on $[0, 1] \times \mathbb{R}^3$ that satisfies the following condition: there exist positive constants M and σ_0 (σ_0 can be small) such that

$$\left|\frac{f(x, y, s, \lambda)}{y}\right| \leqslant M,\ (x, y, s, \lambda) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^3,\ |y| + |s| \leqslant \sigma_0,\ y \neq 0.$$

Let E be the Banach space $C^1[0, 1] \cap BC$ with the usual norm $||y||_1 = \max\limits_{x \in [0,1]} |y(x)| + \max\limits_{x \in [0,1]} |y'(x)|$, where BC is the set of functions satisfying the boundary conditions (2) and (3).

For each $k \in \mathbb{N}$ and each $\nu \in \{+, -\}$, let S_k^ν be the set of functions $y \in E$ that satisfy the following conditions: (i) the function $y(x)$ has exactly $k-1$ simple zeros in $(0,1)$; (ii) $\lim\limits_{x \to 0+} \nu \operatorname{sgn} y(x) = 1$.

Along with the nonlinear problem (1)-(3), we consider the following half-linear problem

$$\left\{\begin{array}{l} \ell(y)(x) = \lambda r(x)y(x) + \alpha(x)y^+(x) + \beta(x)y^-(x),\, x \in (0,1), \\ a_0 y(0) + b_0 y'(0) = 0, \\ a_1 y(1) + b_1 y'(1) = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Note that the half-linear problem (4) was considered in [1, § 3] where it was shown that there exist two sequences of simple half-eigenvalues of this problem,

$$\lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \ldots < \lambda_k^+ < \ldots, \text{ and } \lambda_1^- < \lambda_2^- < \ldots < \lambda_k^- < \ldots .$$

The corresponding half-lines of solutions are in $\{\lambda_k^+\} \times S_k^+$, and $\{\lambda_k^-\} \times S_k^-$; aside from these solutions and the trivial ones, there are no other solutions of problem (4).

Lemma 1. For each $k \in \mathbb{N}$ and each $\nu \in \{+,-\}$ the set of bifurcation points of problem (1)-(3) with respect to the set $\mathbb{R} \times S_k^\nu$ is nonempty. Furtheremore, if $(\lambda, 0)$ is a bifurcation point of problem (1)-(3) with respect to $\mathbb{R} \times S_k^\nu$, then $\lambda \in J_k^\nu$, where $J_k^\nu = \left[\lambda_k^\nu - \frac{M}{\tau_0}, \lambda_k^\nu + \frac{M}{\tau_0}\right]$, $\tau_0 = \min\limits_{x \in [0,1]} \tau(x)$.

For each $k \in \mathbb{N}$ and each ν, let D_k^ν be the union of all the components of nontrivial solutions of problem (1)-(3) which meet $J_k^\nu \times \{0\}$ with respect to the set $\mathbb{R} \times S_k^\nu$.

Theorem 1. For each $k \in \mathbb{N}$ and each ν the set D_k^ν is nonempty, is contained in $\mathbb{R} \times S_k^\nu$ and is unbounded in $\mathbb{R} \times E$.

References

1. Berestycki H. On some nonlinear Sturm-Liouville problems / H. Berestycki // J. Differential Equations — 1977. — V. 26, No. 1. — P. 375–390.

Именной указатель

Научное издание

ВОРОНЕЖСКАЯ ЗИМНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА С. Г. КРЕЙНА – 2026

Материалы международной Воронежской зимней математической школы (24–27 января 2026 г.)

Под редакцией Д. В. Костина

Верстка и подготовка оригинал-макета
Д. Э. Кондаурова

Подписано в печать 13.03.2026. Формат 60×84/16.
Усл. п. л. 23,3. Уч. изд. л. 20,1. Тираж 25 экз. Заказ 94

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3